

---

# Σύντομες Σημειώσεις Πραγματικής Ανάλυσης

---

Θέμης Μήτσης

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ

ΗΡΑΚΛΕΙΟ



## Περιεχόμενα

Συμβάσεις και συμβολισμοί	4
1. Το εξωτερικό μέτρο Lebesgue	5
2. Μετρήσιμα σύνολα	7
3. Η κανονικότητα του μέτρου Lebesgue	11
4. Μετρήσιμες συναρτήσεις	13
5. Το σύνολο και η συνάρτηση Cantor	15
6. Το θεώρημα Steinhaus και κάποιες εφαρμογές του	18
7. Το ολοκλήρωμα Lebesgue μη αρνητικών συναρτήσεων	21
8. Το γενικό ολοκλήρωμα Lebesgue	27
9. Σύγκλιση ακολουθιών μετρήσιμων συναρτήσεων	32
10. Προσέγγιση ολοκληρώσιμων συναρτήσεων	34
11. Η μεγιστική συνάρτηση Hardy-Littlewood	37

### Συμβάσεις και συμβολισμοί

- Αν τα  $A$  και  $B$  είναι σύνολα, τότε  $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ .
- Ένα υποσύνολο του  $\mathbb{R}$  λέγεται  $F_\sigma$  αν είναι αριθμήσιμη ένωση κλειστών συνόλων. Λέγεται  $G_\delta$  αν είναι αριθμήσιμη τομή ανοιχτών συνόλων.
- Ισχύουν όλες οι γνωστές από τον Απειροστικό Λογισμό συμβάσεις σχετικά με τις πράξεις ανάμεσα σε άπειρες ποσότητες. Επιπλέον, κάνουμε τη σύμβαση  $0 \cdot (\pm\infty) = 0$ .

## 1. Το εξωτερικό μέτρο Lebesgue

Αν  $I \subset \mathbb{R}$  είναι κάποιο διάστημα, με  $l(I)$  συμβολίζουμε το μήκος του (δηλαδή τη διαφορά των άκρων του αν είναι φραγμένο,  $+\infty$  αν δεν είναι φραγμένο).

**Ορισμός.** Έστω  $A \subset \mathbb{R}$ . Το εξωτερικό μέτρο Lebesgue του  $A$  συμβολίζεται με  $\mu^*(A)$  και ορίζεται να είναι

$$\mu^*(A) = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} l(I_n) : A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \right\},$$

όπου τα  $I_n$  είναι ανοιχτά διαστήματα με πεπερασμένα άκρα. Τυπικά το  $\mu^*$  είναι μια συνολοσυνάρτηση με πεδίο ορισμού το δυναμοσύνολο  $\mathcal{P}(\mathbb{R})$  και σύνολο τιμών το  $[0, +\infty]$ .

**Θεώρημα.**

- (1) Αν  $A \subset B$  τότε  $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$  (μονοτονία).
- (2)  $\mu(\{x\}) = 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

Απόδειξη.

- (1) Έστω  $B \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ . Τότε  $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ . Επομένως  $\mu^*(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} l(I_n)$ . Παίρνοντας  $\inf$  στο δεξιά μέλος έχουμε το ζητούμενο.
- (2) Έχουμε  $\{x\} \subset (x-\varepsilon, x+\varepsilon)$  για κάθε  $\varepsilon > 0$ . Άρα  $\mu^*(\{x\}) \leq l((x-\varepsilon, x+\varepsilon)) = 2\varepsilon$  για κάθε  $\varepsilon > 0$ . Επομένως  $\mu^*(\{x\}) = 0$ .

□

**Θεώρημα.** Αν το  $I \subset \mathbb{R}$  είναι οποιοδήποτε διάστημα, τότε  $\mu^*(I) = l(I)$ .

Απόδειξη. Υποθέτουμε κατ' αρχάς ότι το  $I$  είναι κλειστό και φραγμένο, δηλαδή  $I = [a, b]$ . Έστω  $I \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ . Το  $I$  είναι συμπαγές, άρα η  $\{I_n : n \in \mathbb{N}\}$  έχει πεπερασμένη υποκάλυψη, ας πούμε

$$J_1 = (a_1, b_1), J_2 = (a_2, b_2), \dots, J_N = (a_N, b_N).$$

Μπορούμε να υποθέσουμε ότι:

- Κανένα από τα  $J_k$  δεν περιέχεται σε κάποιο άλλο.
- Το δεξί άκρο του  $J_k$  είναι μεγαλύτερο από το αριστερό άκρο του  $J_{k+1}$ , δηλαδή τα  $J_k$  είναι «διαδοχικά».

Τότε έχουμε

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} l(I_n) &\geq \sum_{k=1}^N l(J_k) = \sum_{k=1}^N (b_k - a_k) \\ &= -a_1 + (b_1 - a_2) + (b_2 - a_3) + \dots + (b_{N-1} - a_N) + b_N \\ &\geq b_N - a_1 \geq b - a. \end{aligned}$$

Η παραπάνω σχέση ισχύει για κάθε κάλυψη του  $I$ , επομένως  $\mu^*(I) \geq b - a$ . Για να δείξουμε την αντίστροφη ανισότητα παρατηρούμε ότι  $I \subset (a - \varepsilon, b + \varepsilon)$  για κάθε  $\varepsilon > 0$ . Άρα

$$\mu^*(I) \leq l((a - \varepsilon, b + \varepsilon)) = b - a + 2\varepsilon,$$

για κάθε  $\varepsilon > 0$ . Συνεπώς  $\mu^*(I) \leq b - a$ . Τελικά  $\mu^*(I) = b - a$ .

Αν τώρα το  $I$  είναι της μορφής  $(a, b)$ ,  $(a, b]$  ή  $[a, b)$ , τότε για κάθε  $\varepsilon > 0$  αρκετά μικρό έχουμε

$$[a + \varepsilon, b - \varepsilon] \subset I \subset [a, b].$$

Χρησιμοποιώντας την μονοτονία του εξωτερικού μέτρου και την προηγούμενη περίπτωση παίρνουμε

$$b - a - 2\varepsilon \leq \mu^*(I) \leq b - a.$$

Επομένως  $\mu^*(I) = b - a$ .

Τέλος, αν το  $I$  δεν είναι φραγμένο, τότε για κάθε  $n \in \mathbb{N}$ , το  $I$  περιέχει κάποιο διάστημα μήκους  $n$ . Από την μονοτονία του εξωτερικού μέτρου και τις προηγούμενες περιπτώσεις παίρνουμε  $\mu^*(I) \geq n$  το οποίο σημαίνει ότι  $\mu^*(I) = +\infty$ .

□

**Θεώρημα** (Υποπροσθετικότητα του εξωτερικού μέτρου Lebesgue). Έστω  $A_n \subset \mathbb{R}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Τότε

$$\mu^* \left( \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n).$$

*Απόδειξη.* Αν  $\mu^*(A_n) = +\infty$  για κάποιο  $n$  τότε η σχέση είναι προφανής. Υποθέτουμε λοιπόν ότι  $\mu^*(A_n) < +\infty$  για κάθε  $n$  και έστω  $\varepsilon > 0$ . Τότε για κάθε  $n$  υπάρχουν ανοιχτά διαστήματα  $I_{n,m}$ ,  $m \in \mathbb{N}$ , τα οποία καλύπτουν το  $A_n$  τέτοια ώστε

$$\sum_{m=1}^{\infty} l(I_{n,m}) < \mu^*(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}.$$

Προφανώς

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=1}^{\infty} I_{n,m},$$

άρα

$$\mu^* \left( \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} l(I_{n,m}) < \sum_{n=1}^{\infty} \left( \mu^*(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n) + \varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \varepsilon + \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n).$$

Η παραπάνω σχέση ισχύει για κάθε  $\varepsilon$  και έτσι έχουμε το ζητούμενο. □

#### ΑΣΚΗΣΕΙΣ

- (1) Δείξτε ότι το  $\mu^*$  είναι αναλλοίωτο στις μεταθέσεις, δηλαδή για κάθε  $A \subset \mathbb{R}$  και κάθε  $x \in \mathbb{R}$  έχουμε  $\mu^*(A+x) = \mu^*(A)$ .
- (2) Έστω  $A \subset \mathbb{R}$  με  $\mu^*(A) < \infty$ . Δείξτε ότι για κάθε  $\varepsilon > 0$  υπάρχει  $G \subset \mathbb{R}$  ανοιχτό με  $A \subset G$  και  $\mu^*(G) < \mu^*(A) + \varepsilon$ .
- (3) Δείξτε ότι κάθε αριθμήσιμο σύνολο έχει εξωτερικό μέτρο μηδέν.
- (4) Δείξτε ότι αν το  $A$  έχει εξωτερικό μέτρο μηδέν τότε  $\mu^*(A \cup B) = \mu^*(B)$  για κάθε  $B \subset \mathbb{R}$ .
- (5) Για κάθε  $A \subset \mathbb{R}$  θέτουμε

$$\nu^*(A) = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} l(I_n) : A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \right\},$$

όπου τα  $I_n$  είναι ημιάνοιχτα διαστήματα της μορφής  $[a, b)$ . Δείξτε ότι  $\mu^* = \nu^*$ .

## 2. Μετρήσιμα σύνολα

**Ορισμός.** Έστω  $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$ . Η οικογένεια  $\mathcal{A}$  ονομάζεται  $\sigma$ -άλγεβρα αν

- (1)  $\mathbb{R} \in \mathcal{A}$ .
- (2)  $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$  (η  $\mathcal{A}$  είναι κλειστή ως προς τα συμπληρώματα).
- (3)  $A_n \in \mathcal{A}, n \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$  (η  $\mathcal{A}$  είναι κλειστή ως προς τις αριθμήσιμες ενώσεις).

Τετριμμένα παραδείγματα  $\sigma$ -αλγεβρών είναι ολόκληρο το δυναμοσύνολο  $\mathcal{P}(\mathbb{R})$  και κάθε οικογένεια της μορφής  $\{\emptyset, A, A^c, \mathbb{R}\}$ , όπου  $A \subset \mathbb{R}$ . Μια οικογένεια διαστημάτων (οποιοδήποτε τύπου) δεν είναι  $\sigma$ -άλγεβρα.

