ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

Πρόοδος-Χειμερινό Εξάμηνο 2014

Διδάσκων: Νίκος Φραντζικινάκης

Επιτρέπεται μόνο μία σελίδα με σημειώσεις. Διάρκεια 2 ώρες. Καλή επιτυχία!!

(**1**) (1.5 μονάδες) Έστω $E_n \subset [0,1]$ μετρήσιμα με $m(E_n) = 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Δείξτε ότι $m(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n) = 1$.

(**2**) (1.5 μονάδες) Έστω $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση τέτοια ώστε για κάθε $N \subset \mathbb{R}$ με $m(N) = 0$ το σύνολο $f(N)$ είναι μετρήσιμο. Δείξτε ότι εάν $E \subset \mathbb{R}$ είναι μετρήσιμο τότε το σύνολο $f(E)$ είναι μετρήσιμο.

(**3**) (1.5 μονάδες) Έστω E το σύνολο των πραγματικών αριθμών στο $[0,1]$ οι οποίοι δεν περιέχουν το ψηφίο 3 στο δεκαδικό τους ανάπτυγμα. Δείξτε ότι $m(E) = 0$.

(**4**) (1.5 μονάδες) Έστω $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ **μη** μετρήσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι η συνάρτηση $g = e^f$ **δεν** είναι μετρήσιμη. Ισχύει το ίδιο για την συνάρτηση $h = f^2$;

(**5**) (1.5 μονάδες) Έστω $f_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μετρήσιμες συναρτήσεις ώστε $m\big(|f_n| \geq \frac{1}{n}\big) \leq \frac{1}{n^2}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Δείξτε ότι $f_n \to 0$ σχεδόν παντού.

(**6**) (1.5 μονάδες) Έστω $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ μετρήσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει μετρήσιμο $A \subset [0,1]$ τέτοιο ώστε $m([0,1] \setminus A) \leq \varepsilon$ και η f είναι φραγμένη στο A.

(**7**) (1.5 μονάδες) Έστω $E \subset [0,1]$ μετρήσιμο τέτοιο ώστε για κάθε $x, y \in E$ με $x \neq y$ έχουμε $x - y \notin \mathbb{Q}$. Δείξτε ότι $m(E) = 0$.