Πραγματική Ανάλυση

Διαγώνισμα Εξεταστικής Ιανουαρίου 2023
Διάρκεια 2.5 ώρες.

(**1**) (2.5 μονάδες) Έστω $f_n\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, μετρήσιμες συναρτήσεις.

(*i*) Εάν $m(|f_n| \geq 1/n) \leq 1/n^2$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, δείξτε ότι $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ σχεδόν παντού.

(*ii*) Δείξτε ότι υπάρχουν μετρήσιμες $f_n\colon [0,1] \to [0,1]$, $n \in \mathbb{N}$, τέτοιες ώστε $m(f_n > 0) = 1/n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ όμως $\limsup_{n\to\infty} f_n(x) = 1$ για κάθε $x \in [0,1]$.

(Πάρτε $f_n = \mathbf{1}_{[a_n,b_n]}$ για κατάλληλα διαστήματα $[a_n, b_n] \subset [0,1]$.)

(**2**) (1.5 μονάδες) Έστω $f\colon \mathbb{R} \to [0,+\infty)$ ολοκληρώσιμη. Δείξτε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει μετρήσιμο $E \subset \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $m(E) < \infty$, η f είναι φραγμένη στο E, και $\int_E f\, dx \geq \int f\, dx - \varepsilon$.

(**3**) (2 μονάδες) Έστω $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη. Ορίζουμε τη συνάρτηση $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$g(x) = \int f(t)\, \sin(xt^2)\, dt, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Δείξτε ότι η g είναι καλά ορισμένη, συνεχής συνάρτηση.

(**4**) (2 μονάδες) Έστω $f_n \in L^2(\mathbb{R})$, $n \in \mathbb{N}$, συναρτήσεις ώστε $\int f_n \cdot f_m\, dx = 0$ για κάθε $m \neq n$ και $\int f_n^2\, dx = 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

(*i*) Δείξτε ότι $\left\|\sum_{n=1}^N c_n \cdot f_n\right\|_2^2 = \sum_{n=1}^N c_n^2$ για κάθε $c_n \in \mathbb{R}$, $n = 1, \ldots, N$.

(*ii*) Δείξτε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^\infty \frac{f_n}{n}$ συγκλίνει στον $L^2(\mathbb{R})$.

(**5**) (3 μονάδες) Έστω $E \subset \mathbb{R}$ μετρήσιμο με $m(E) < \infty$. Ορίζουμε τη συνάρτηση $f\colon \mathbb{R} \to [0,+\infty)$ με τύπο $f(x) = m(E \cap (-\infty, x])$, $x \in \mathbb{R}$.

(*i*) Δείξτε ότι η f είναι συνεχής.

(*ii*) Δείξτε ότι η f είναι σχεδόν παντού παραγωγίσιμη και υπολογίστε την παράγωγό της.

(*iii*) Δείξτε ότι για κατάλληλη επιλογή του E η f ορίζει μία γνησίως αύξουσα, σχεδόν παντού παραγωγίσιμη συνάρτηση, τέτοια ώστε $f'(x) = 0$ έξω από ένα σύνολο πεπερασμένου μέτρου.