Παρατηρούμε ότι μια  $\sigma$ -άλγεβρα είναι κλειστή ως προς τις αριθμήσιμες τομές διότι

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \left[ \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c \right]^c,$$

και άρα είναι κλειστή ως προς όλες τις συνολοθεωρητικές πράξεις, αρκεί αυτές να γίνονται το πολύ αριθμήσιμες φορές.

**Ορισμός.** Αν  $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$ , τότε θέτουμε

$$\sigma(\mathcal{C}) = \bigcap_{\substack{\mathcal{A} \text{ } \sigma\text{-άλγεβρα} \\ \mathcal{C} \subset \mathcal{A}}} \mathcal{A}.$$

Η  $\sigma(\mathcal{C})$  είναι η τομή όλων των  $\sigma$ -άλγεβρών που περιέχουν την  $\mathcal{C}$ . Λέμε ότι η  $\sigma(\mathcal{C})$  παράγεται από την  $\mathcal{C}$ .

Προφανώς η  $\sigma(\mathcal{C})$  είναι η μικρότερη  $\sigma$ -άλγεβρα που περιέχει την  $\mathcal{C}$ .

**Ορισμός.** Θέτουμε

$$\mathcal{B} = \sigma(\{G : G \subset \mathbb{R} \text{ ανοιχτό}\}).$$

Η  $\mathcal{B}$  είναι η  $\sigma$ -άλγεβρα που παράγεται από την οικογένεια όλων των ανοιχτών συνόλων. Τα στοιχεία της ονομάζονται σύνολα Borel.

Εύκολα μπορεί κανείς να δει ότι

$$\begin{aligned} \mathcal{B} &= \sigma(\{F : F \subset \mathbb{R} \text{ κλειστό}\}) \\ &= \sigma(\{I : I \subset \mathbb{R} \text{ ανοιχτό διάστημα}\}) \\ &= \sigma(\{I : I \subset \mathbb{R} \text{ κλειστό διάστημα}\}) \\ &= \sigma(\{I : I \subset \mathbb{R} \text{ ημιάνοιχτο διάστημα}\}) \\ &= \sigma(\{I : I \subset \mathbb{R} \text{ μη φραγμένο διάστημα}\}). \end{aligned}$$

**Ορισμός.** Ένα σύνολο  $E \subset \mathbb{R}$  λέγεται Lebesgue μετρήσιμο αν για κάθε  $A \subset \mathbb{R}$  ισχύει

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \setminus E).$$

Η οικογένεια των Lebesgue μετρήσιμων συνόλων συμβολίζεται με  $\mathcal{M}$ .

Παρατηρούμε ότι για να είναι το  $E$  Lebesgue μετρήσιμο αρκεί για κάθε  $A$  να έχουμε

$$\mu^*(A) \geq \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \setminus E),$$

δ ότι η αντίστροφη ανισότητα ισχύει πάντα από την υποπροσθετικότητα του εξωτερικού μέτρου.

**Θεώρημα.** Η  $\mathcal{M}$  είναι  $\sigma$ -άλγεβρα.

Απόδειξη.

- (1)  $\mu^*(A \cap \mathbb{R}) + \mu^*(A \setminus \mathbb{R}) = \mu^*(A)$ , άρα  $\mathbb{R} \in \mathcal{M}$ .
- (2)  $\mu^*(A \cap E^c) + \mu^*(A \setminus E^c) = \mu^*(A \setminus E) + \mu^*(A \cap E)$ , άρα η  $\mathcal{M}$  είναι κλειστή ως προς τα συμπληρώματα.
- (3) Θα δείξουμε ότι η  $\mathcal{M}$  είναι κλειστή ως προς τις αριθμήσιμες ενώσεις. Έστω  $E_n, n \in \mathbb{N}$ , μετρήσιμα και  $A \subset \mathbb{R}$  τυχόν. Αφού το  $E_1$  είναι μετρήσιμο έχουμε

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E_1) + \mu^*(A \setminus E_1) = \mu^*(A \cap E_1) + \mu^*(A \cap E_1^c).$$

Αφού το  $E_2$  είναι μετρήσιμο έχουμε

$$\mu^*(A \cap E_1^c) = \mu^*(A \cap E_1^c \cap E_2) + \mu^*(A \cap E_1^c \cap E_2^c).$$

Άρα

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E_1) + \mu^*(A \cap (E_2 \setminus E_1)) + \mu^*(A \setminus (E_1 \cup E_2)).$$

Προχωρώντας ένα βήμα ακόμα, από τη μετρησιμότητα του  $E_3$  παίρνουμε

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E_1) + \mu^*(A \cap (E_2 \setminus E_1)) + \mu^*(A \cap (E_3 \setminus (E_1 \cup E_2))) + \mu^*(A \setminus (E_1 \cup E_2 \cup E_3)).$$

Επομένως μετά από  $n$  βήματα έχουμε

$$\begin{aligned} \mu^*(A) &= \sum_{k=1}^n \mu^* \left( A \cap \left( E_k \setminus \bigcup_{j<k} E_j \right) \right) + \mu^* \left( A \setminus \bigcup_{k=1}^n E_k \right) \\ &\geq \sum_{k=1}^n \mu^* \left( A \cap \left( E_k \setminus \bigcup_{j<k} E_j \right) \right) + \mu^* \left( A \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \right) \end{aligned}$$

η παραπάνω σχέση ισχύει για κάθε  $n$ , άρα

$$\begin{aligned} \mu^*(A) &\geq \sum_{k=1}^{\infty} \mu^* \left( A \cap \left( E_k \setminus \bigcup_{j<k} E_j \right) \right) + \mu^* \left( A \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \right) \\ &\geq \mu^* \left( A \cap \bigcup_{k=1}^{\infty} \left( E_k \setminus \bigcup_{j<k} E_j \right) \right) + \mu^* \left( A \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \right) \\ &= \mu^* \left( A \cap \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \right) + \mu^* \left( A \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \right). \end{aligned}$$

Αυτό σημαίνει ότι το  $\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$  είναι μετρήσιμο. □

**Θεώρημα.** Έστω  $E_n \subset \mathbb{R}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , ξένα ανά δύο, μετρήσιμα. Τότε

$$\mu^* \left( \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E_n).$$

Απόδειξη. Αρκεί να δείξουμε ότι

$$\mu^* \left( \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \right) \geq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E_n),$$

διότι η αντίστροφη ανισότητα ισχύει πάντα (υποπροσθετικότητα). Στην πορεία της απόδειξης του προηγούμενου θεωρήματος δείξαμε ότι για κάθε  $A$  ισχύει

$$(\star) \quad \mu^*(A) \geq \sum_{k=1}^{\infty} \mu^* \left( A \cap \left( E_k \setminus \bigcup_{j<k} E_j \right) \right) + \mu^* \left( A \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \right).$$

Αφού τα  $E_n$  είναι ξένα έχουμε

$$E_k \setminus \bigcup_{j<k} E_j = E_k$$

για κάθε  $k$ . Άρα αν στην  $(\star)$  θέσουμε  $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ , παίρνουμε το ζητούμενο. □

**Ορισμός.** Ο περιορισμός του  $\mu^*$  στη  $\sigma$ -άλγεβρα  $\mathcal{M}$  συμβολίζεται με  $\mu$  και ονομάζεται μέτρο Lebesgue.

Από το προηγούμενο θεώρημα, το  $\mu$  είναι μια αριθμήσιμα προσθετική συνολοσυνάρτηση με πεδίο ορισμού την  $\mathcal{M}$  και σύνολο τιμών  $[0, +\infty]$ .

**Θεώρημα.** Κάθε σύνολο Borel είναι μετρήσιμο, δηλαδή  $\mathcal{B} \subset \mathcal{M}$ .



*Απόδειξη.* Αρκεί να δείξουμε ότι κάθε διάστημα της μορφής  $(a, +\infty)$  είναι μετρήσιμο, διότι η οικογένεια των διαστημάτων αυτών παράγει τα σύνολα Borel. Έστω  $A \subset \mathbb{R}$  και  $\varepsilon > 0$ . Επιλέγουμε ανοιχτά διαστήματα  $I_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , έτσι ώστε

$$A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} l(I_n) < \mu^*(A) + \varepsilon.$$

Τότε

$$\begin{aligned} \mu^*(A \cap (a, +\infty)) + \mu^*(A \setminus (a, +\infty)) &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(I_n \cap (a, +\infty)) + \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(I_n \cap (-\infty, a]) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (l(I_n \cap (a, +\infty)) + l(I_n \cap (-\infty, a])) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} l(I_n) < \mu^*(A) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Η παραπάνω σχέση ισχύει για κάθε  $\varepsilon > 0$ , άρα

$$\mu^*(A \cap (a, +\infty)) + \mu^*(A \setminus (a, +\infty)) \leq \mu^*(A),$$

το οποίο σημαίνει ότι το  $(a, +\infty)$  είναι μετρήσιμο. □

**Θεώρημα.** Έστω  $E_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , μια ακολουθία μετρήσιμων συνόλων.

(1) Αν η ακολουθία είναι αύξουσα ( $E_n \subset E_{n+1}$ ), τότε  $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \lim \mu(E_n)$ .

(2) Αν η ακολουθία είναι φθίνουσα ( $E_n \supset E_{n+1}$ ) και το  $E_1$  έχει πεπερασμένο μέτρο, τότε

$$\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \lim \mu(E_n).$$

*Απόδειξη.*

(1) Θετούμε  $F_1 = E_1$  και  $F_n = E_n \setminus E_{n-1}$  για  $n > 1$ . Τα  $F_n$  είναι ανά δύο ξένα και προφανώς

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n.$$

Άρα

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(F_n) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \mu(F_n) = \lim_{N \rightarrow \infty} \mu\left(\bigcup_{n=1}^N F_n\right) = \lim_{N \rightarrow \infty} \mu(E_N).$$

(2) Η  $E_1 \setminus E_n$  είναι αύξουσα και

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} (E_1 \setminus E_n) = E_1 \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n.$$

Επομένως από το (1) έχουμε

$$\mu\left(E_1 \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \lim \mu(E_1 \setminus E_n).$$

Αλλά το μέτρο του  $E_1$  είναι πεπερασμένο, άρα

$$\mu\left(E_1 \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \mu(E_1) - \mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n\right) \quad \& \quad \mu(E_1 \setminus E_n) = \mu(E_1) - \mu(E_n),$$

και το συμπέρασμα έπεται. □

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

- (1) Δείξτε ότι κάθε σύνολο με εξωτερικό μέτρο μηδέν είναι μετρήσιμο.  
 (2) Έστω  $E \in \mathcal{M}$  και  $A \subset \mathbb{R}$  τέτοιο ώστε  $\mu^*(E \Delta A) = 0$ . Δείξτε ότι το  $A$  είναι μετρήσιμο.  $E \Delta A$  είναι η συμμετρική διαφορά των  $E$  και  $A$  δηλαδή το σύνολο  $(E \setminus A) \cup (A \setminus E)$ .  
 (3) Δείξτε ότι για κάθε  $A \subset \mathbb{R}$  υπάρχει  $E$  μετρήσιμο, τέτοιο ώστε  $A \subset E$  και  $\mu^*(A) = \mu(E)$ . (Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε την άσκηση 2 της προηγούμενης ενότητας.)  
 (4) (α') Δείξτε ότι κάθε μη-κενό ανοιχτό σύνολο έχει θετικό μέτρο.  
 (β') Έστω  $\mathbb{Q} = \{q_n : n \in \mathbb{N}\}$  μια αρίθμηση των ρητών. Θέτουμε

$$G = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left( q_n - \frac{1}{2^n}, q_n + \frac{1}{2^n} \right).$$

Δείξτε ότι  $\mu(G \Delta F) > 0$  για κάθε κλειστό σύνολο  $F$ .

- (5) Έστω  $E_n, n \in \mathbb{N}$ , μια ακολουθία μετρήσιμων συνόλων τέτοια ώστε:

(α')  $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) < \infty$ .

(β')  $\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m=n}^{\infty} E_m = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} E_m = A$ .

Δείξτε ότι  $\mu(A) = \lim \mu(E_n)$ .

- (6) Έστω  $E \in \mathcal{M}$ . Δείξτε ότι, με το συμβολισμό της άσκησης 1 της προηγούμενης ενότητας,  $E + x \in \mathcal{M}$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .  
 (7) Έστω  $E \in \mathcal{M}$  με πεπερασμένο μέτρο και  $A \subset E$ . Δείξτε ότι το  $A$  είναι μετρήσιμο αν και μόνο αν  $\mu(E) = \mu^*(A) + \mu^*(E \setminus A)$ . (Υπόδειξη: Χρησιμοποιώντας την άσκηση 3, βρείτε  $B$  μετρήσιμο τέτοιο ώστε  $A \subset B \subset E$  και  $\mu^*(A) = \mu(B)$ . Στη συνέχεια δείξτε ότι  $\mu^*(B \setminus A) = 0$ , άρα το  $A$  είναι μετρήσιμο.)  
 (8) Έστω  $A_n, n \in \mathbb{N}$ , μια αύξουσα ακολουθία συνόλων (όχι κατ' ανάγκη μετρήσιμων). Δείξτε ότι

$$\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim \mu^*(A_n).$$

(Υπόδειξη: Αν τα  $A_n$  είναι μετρήσιμα τότε γνωρίζουμε, από θεωρία, ότι η παραπάνω σχέση ισχύει. Χρησιμοποιήστε τώρα την άσκηση 3.)

- (9) Έστω  $A \subset \mathbb{R}$  τέτοιο ώστε  $0 < \mu^*(A) < \infty$  και  $0 < \alpha < 1$ . Δείξτε ότι υπάρχει ανοιχτό διάστημα  $I$  τέτοιο ώστε  $\mu^*(A \cap I) > \alpha \mu(I)$ . (Υπόδειξη: Βρείτε ένα ανοιχτό σύνολο  $G$  τέτοιο ώστε  $A \subset G$  και  $\alpha \mu(G) < \mu^*(A)$ . Γράψτε το  $G$  σαν αριθμήσιμη ένωση ξένων ανά δύο ανοιχτών διαστημάτων. Το ζητούμενο  $I$  είναι κάποιο από αυτά.)  
 (10) Έστω  $A, B \subset \mathbb{R}$  τέτοια ώστε  $\inf\{|a - b| : a \in A, b \in B\} > 0$ . Δείξτε ότι  $\mu^*(A \cup B) = \mu^*(A) + \mu^*(B)$ . (Υπόδειξη: Η υπόθεση συνεπάγεται ότι υπάρχουν ξένα μεταξύ τους, ανοιχτά  $U, V$  τέτοια ώστε  $A \subset U, B \subset V$ . Βρείτε  $E$  μετρήσιμο τέτοιο ώστε  $A \cup B \subset E$  και  $\mu^*(A \cup B) = \mu(E)$ . Θεωρήστε τώρα τα σύνολα  $E \cap U$  και  $E \cap V$ .)  
 (11) Έστω  $A \subset \mathbb{R}$ . Για κάθε  $r > 0$  θέτουμε  $f(r) = \mu^*(A \cap (-r, r))$ . Δείξτε ότι η  $f$  είναι ομοιόμορφα συνεχής.

### 3. Η κανονικότητα του μέτρου Lebesgue

**Θεώρημα.** Έστω  $E \subset \mathbb{R}$ . Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα.

- (1) Το  $E$  είναι μετρήσιμο.
- (2) Για κάθε  $\varepsilon > 0$  υπάρχει  $G$  ανοιχτό με  $E \subset G$  και  $\mu^*(G \setminus E) < \varepsilon$ .
- (3) Υπάρχει ένα  $G_\delta$  σύνολο  $A$  με  $E \subset A$  και  $\mu^*(A \setminus E) = 0$ .

Απόδειξη.

- (1)  $\Rightarrow$  (2) Υποθέτουμε κατ'αρχήν ότι  $\mu(E) < \infty$ . Από την άσκηση 2 του φυλλαδίου 1, υπάρχει  $G \subset \mathbb{R}$  ανοιχτό με  $E \subset G$  και  $\mu(G) < \mu(E) + \varepsilon$ . Αλλά τότε  $\mu(G \setminus E) = \mu(G) - \mu(E) < \varepsilon$ . Αν τώρα  $\mu(E) = \infty$ , τότε γράφουμε το  $\mathbb{R}$  σαν αριθμήσιμη ένωση ξένων ανά δύο φραγμένων διαστημάτων  $I_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Τότε  $\mu(E \cap I_n) < \infty$ , άρα από τα προηγούμενα, υπάρχει  $G_n$  ανοιχτό με  $E \cap I_n \subset G_n$  και

$$\mu(G_n \setminus (E \cap I_n)) < \frac{\varepsilon}{2^n}.$$

Θέτουμε

$$G = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n.$$

Τότε το  $G$  είναι ανοιχτό,  $E \subset G$  και

$$\mu(G \setminus E) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} G_n \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} E \cap I_n\right) \leq \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (G_n \setminus (E \cap I_n))\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(G_n \setminus (E \cap I_n)) < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^n} = \varepsilon.$$

- (2)  $\Rightarrow$  (3) Για κάθε  $n$  υπάρχει  $G_n$  ανοιχτό με  $E \subset G_n$  και  $\mu^*(G_n \setminus E) < 1/n$ . Θέτουμε

$$A = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n.$$

Τότε το  $A$  είναι  $G_\delta$ ,  $E \subset A$  και

$$\mu^*(A \setminus E) \leq \mu^*(G_n \setminus E) < \frac{1}{n}$$

για κάθε  $n$ . Άρα  $\mu^*(A \setminus E) = 0$ .

- (3)  $\Rightarrow$  (1) Έχουμε  $E = A \setminus (A \setminus E)$ . Το  $A$  είναι μετρήσιμο διότι είναι  $G_\delta$ , άρα Borel. Το  $A \setminus E$  είναι επίσης μετρήσιμο διότι έχει μηδενικό εξωτερικό μέτρο. Άρα το  $E$  είναι μετρήσιμο. □

Το προηγούμενο θεώρημα λέει ότι κάθε μετρήσιμο σύνολο μπορεί να προσεγγιστεί (ως προς το μέτρο) από ανοιχτά υπερσύνολά του. Η ιδιότητα αυτή ονομάζεται κανονικότητα. Στο επόμενο θεώρημα βλέπουμε μια ισχυρότερη μορφή κανονικότητας : Κάθε μετρήσιμο σύνολο με πεπερασμένο μέτρο είναι «περίπου ίσο» με μια πεπερασμένη ένωση ξένων ανά δύο διαστημάτων.

**Θεώρημα.** Έστω  $E$  μετρήσιμο με πεπερασμένο μέτρο. Τότε για κάθε  $\varepsilon > 0$ , υπάρχουν ξένα ανά δύο ανοιχτά και φραγμένα διαστήματα  $I_1, I_2, \dots, I_n$ , τέτοια ώστε

$$\mu\left(E \Delta \bigcup_{k=1}^n I_k\right) < \varepsilon.$$

Απόδειξη. Χρησιμοποιώντας το προηγούμενο θεώρημα, βρίσκουμε  $G$  ανοιχτό με  $E \subset G$  και  $\mu(G \setminus E) < \varepsilon$ . Γράφουμε τώρα το  $G$  σαν αριθμήσιμη ένωση ξένων ανά δύο ανοιχτών διαστημάτων  $I_k$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . Το  $G$  έχει πεπερασμένο μέτρο, άρα

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu(I_k) = \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} I_k\right) = \mu(G) < \infty.$$

Επομένως υπάρχει  $n$  τέτοιο ώστε

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \mu(I_k) < \varepsilon.$$

Άρα

$$\begin{aligned}\mu\left(E \triangle \bigcup_{k=1}^n I_k\right) &= \mu\left(E \setminus \bigcup_{k=1}^n I_k\right) + \mu\left(\bigcup_{k=1}^n I_k \setminus E\right) \leq \mu\left(G \setminus \bigcup_{k=1}^n I_k\right) + \mu(G \setminus E) \\ &= \mu\left(\bigcup_{k=n+1}^{\infty} I_k\right) + \mu(G \setminus E) = \sum_{k=n+1}^{\infty} \mu(I_k) + \mu(G \setminus E) < 2\varepsilon.\end{aligned}$$

□

#### ΑΣΚΗΣΕΙΣ

- (1) Έστω  $E \subset \mathbb{R}$ . Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα.
- (α) Το  $E$  είναι μετρήσιμο.
  - (β) Για κάθε  $\varepsilon > 0$  υπάρχει  $F$  κλειστό με  $F \subset E$  και  $\mu^*(E \setminus F) < \varepsilon$ .
  - (γ) Υπάρχει ένα  $F_\sigma$  σύνολο  $B$  με  $B \subset E$  και  $\mu^*(E \setminus B) = 0$ .
- (2) Έστω  $E \subset \mathbb{R}$  μετρήσιμο. Δείξτε ότι

$$\mu(E) = \sup\{\mu(K) : K \subset E, K \text{ συμπαγές}\}.$$

#### 4. Μετρήσιμες συναρτήσεις

Από τώρα και στο εξής, θα επιτρέπουμε στις διάφορες συναρτήσεις να παίρνουν τις τιμές  $\pm\infty$ , κάνοντας τη σύμβαση  $0 \cdot (\pm\infty) = 0$ . Ο λόγος για την «αυθαιρεσία» αυτή θα φανεί όταν ορίσουμε το ολοκλήρωμα Lebesgue. Επίσης, αν οι  $f, g$  είναι συναρτήσεις και το  $a$  κάποιος αριθμός (ή  $\pm\infty$ ) θα χρησιμοποιούμε συμβολισμούς όπως

$$\{f > a\}, \{f = a\}, \{f \leq g\}, \dots$$

για τα σύνολα

$$\{x : f(x) > a\}, \{x : f(x) = a\}, \{x : f(x) \leq g(x)\}, \dots$$

Σε αναλογία με τον ορισμό της συνέχειας, έχουμε το ακόλουθο.

**Ορισμός.** Μια συνάρτηση  $f : E \rightarrow [-\infty, +\infty]$ ,  $E \in \mathcal{M}$ , ονομάζεται *μετρήσιμη*, αν το σύνολο  $\{f > a\}$  είναι μετρήσιμο για κάθε  $a \in \mathbb{R}$ .

**Θεώρημα.** Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα.

- (1) Η  $f$  είναι μετρήσιμη.
- (2) Για κάθε  $a$ , το  $\{f \geq a\}$  είναι μετρήσιμο.
- (3) Για κάθε  $a$ , το  $\{f < a\}$  είναι μετρήσιμο.
- (4) Για κάθε  $a$ , το  $\{f \leq a\}$  είναι μετρήσιμο.

*Απόδειξη.* Έστω  $E \in \mathcal{M}$  το πεδίο ορισμού της  $f$ .

$$(1) \Rightarrow (2) \quad \{f \geq a\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left\{ f > a - \frac{1}{n} \right\}.$$

$$(2) \Rightarrow (3) \quad \{f < a\} = E \setminus \{f \geq a\}.$$

$$(3) \Rightarrow (4) \quad \{f \leq a\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left\{ f < a + \frac{1}{n} \right\}.$$

$$(4) \Rightarrow (1) \quad \{f > a\} = E \setminus \{f \leq a\}.$$

□

**Θεώρημα.** Έστω  $c \in \mathbb{R}$  και  $f, g$  πραγματικές (με πεδίο τιμών το  $\mathbb{R}$ ), μετρήσιμες, με κοινό πεδίο ορισμού. Τότε οι  $f + c$ ,  $cf$ ,  $f + g$ ,  $fg$  είναι μετρήσιμες.

*Απόδειξη.*

- $\{f + c > a\} = \{f > a - c\}$ , άρα η  $f + c$  είναι μετρήσιμη.
- Αν  $c > 0$ , τότε  $\{cf > a\} = \left\{ f > \frac{a}{c} \right\}$ , άρα  $cf$  μετρήσιμη από τον ορισμό.  
Αν  $c = 0$ , τότε  $cf = 0$ , άρα  $cf$  μετρήσιμη από την άσκηση 2.  
Αν  $c < 0$ , τότε  $\{cf > a\} = \left\{ f < \frac{a}{c} \right\}$ , άρα  $cf$  μετρήσιμη από το προηγούμενο θεώρημα.
- $\{f + g > a\} = \{f > a - g\} = \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} \{f > r > a - g\} = \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} (\{f > r\} \cap \{g > a - r\})$ , το οποίο είναι μετρήσιμο σαν αριθμήσιμη ένωση μετρήσιμων συνόλων. Άρα η  $f + g$  είναι μετρήσιμη.
- Έχουμε ότι

$$fg = \frac{1}{4}[(f + g)^2 - (f - g)^2],$$

άρα αρκεί να δείξουμε ότι αν μια συνάρτηση  $h$  είναι μετρήσιμη, τότε και η  $h^2$  είναι μετρήσιμη. Πράγματι

$$\{h^2 > a\} = \begin{cases} \mathbb{R}, & \text{αν } a < 0 \\ \{h > \sqrt{a}\} \cup \{h < -\sqrt{a}\}, & \text{αν } a \geq 0 \end{cases},$$

και το συμπέρασμα έπεται.

□

Το προηγούμενο θεώρημα εξακολουθεί να ισχύει αν επιτρέψουμε στις  $f$  και  $g$  να παίρνουν τις τιμές  $\pm\infty$ . Η μόνη διαφορά είναι ότι η  $f + g$  δεν ορίζεται στα σημεία όπου, για παράδειγμα,  $f = +\infty$ ,  $g = -\infty$ .

**Θεώρημα.** Έστω  $f_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , μια ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων με κοινό πεδίο ορισμού. Τότε

- (1)  $\sup f_n$  μετρήσιμη.
- (2)  $\inf f_n$  μετρήσιμη.
- (3)  $\limsup f_n$  μετρήσιμη.
- (4)  $\liminf f_n$  μετρήσιμη.

Απόδειξη.

- (1)  $\{\sup f_n > a\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{f_n > a\}$ .
- (2)  $\inf f_n = -\sup(-f_n)$ , και το συμπέρασμα έπεται από το (1).
- (3)  $\limsup f_n = \inf_n \left( \sup_{k \geq n} f_k \right)$ , και το συμπέρασμα έπεται από τα (1) και (2).
- (4)  $\liminf f_n = \sup_n \left( \inf_{k \geq n} f_k \right)$ , και το συμπέρασμα έπεται από τα (1) και (2).

□

**Ορισμός.** Αν μια ιδιότητα ισχύει παντού εκτός από ένα σύνολο μέτρου μηδέν, τότε λέμε ότι η ιδιότητα αυτή ισχύει σχεδόν παντού.

Για παράδειγμα η χαρακτηριστική συνάρτηση των ρητών είναι σχεδόν παντού ίση με μηδέν, διότι το σύνολο των ρητών αριθμών έχει μέτρο μηδέν.

**Θεώρημα.** Έστω  $f, g$  δυο συναρτήσεις με κοινό πεδίο ορισμού. Αν η  $f$  είναι μετρήσιμη και  $f = g$  σχεδόν παντού, τότε και η  $g$  είναι μετρήσιμη.

Απόδειξη. Έχουμε

$$\{g > a\} = (\{g > a\} \cap \{f = g\}) \cup (\{g > a\} \cap \{f \neq g\}) = (\{f > a\} \cap \{f = g\}) \cup (\{g > a\} \cap \{f \neq g\}).$$

Στην παραπάνω έκφραση, το  $\{f > a\}$  είναι μετρήσιμο από υπόθεση. Το  $\{f \neq g\}$  είναι μετρήσιμο διότι έχει μηδενικό μέτρο από υπόθεση. Άρα και το  $\{f = g\} = E \setminus \{f \neq g\}$  είναι μετρήσιμο, όπου  $E$  το κοινό πεδίο ορισμού των  $f, g$ . Τέλος, το  $\{g > a\} \cap \{f \neq g\}$  είναι μετρήσιμο διότι σαν υποσύνολο συνόλου με μηδενικό μέτρο, έχει κι' αυτό μηδενικό μέτρο. Άρα το  $\{g > a\}$  είναι μετρήσιμο. □

#### ΑΣΚΗΣΕΙΣ

- (1) Έστω  $f$  μετρήσιμη. Δείξτε ότι το σύνολο  $\{f = a\}$  είναι μετρήσιμο για κάθε  $a \in [-\infty, +\infty]$ .
- (2) Δείξτε ότι οι σταθερές συναρτήσεις είναι μετρήσιμες.
- (3) Δείξτε ότι η χαρακτηριστική συνάρτηση ενός συνόλου είναι μετρήσιμη αν και μόνο αν το σύνολο είναι μετρήσιμο.
- (4) Δείξτε ότι κάθε συνεχής συνάρτηση είναι μετρήσιμη.
- (5) Δείξτε ότι κάθε μονότονη συνάρτηση είναι μετρήσιμη.
- (6) Έστω  $f_n$  μια ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων (με κοινό πεδίο ορισμού), η οποία συγκλίνει κατά σημείο σχεδόν παντού σε μια συνάρτηση  $f$ . Δείξτε ότι η  $f$  είναι μετρήσιμη.
- (7) Δείξτε ότι το σύνολο των σημείων για τα οποία το όριο μιας ακολουθίας μετρήσιμων συναρτήσεων υπάρχει, είναι μετρήσιμο.
- (8) Δείξτε ότι αν η  $f$  είναι μετρήσιμη και το  $B$  είναι ένα σύνολο Borel τότε το  $f^{-1}(B)$  είναι μετρήσιμο.
- (9) Έστω  $f$  μετρήσιμη, τέτοια ώστε  $\mu(\{|f| < +\infty\}) > 0$ . Δείξτε ότι υπάρχει σύνολο θετικού μέτρου πάνω στο οποίο η  $f$  είναι φραγμένη.
- (10) Δείξτε ότι η παράγωγος μιας παραγωγίσιμης συνάρτησης είναι μετρήσιμη.
- (11) Έστω  $f$  συνεχής και  $g$  μετρήσιμη. Δείξτε ότι η σύνθεση  $f \circ g$  είναι μετρήσιμη.

## 5. Το σύνολο και η συνάρτηση Cantor

Κάθε αριθμήσιμο σύνολο έχει μέτρο μηδέν. Το αντίστροφο δεν ισχύει. Θα δείξουμε ότι υπάρχει υπερ-αριθμήσιμο συμπαγές σύνολο με μηδενικό μέτρο. Η κατασκευή γίνεται σε διαδοχικά βήματα και είναι η ακόλουθη.

Στο πρώτο βήμα χωρίζουμε το διάστημα  $I = [0, 1]$  σε τρία διαδοχικά διαστήματα ίσου μήκους.

$$I = [0, 1] = \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right].$$

Πετάμε έξω το μεσαίο, και έτσι από το  $I$  μένουν 2 ξένα κλειστά διαστήματα μήκους  $1/3$ . Τα ονομάζουμε  $I_0, I_1$  και θέτουμε

$$C_1 = \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right] = I_0 \cup I_1.$$

Δηλαδή το  $I$  παράγει ένα «αριστερό» διάστημα  $I_0$ , και ένα «δεξί» διάστημα  $I_1$ .

Στο δεύτερο βήμα, κάνουμε το ίδιο στα διαστήματα  $I_0, I_1$ . Τα χωρίζουμε στα τρία

$$I_0 = \left[0, \frac{1}{3}\right] = \left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right) \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right],$$

$$I_1 = \left[\frac{2}{3}, 1\right] = \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right] \cup \left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right) \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right],$$

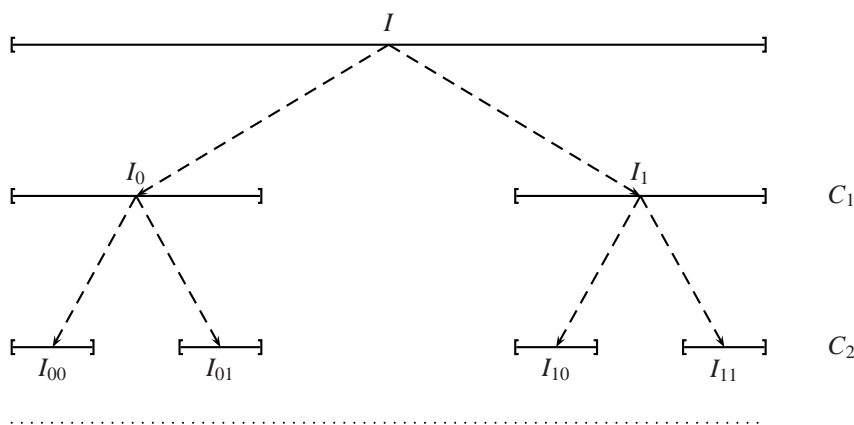
και πετάμε έξω τα μεσαία. Από το  $I$  έχουν μείνει τώρα 4 ξένα κλειστά διαστήματα μήκους  $1/9$ , τα οποία ονομάζουμε  $I_{00}, I_{01}, I_{10}, I_{11}$ . Θέτουμε

$$C_2 = \left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right] = I_{00} \cup I_{01} \cup I_{10} \cup I_{11}.$$

Όπως και στο προηγούμενο βήμα, το  $I_0$  παράγει ένα αριστερό διάστημα  $I_{00}$ , και ένα δεξί διάστημα  $I_{01}$ . Ομοίως και το  $I_1$ .

Συνεχίζουμε με τον ίδιο τρόπο. Στο  $n$  βήμα, από το  $I$  έχουν μείνει  $2^n$  ξένα κλειστά διαστήματα μήκους  $1/3^n$ . Τα ονομάζουμε  $I_{d_1 \dots d_n}$ ,  $d_1, \dots, d_n \in \{0, 1\}$ , κάνοντας τη σύμβαση ότι κάθε διάστημα  $I_{d_1 \dots d_{n-1}}$  του προηγούμενου βήματος παράγει το αριστερό  $I_{d_1 \dots d_{n-1}0}$  και το δεξί  $I_{d_1 \dots d_{n-1}1}$ . Θέτουμε

$$C_n = \bigcup_{d_1, \dots, d_n \in \{0,1\}} I_{d_1 \dots d_n}.$$



Η  $C_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , είναι μια φθίνουσα ακολουθία συμπαγών συνόλων, επομένως η τομή τους είναι μη κενή. Θέτουμε

$$(\star) \quad C = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left[ \bigcup_{d_1, \dots, d_n \in \{0,1\}} I_{d_1 \dots d_n} \right] = \bigcup_{s \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}} \left[ \bigcap_{n=1}^{\infty} I_{s(1) \dots s(n)} \right],$$

όπου  $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$  είναι το σύνολο όλων των ακολουθιών οι όροι των οποίων είναι 0 ή 1. Το  $C$  είναι συμπαγές και ονομάζεται σύνολο Cantor. Παρατηρούμε ότι για κάθε  $s \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ , η  $I_{s(1)\dots s(n)}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , είναι μια φθίνουσα ακολουθία κλειστών διαστημάτων, το μήκος των οποίων τείνει στο μηδέν. Άρα η τομή

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} I_{s(1)\dots s(n)}$$

είναι μονοσύνολο. Έτσι το  $C$  είναι η ένωση όλων αυτών των μονοσυνόλων. Επίσης αν  $s, t \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$  με  $s \neq t$ , τότε

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} I_{s(1)\dots s(n)} \cap \bigcap_{n=1}^{\infty} I_{t(1)\dots t(n)} = \emptyset.$$

Αυτό σημαίνει ότι το  $C$  έρχεται σε 1-1 αντιστοιχία με το  $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ , το οποίο γνωρίζουμε ότι είναι υπεραριθμήσιμο. Μένει να δείξουμε ότι το  $C$  έχει μέτρο 0. Πράγματι, το  $C_n$  αποτελείται από  $2^n$  ξένα διαστήματα μήκους  $1/3^n$ , άρα  $\mu(C_n) = (2/3)^n$ . Επομένως  $\mu(C) = \lim \mu(C_n) = 0$ .

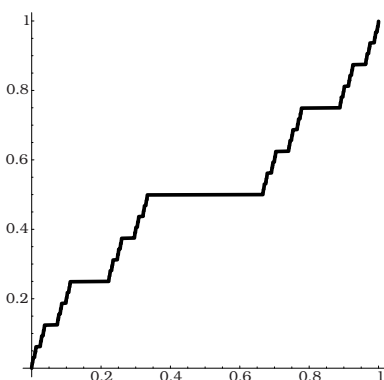
Θα χρησιμοποιήσουμε τώρα το σύνολο Cantor για να ορίσουμε μια «παθολογική» αύξουσα, συνεχή και επί συνάρτηση  $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ .

Έστω  $J_i^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $i = 1, 2, \dots, 2^{n-1}$ , τα ανοιχτά διαστήματα που αφαιρούμε στο  $n$  βήμα της κατασκευής του συνόλου Cantor. Υποθέτουμε ότι τα διαστήματα αυτά έχουν αριθμηθεί με τέτοιο τρόπο έτσι ώστε το  $J_i^n$  να βρίσκεται αριστερά του  $J_{i+1}^n$ . Αν  $x \in [0, 1] \setminus C$ , δηλαδή αν το  $x$  ανήκει σε κάποιο  $J_i^n$ , τότε θέτουμε

$$f(x) = \frac{2i-1}{2^n}.$$

Για τα υπόλοιπα  $x$  θέτουμε

$$f(x) = \sup\{f(y) : y \in [0, 1] \setminus C, y < x\}, \quad f(0) = 0.$$



Έτσι η  $f$  είναι σταθερή σε κάθε ένα από τα ανοιχτά διαστήματα που αποτελούν το συμπλήρωμα του  $C$  στο  $[0, 1]$ . Η  $f$  ονομάζεται συνάρτηση του Cantor. Μπορεί κανείς να δει ότι είναι αύξουσα, συνεχής και επί. Η συνάρτηση αυτή θα χρησιμοποιηθεί παρακάτω για να ορίσουμε ένα μετρήσιμο σύνολο το οποίο δεν είναι Borel.

#### ΑΣΚΗΣΕΙΣ

- (1) Αποδείξτε την τρίτη ισότητα στη σχέση (\*).
- (2) Αν δεν το γνωρίζετε, δείξτε ότι το σύνολο  $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$  είναι υπεραριθμήσιμο. (Υπόδειξη: Υποθέστε ότι  $\{0, 1\}^{\mathbb{N}} = \{s_n : n \in \mathbb{N}\}$  και θεωρήστε την ακολουθία  $s = (1 - s_1(1), 1 - s_2(2), 1 - s_3(3), \dots)$ .)
- (3) Δείξτε ότι το  $C$  δεν έχει μεμονωμένα σημεία.
- (4) Δείξτε ότι κάθε κλειστό σύνολο χωρίς μεμονωμένα σημεία είναι υπεραριθμήσιμο. (Υπόδειξη: Ένα τέτοιο σύνολο περιέχει ένα σύνολο «τύπου» Cantor.)
- (5) Δείξτε ότι η συνάρτηση του Cantor είναι συνεχής. (Υπόδειξη: Το σύνολο  $f([0, 1] \setminus C)$  αποτελείται από όλους τους δυαδικούς ρητούς, άρα είναι πυκνό στο  $[0, 1]$ . Τώρα, τί είδους ασυνέχειες μπορεί να έχει μια αύξουσα συνάρτηση;)



- (6) Δείξτε ότι η συνάρτηση του Cantor είναι σχεδόν παντού παραγωγίσιμη, και ότι η παράγωγός της είναι σχεδόν παντού μηδέν.

## 6. Το θεώρημα Steinhaus και κάποιες εφαρμογές του

Το ακόλουθο θεώρημα είναι το βασικό αποτέλεσμα αυτής της ενότητας και λέει ότι τα σημεία ενός συνόλου με θετικό μέτρο υλοποιούν όλες τις δυνατές αποστάσεις σε κάποιο διάστημα.

**Θεώρημα (Steinhaus).** Έστω  $E \subset \mathbb{R}$  μετρήσιμο με θετικό μέτρο. Τότε υπάρχει  $\delta > 0$  τέτοιο ώστε

$$(-\delta, \delta) \subset E - E = \{a - b : a, b \in E\}.$$

*Απόδειξη.* Από την άσκηση 2 της ενότητας 3, υπάρχει  $K \subset E$  συμπαγές με  $\mu(K) > 0$ . Από την κανονικότητα του μέτρου Lebesgue, υπάρχει  $G \supset K$  ανοιχτό με  $\mu(G) < 2\mu(K)$ . Τα  $K$  και  $G^c$  είναι ξένα, το  $K$  συμπαγές και το  $G^c$  κλειστό, άρα έχουν θετική απόσταση, ας πούμε  $\delta > 0$ . Επομένως  $K + x \subset G$  για κάθε  $|x| < \delta$ . Πράγματι, αν υπήρχε  $y \in K$  τέτοιο ώστε  $y + x \notin G$ , τότε

$$\delta \leq |y - (y + x)| = |x| < \delta,$$

άτοπο. Παρατηρούμε τώρα ότι  $K \cap (K + x) \neq \emptyset$  για κάθε  $|x| < \delta$ . Διαφορετικά για κάποιο  $x$  θα είχαμε

$$2\mu(K) = \mu(K) + \mu(K + x) = \mu(K \cup (K + x)) \leq \mu(G),$$

το οποίο είναι άτοπο. Επομένως  $E \cap (E + x) \neq \emptyset$  για κάθε  $|x| < \delta$ , το οποίο είναι ισοδύναμο με το ότι  $(-\delta, \delta) \subset E - E$ .  $\square$

Όλα τα υπόλοιπα αποτελέσματα αυτής της ενότητας είναι εφαρμογές του θεωρήματος Steinhaus

**Θεώρημα (Vitali).** Κάθε σύνολο θετικού μέτρου περιέχει ένα μη μετρήσιμο σύνολο.

*Απόδειξη.* Για κάθε  $x, y \in \mathbb{R}$  λέμε ότι το  $x$  είναι ισοδύναμο με το  $y$  και γράφουμε  $x \sim y$ , αν  $x - y \in \mathbb{Q}$ . Εύκολα ελέγχουμε ότι η  $\sim$  είναι πράγματι μια σχέση ισοδυναμίας. Δηλαδή για κάθε  $x, y, z$  έχουμε

- $x \sim x$ .
- $x \sim y \Leftrightarrow y \sim x$ .
- $(x \sim y \ \& \ y \sim z) \Rightarrow x \sim z$ .

Έτσι το  $\mathbb{R}$  διαμερίζεται σε μια οικογένεια ξένων ανά δύο κλάσεων ισοδυναμίας  $\{E_\alpha : \alpha \in I\}$ .

$$\mathbb{R} = \bigcup_{\alpha \in I} E_\alpha.$$

Παρατηρήστε ότι τα  $E_\alpha$  είναι της μορφής  $x + \mathbb{Q}$ , επομένως το  $I$  πρέπει να είναι υπεραριθμήσιμο. Χρησιμοποιώντας το Αξίωμα της Επιλογής, μπορούμε να επιλέξουμε ακριβώς ένα στοιχείο  $x_\alpha$  από κάθε  $E_\alpha$  και να σχηματίσουμε το σύνολο  $V = \{x_\alpha : \alpha \in I\}$ . Τότε

$$\mathbb{R} = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} (q + V).$$

Έστω τώρα ότι υπήρχε κάποιο  $A \in \mathcal{M}$  με θετικό μέτρο τέτοιο ώστε κάθε υποσύνολό του να είναι μετρήσιμο. Αφού

$$A = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} [(q + V) \cap A],$$

υπάρχει  $q \in \mathbb{Q}$  τέτοιο ώστε  $\mu((q + V) \cap A) > 0$ . Από το θεώρημα Steinhaus υπάρχει  $\delta > 0$  τέτοιο ώστε

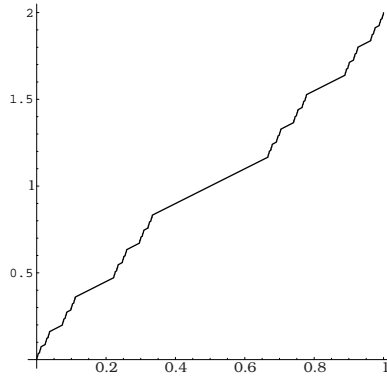
$$(-\delta, \delta) \subset ((q + V) \cap A) - ((q + V) \cap A) \subset (q + V) - (q + V) = V - V.$$

Επιλέγουμε τώρα ένα μη μηδενικό ρητό  $r \in (-\delta, \delta)$ . Τότε  $r = x_\alpha - x_\beta$  για κάποια  $\alpha, \beta \in I$  με  $\alpha \neq \beta$ . Δηλαδή  $x_\alpha \sim x_\beta$ . Αυτό σημαίνει ότι τα  $x_\alpha, x_\beta$  ανήκουν στην ίδια κλάση ισοδυναμίας, άτοπο.  $\square$

Υπάρχουν και άλλες «κατασκευές» μη μετρήσιμων συνόλων. Όλες χρησιμοποιούν με ουσιαστικό τρόπο το Αξίωμα της Επιλογής.

**Θεώρημα.** Υπάρχει μετρήσιμο σύνολο το οποίο δεν είναι Borel. Δηλαδή  $\mathcal{B} \subsetneq \mathcal{M}$ .

*Απόδειξη.* Έστω  $C$  το σύνολο Cantor και  $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  η συνάρτηση Cantor. Θεωρούμε τη συνάρτηση  $g : [0, 1] \rightarrow [0, 2]$  με  $g(x) = f(x) + x$ .



Η  $g$  είναι συνεχής, γνήσια αύξουσα και επί. Ισχυριζόμαστε ότι το  $g(C)$  έχει θετικό μέτρο. Πράγματι, έστω  $J_n = (a_n, b_n)$  τα ζένα ανά δύο διαστήματα που αποτελούν το συμπλήρωμα του  $C$  στο  $[0, 1]$ . Η  $g$  είναι συνεχής και αύξουσα, άρα το  $g(J_n)$  είναι διάστημα με άκρα  $g(a_n)$  και  $g(b_n)$ . Συνεπώς,  $\mu(g(J_n)) = f(b_n) - f(a_n) + b_n - a_n$ . Αλλά η  $f$  είναι σταθερή στο  $(a_n, b_n)$ , άρα  $f(a_n) = f(b_n)$ . Επομένως  $\mu(g(J_n)) = b_n - a_n = \mu(J_n)$ . Άρα

$$\begin{aligned} \mu(g(C)) &= 2 - \mu(g([0, 1] \setminus C)) = 2 - \mu\left(g\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} J_n\right)\right) \\ &= 2 - \sum_{n=1}^{\infty} \mu(g(J_n)) = 2 - \sum_{n=1}^{\infty} \mu(J_n) = 2 - \mu([0, 1] \setminus C) = 1. \end{aligned}$$

Αφού το  $g(C)$  έχει θετικό μέτρο, περιέχει ένα μη μετρήσιμο σύνολο  $A$ . Θέτουμε τώρα  $h = g^{-1}$ . Το  $h(A) = g^{-1}(A) \subset C$  είναι μετρήσιμο διότι είναι υποσύνολο συνόλου με μηδενικό μέτρο. Το  $h(A)$  δεν είναι Borel διότι αν ήταν, τότε από την άσκηση 8 της ενότητας 4, το  $A = h^{-1}(h(A))$  θα ήταν μετρήσιμο.  $\square$

Η ύπαρξη μετρήσιμων συνόλων τα οποία δεν είναι Borel μπορεί να αποδειχτεί, έμμεσα, ως εξής (αν δεν ξέρετε θεωρία συνόλων αγνοήστε αυτήν την παράγραφο). Χρησιμοποιώντας υπερπεπερασμένη επαγωγή, αποδεικνύεται ότι ο πληθάριθμος της  $\mathcal{B}$  είναι  $2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$ . Απ' την άλλη, το σύνολο Cantor έχει πληθάριθμο  $\mathfrak{c}$  και μέτρο 0. Άρα όλα του τα υποσύνολα ( $2^{\mathfrak{c}}$  το πλήθος) είναι μετρήσιμα. Συνεπώς η  $\mathcal{M}$  έχει πληθάριθμο  $2^{\mathfrak{c}}$ . Αφού  $\mathfrak{c} < 2^{\mathfrak{c}}$ , συμπεραίνουμε ότι υπάρχουν μετρήσιμα μη-Borel σύνολα. Στην πραγματικότητα, το επιχείρημα αυτό δείχνει ότι «τα περισσότερα» μετρήσιμα σύνολα δεν είναι Borel (με την ίδια έννοια, «οι περισσότεροι» πραγματικοί αριθμοί δεν είναι ρητοί).

Η τελευταία εφαρμογή του θεωρήματος Steinhaus είναι μάλλον αναπάντεχη και αφορά τις λύσεις της συναρτησιακής εξίσωσης  $f(x+y) = f(x) + f(y)$ .

**Θεώρημα.** Έστω  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  μετρήσιμη τέτοια ώστε  $f(x+y) = f(x) + f(y)$  για κάθε  $x, y \in \mathbb{R}$ . Τότε υπάρχει  $c \in \mathbb{R}$  έτσι ώστε  $f(x) = cx$ .

*Απόδειξη.* Για κάθε  $m, n \in \mathbb{N}$  έχουμε

$$\begin{aligned} nf\left(\frac{m}{n}\right) &= \underbrace{f\left(\frac{m}{n}\right) + \cdots + f\left(\frac{m}{n}\right)}_{n \text{ φορές}} = f\left(\underbrace{\frac{m}{n} + \cdots + \frac{m}{n}}_{n \text{ φορές}}\right) = f(m) \\ &= \underbrace{f(1 + \cdots + 1)}_{m \text{ φορές}} = \underbrace{f(1) + \cdots + f(1)}_{m \text{ φορές}} = mf(1). \end{aligned}$$

Δηλαδή  $f(m/n) = f(1)m/n$  για  $m, n$  φυσικούς. Προφανώς  $f(-x) = -f(x)$  άρα η προηγούμενη σχέση ισχύει και για  $m$  ακέραιο, το οποίο σημαίνει ότι  $f(x) = xf(1)$  για κάθε  $x \in \mathbb{Q}$ . Παρατηρήστε τώρα ότι

$$\mathbb{R} = \bigcup_{M=1}^{\infty} \{|f| \leq M\},$$

άρα υπάρχει  $M$  τέτοιο ώστε το σύνολο  $A = \{|f| \leq M\}$  να έχει θετικό μέτρο. Επομένως από το θεώρημα Steinhaus, υπάρχει  $\delta > 0$  τέτοιο ώστε  $(-\delta, \delta) \subset A - A$ . Έστω τώρα  $x \in \mathbb{R}$ . Για κάθε  $n \in \mathbb{N}$  επιλέγουμε ένα ρητό  $r_n$  έτσι ώστε

$|x - r_n| < \delta/n$ . Αυτό σημαίνει ότι  $|n(x - r_n)| < \delta$ , άρα  $n(x - r_n) \in A - A$ . Συνεπώς  $n(x - r_n) = a_n - b_n$  για κάποια  $a_n, b_n \in A$ . Έτσι από τον ορισμό του  $A$ , έχουμε ότι

$$|f(n(x - r_n))| = |f(a_n - b_n)| = |f(a_n) - f(b_n)| \leq |f(a_n)| + |f(b_n)| \leq 2M.$$

Άρα  $|f(x - r_n)| \leq 2M/n$ . Και έτσι παίρνουμε

$$\begin{aligned} |f(x) - xf(1)| &= |f(x) - r_n f(1) + r_n f(1) - xf(1)| = |f(x) - f(r_n) + (r_n - x)f(1)| \\ &= |f(x - r_n) + (r_n - x)f(1)| \leq |f(x - r_n)| + |x - r_n||f(1)| \leq \frac{2M}{n} + \frac{\delta|f(1)|}{n}. \end{aligned}$$

Η παραπάνω σχέση ισχύει για κάθε  $n$ , άρα  $f(x) = xf(1)$ . □

Σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα, οι μοναδικές μετρήσιμες λύσεις της  $f(x + y) = f(x) + f(y)$  είναι οι γραμμικές συναρτήσεις. Αν κανείς υποθέσει ότι η  $f$  είναι συνεχής (και όχι απλώς μετρήσιμη) τότε η απόδειξη είναι μια εύκολη άσκηση απειροστικού λογισμού. Απ' την άλλη αποδεικνύεται ότι υπάρχουν μη μετρήσιμες συναρτήσεις οι οποίες ικανοποιούν την  $f(x + y) = f(x) + f(y)$  (άσκηση 5).

#### ΑΣΚΗΣΕΙΣ

- (1) Βρείτε τα σύνολα  $\mathbb{N} - \mathbb{N}$ ,  $\mathbb{Q} - \mathbb{Q}$  και  $(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) - (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ .
- (2) Προσπαθήστε να υπολογίσετε (ή να μαντέψετε) το σύνολο  $C - C$ , όπου  $C$  το σύνολο Cantor. Τί παρατηρείτε;
- (3) Γιατί χρειάζεται το Αξίωμα της Επιλογής στην απόδειξη του θεωρήματος Vitali;
- (4) Θεωρούμε το  $\mathbb{R}$  σαν διανυσματικό χώρο επί του  $\mathbb{Q}$ , και έστω  $B$  μια βάση του. Επιλέγουμε  $\beta_0 \in B$  και θέτουμε  $A = \langle B \setminus \{\beta_0\} \rangle$  (το σύνολο όλων των γραμμικών συνδυασμών στοιχείων του  $B \setminus \{\beta_0\}$ ). Δείξτε ότι το  $A$  δεν είναι μετρήσιμο. (Υπόδειξη: Παρατηρήστε ότι

$$\mathbb{R} = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} (q\beta_0 + A),$$

άρα κάποιο από τα σύνολα της ένωσης αυτής πρέπει να έχει θετικό μέτρο. Χρησιμοποιήστε τώρα το θεώρημα Steinhaus.)

- (5) Δείξτε ότι η  $f(x + y) = f(x) + f(y)$  έχει μη μετρήσιμες λύσεις. (Υπόδειξη: Θεωρήστε, όπως στην προηγούμενη άσκηση, το  $\mathbb{R}$  σαν διανυσματικό χώρο επί του  $\mathbb{Q}$ . Αν  $B$  είναι μια βάση του, ορίστε την  $f$  αρχικά πάνω στη  $B$  με κατάλληλο τρόπο. Στη συνέχεια επεκτείνετε την  $f$  σ' ολόκληρο το  $\mathbb{R}$ ).

## 7. Το ολοκλήρωμα Lebesgue μη αρνητικών συναρτήσεων

**Ορισμός.** Μια πραγματική, μετρήσιμη συνάρτηση η οποία παίρνει πεπερασμένο πλήθος τιμών, ονομάζεται απλή.

Παρατηρήστε ότι κάθε απλή συνάρτηση  $\varphi$  είναι γραμμικός συνδυασμός χαρακτηριστικών συναρτήσεων μετρήσιμων συνόλων. Πράγματι, αν  $a_1, a_2, \dots, a_n$  είναι οι διακεκριμένες τιμές της  $\varphi$  και θέσουμε

$$A_i = \{\varphi = a_i\},$$

τότε

$$\varphi = \sum_{i=1}^n a_i \chi_{A_i}.$$

Η παραπάνω έκφραση ονομάζεται κανονική αναπαράσταση της  $\varphi$ . Τα  $A_i$  είναι ανά δύο ξένα και καλύπτουν το  $\mathbb{R}$ . Αν επιπλέον,  $\varphi \geq 0$ , θέτουμε

$$I(\varphi) = \sum_{i=1}^n a_i \mu(A_i).$$

Διαισθητικά, η ποσότητα αυτή εκφράζει το εμβαδό ανάμεσα στη γραφική παράσταση της  $\varphi$  και τον άξονα  $x$  (μήκος βάσης =  $\mu(A_i)$ , ύψος =  $a_i$ ).

**Ορισμός.** Έστω  $f$  μη αρνητική, μετρήσιμη. Θέτουμε

$$\int f(x) dx = \int f = \sup\{I(\varphi) : \varphi \geq 0 \text{ απλή}, \varphi \leq f\}.$$

Το  $\int f$  ονομάζεται ολοκλήρωμα (Lebesgue) της  $f$ .

Αν το  $E$  είναι κάποιο μετρήσιμο σύνολο, τότε το ολοκλήρωμα της  $f$  πάνω στο  $E$  ορίζεται να είναι

$$\int_E f = \int f \chi_E.$$

Παρατηρήστε ότι  $\int_E dx = \mu(E)$ . Η γεωμετρική ερμηνεία του ολοκληρώματος είναι η ίδια με αυτήν της ποσότητας  $I$  παραπάνω.

**Θεώρημα.** Έστω  $\varphi \geq 0$  απλή. Τότε

$$\int \varphi = I(\varphi).$$

Απόδειξη. Αφού  $\varphi \leq \varphi$ , έχουμε

$$I(\varphi) \leq \int \varphi.$$

Αντίστροφα, έστω

$$\varphi = \sum_{i=1}^n a_i \chi_{A_i},$$

η κανονική αναπαράσταση της  $\varphi$ . Επιλέγουμε μια απλή συνάρτηση  $0 \leq \psi \leq \varphi$  με κανονική αναπαράσταση

$$\psi = \sum_{j=1}^m b_j \chi_{B_j}.$$

Τότε

$$I(\psi) = \sum_{j=1}^m b_j \mu(B_j) = \sum_{j=1}^m b_j \mu\left(\bigcup_{i=1}^n (B_j \cap A_i)\right) = \sum_{i,j} b_j \mu(B_j \cap A_i).$$

Στο παραπάνω άθροισμα, αν κάποιο  $\mu(B_j \cap A_i)$  είναι μη μηδενικό τότε τα  $B_j$  και  $A_i$  έχουν μη κενή τομή. Πάνω στο  $B_j$  η  $\psi$  παίρνει την τιμή  $b_j$ , πάνω στο  $A_i$  η  $\varphi$  παίρνει την τιμή  $a_i$ . Αφού  $\psi \leq \varphi$ , έχουμε ότι  $b_j \leq a_i$ , άρα

$$I(\psi) \leq \sum_{i=1}^n a_i \sum_{j=1}^m \mu(B_j \cap A_i) = \sum_{i=1}^n a_i \mu\left(\bigcup_{j=1}^m (B_j \cap A_i)\right) = \sum_{i=1}^n a_i \mu(A_i) = I(\varphi).$$

Παίρνοντας sup ως προς  $\psi$  στην παραπάνω σχέση, έχουμε

$$\int \varphi \leq I(\varphi).$$

□

Σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα μπορούμε να αγνοήσουμε το συμβολισμό  $I(\varphi)$  και να γράψουμε για  $f$  μη αρνητική, μετρήσιμη

$$\int f = \sup_{\substack{\varphi \geq 0 \\ \varphi \leq f}} \int \varphi.$$

**Θεώρημα.** Έστω  $\varphi, \psi \geq 0$  απλές. Τότε

$$(1) \int_E \varphi = \sum_{i=1}^n a_i \mu(A_i \cap E) \text{ για κάθε } E \in \mathcal{M} \text{ (τα } a_i \text{ και } A_i \text{ είναι όπως στην κανονική αναπαράσταση της } \varphi).$$

$$(2) \int_{A \cup B} \varphi = \int_A \varphi + \int_B \varphi \text{ για κάθε } A, B \in \mathcal{M} \text{ με } A \cap B = \emptyset.$$

$$(3) \int a\varphi = a \int \varphi \text{ για κάθε } a > 0.$$

$$(4) \int (\varphi + \psi) = \int \varphi + \int \psi.$$

Απόδειξη.

(1) Έχουμε

$$\varphi \chi_E = \sum_{i=1}^n a_i \chi_{A_i} \chi_E = \sum_{i=1}^n a_i \chi_{A_i \cap E}.$$

Άρα

$$\int_E \varphi = \int \varphi \chi_E = \sum_{i=1}^n a_i \mu(A_i \cap E).$$

(2) Χρησιμοποιώντας το (1) παίρνουμε

$$\int_{A \cup B} \varphi = \sum_{i=1}^n a_i \mu(A_i \cap (A \cup B)) = \sum_{i=1}^n a_i \mu(A_i \cap A) + \sum_{i=1}^n a_i \mu(A_i \cap B) = \int_A \varphi + \int_B \varphi.$$

(3) Η κανονική αναπαράσταση της  $a\varphi$  είναι προφανώς  $\sum_{i=1}^n aa_i \chi_{A_i}$ , άρα

$$\int a\varphi = \sum_{i=1}^n aa_i \mu(A_i) = a \sum_{i=1}^n a_i \mu(A_i) = a \int \varphi.$$

(4) Έστω

$$\psi = \sum_{j=1}^m b_j \chi_{B_j},$$

η κανονική αναπαράσταση της  $\psi$ . Τα σύνολα  $A_i \cap B_j$  είναι ανά δύο ξένα και καλύπτουν το  $\mathbb{R}$ . Επίσης, πάνω σε κάθε  $A_i \cap B_j$  (αν δεν είναι κενό), η  $\varphi + \psi$  παίρνει την τιμή  $a_i + b_j$ , έτσι χρησιμοποιώντας τα (1) και (2) παίρνουμε

$$\begin{aligned} \int (\varphi + \psi) &= \int_{\bigcup_{i,j} (A_i \cap B_j)} (\varphi + \psi) = \sum_{i,j} \int_{A_i \cap B_j} (\varphi + \psi) = \sum_{i,j} (a_i + b_j) \mu(A_i \cap B_j) \\ &= \sum_{i=1}^n a_i \sum_{j=1}^m \mu(A_i \cap B_j) + \sum_{j=1}^m b_j \sum_{i=1}^n \mu(A_i \cap B_j) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^n a_i \mu \left( \bigcup_{j=1}^m (A_i \cap B_j) \right) + \sum_{j=1}^m b_j \mu \left( \bigcup_{i=1}^n (A_i \cap B_j) \right) \\
&= \sum_{i=1}^n a_i \mu(A_i) + \sum_{j=1}^m b_j \mu(B_j) = \int \varphi + \int \psi.
\end{aligned}$$

□

**Θεώρημα.** Έστω  $f, g$  μη αρνητικές, μετρήσιμες. Τότε

- (1)  $f \leq g \Rightarrow \int f \leq \int g$ .
- (2) Αν  $a \geq 0$  τότε  $\int af = a \int f$ .
- (3) Αν  $A, B \in \mathcal{M}$  και  $A \subset B$  τότε  $\int_A f \leq \int_B f$ .

Απόδειξη.

(1)

$$\int f = \sup_{\substack{\varphi \geq 0 \text{ απλή} \\ \varphi \leq f}} \int \varphi \leq \sup_{\substack{\varphi \geq 0 \text{ απλή} \\ \varphi \leq g}} \int \varphi = \int g.$$

- (2) Αν  $a = 0$  τότε αυτό που θέλουμε να δείξουμε είναι προφανές. Αν  $a > 0$  τότε από το προηγούμενο θεώρημα έχουμε

$$\int af = \sup_{\substack{\varphi \geq 0 \text{ απλή} \\ \varphi \leq af}} \int \varphi = a \sup_{\substack{\varphi \geq 0 \text{ απλή} \\ a^{-1}\varphi \leq f}} \int a^{-1}\varphi = a \sup_{\substack{\psi \geq 0 \text{ απλή} \\ \psi \leq f}} \int \psi = a \int f.$$

- (3) Έχουμε  $f\chi_A \leq f\chi_B$  άρα από το (1)

$$\int_A f = \int f\chi_A \leq \int f\chi_B = \int_B f.$$

□

**Θεώρημα** (Λήμμα Fatou). Έστω  $f_n, n \in \mathbb{N}$ , μια ακολουθία μη αρνητικών, μετρήσιμων συναρτήσεων. Τότε

$$\int \liminf f_n \leq \liminf \int f_n.$$

Απόδειξη. Για κάθε  $n \in \mathbb{N}$  θέτουμε  $g_n = \inf_{k \geq n} f_k$ . Τότε η  $g_n$  είναι αύξουσα,  $g_n \leq f_n$  και  $\liminf f_n = \lim g_n$ . Αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε απλή  $\varphi$  με  $0 \leq \varphi \leq \liminf g_n$  έχουμε

$$\int \varphi \leq \liminf \int f_n.$$

Έστω λοιπόν μια τέτοια  $\varphi$ . Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις.

- (1)  $\int \varphi = \infty$ . Τότε υπάρχει  $a > 0$  τέτοιο ώστε το σύνολο  $A = \{\varphi > a\}$  να έχει άπειρο μέτρο. Θέτουμε

$$A_n = \{g_n > a\}.$$

Τότε η  $A_n$  είναι μια αύξουσα ακολουθία συνόλων και

$$A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Επομένως

$$\lim \mu(A_n) = \mu \left( \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) \geq \mu(A) = \infty.$$

Άρα

$$\int f_n \geq \int g_n \geq \int_{A_n} g_n \geq a\mu(A_n).$$

Παίρνοντας  $\liminf$  στην παραπάνω ανισότητα, έχουμε το ζητούμενο.

(2)  $\int \varphi < \infty$ . Τότε το σύνολο  $B = \{\varphi > 0\}$  έχει πεπερασμένο μέτρο. Έστω  $0 < \theta < 1$ . Θέτουμε

$$B_n = \{g_n > \theta\varphi\}, \quad M = \max \varphi.$$

Τότε η  $B_n$  είναι μια αύξουσα ακολουθία συνόλων και

$$B \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n.$$

Άρα η  $B \setminus B_n$  είναι φθίνουσα και

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} (B \setminus B_n) = \emptyset.$$

Αφού το  $B$  έχει πεπερασμένο μέτρο

$$\lim \mu(B \setminus B_n) = \mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} (B \setminus B_n)\right) = 0.$$

Άρα

$$\begin{aligned} \int f_n &\geq \int g_n \geq \int_{B_n} g_n \geq \theta \int_{B_n} \varphi = \theta \left[ \int_B \varphi - \int_{B \setminus B_n} \varphi \right] \\ &= \theta \int \varphi - \theta \int_{B \setminus B_n} \varphi \geq \theta \int \varphi - M\mu(B \setminus B_n). \end{aligned}$$

Παίρνοντας  $\liminf$  έχουμε

$$\liminf \int f_n \geq \theta \int \varphi.$$

Παίρνοντας όριο καθώς  $\theta \rightarrow 1^-$ , έχουμε το ζητούμενο. □

**Θεώρημα** (Το θεώρημα μονότονης σύγκλισης του Lebesgue). Έστω  $f_n$  μια αύξουσα ακολουθία μη αρνητικών μετρήσιμων συναρτήσεων. Τότε

$$\int \lim f_n = \lim \int f_n.$$

(Τα όρια υπάρχουν διότι η ακολουθία είναι αύξουσα.)

Απόδειξη. Θέτουμε  $f = \lim f_n$ . Τότε  $f_n \leq f$ , άρα  $\int f_n \leq \int f$ , επομένως  $\lim \int f_n \leq \int f = \int \lim f_n$ .

Από την άλλη, το λήμμα Fatou δίνει

$$\int \lim f_n = \int \liminf f_n \leq \liminf \int f_n = \lim \int f_n.$$

□

**Θεώρημα.** Έστω  $f$  μη αρνητική, μετρήσιμη. Τότε υπάρχει μια αύξουσα ακολουθία μη αρνητικών απλών συναρτήσεων  $\varphi_n$ , τέτοια ώστε  $\varphi_n(x) \rightarrow f(x)$  για κάθε  $x$ .

Απόδειξη. Για κάθε  $n$  θεωρούμε την ακόλουθη διαμέριση του πεδίου τιμών της  $f$ .

$$[0, \infty] = \bigcup_{k=1}^{n2^n} \left[ \frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n} \right) \cup [n, \infty],$$

και θέτουμε

$$E_k^n = \left\{ \frac{k-1}{2^n} \leq f < \frac{k}{2^n} \right\}, \quad k = 1, 2, \dots, n2^n, \quad F^n = \{f \geq n\}.$$



Ορίζουμε τώρα την  $\varphi_n$  ως εξής.

$$\varphi_n = \sum_{k=1}^{n2^n} \frac{k-1}{2^n} \chi_{E_k} + n \chi_{F^n}.$$

Η ακολουθία αυτή είναι αύξουσα διότι η διαμέριση που αντιστοιχεί στην  $\varphi_{n+1}$  είναι λεπτότερη από αυτήν που αντιστοιχεί στην  $\varphi_n$ . Επίσης,  $\varphi_n \rightarrow f$ . Πράγματι, αν  $f(x) = \infty$ , τότε  $x \in F^n$  για κάθε  $n$ , άρα  $\varphi_n(x) = n \rightarrow \infty$ . Αν  $f(x) < \infty$  τότε για μεγάλα  $n$  έχουμε  $x \notin F^n$ , άρα  $0 \leq f(x) - \varphi_n(x) \leq 2^{-n}$  και το συμπέρασμα έπεται.  $\square$

**Θεώρημα.** Έστω  $f, g$  μη αρνητικές μετρήσιμες. Τότε  $\int (f + g) = \int f + \int g$ .

*Απόδειξη.* Από το προηγούμενο θεώρημα, υπάρχουν αύξουσες ακολουθίες απλών συναρτήσεων  $\varphi_n, \psi_n \geq 0$  τέτοιες ώστε  $\varphi_n \rightarrow f$  και  $\psi_n \rightarrow g$ . Επομένως, από το θεώρημα μονότονης σύγκλισης του Lebesgue και τη γραμμικότητα του ολοκληρώματος για απλές συναρτήσεις, παίρνουμε

$$\int (f + g) = \lim \int (\varphi_n + \psi_n) = \lim \left( \int \varphi_n + \int \psi_n \right) = \int f + \int g.$$

$\square$

**Θεώρημα (Beppo Levi).** Έστω  $f_n, n \in \mathbb{N}$ , μια ακολουθία μη αρνητικών μετρήσιμων συναρτήσεων. Τότε

$$\int \sum_{n=1}^{\infty} f_n = \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n.$$

*Απόδειξη.* Θέτουμε

$$s_n = \sum_{k=1}^n f_k, \quad f = \sum_{k=1}^{\infty} f_k.$$

Τότε η  $s_n$  είναι αύξουσα και  $s_n \rightarrow f$ . Επομένως, από το θεώρημα μονότονης σύγκλισης του Lebesgue και το προηγούμενο θεώρημα, έχουμε

$$\int f = \int \lim s_n = \lim \int s_n = \lim \sum_{k=1}^n \int f_k = \sum_{k=1}^{\infty} \int f_k.$$

$\square$

#### ΑΣΚΗΣΕΙΣ

(1) Έστω  $f, g \geq 0$  πραγματικές, μετρήσιμες, με  $f \geq g$ ,  $\int g < \infty$ . Δείξτε ότι

$$\int (f - g) = \int f - \int g.$$

(2) Έστω  $f \geq 0$  μετρήσιμη. Δείξτε ότι  $\int f = 0$  αν και μόνο αν  $f = 0$  σχεδόν παντού.

(3) Έστω  $f \geq 0$  μετρήσιμη και  $a < b$ . Δείξτε ότι

$$\int_{[a,b]} f = \int_{[a,b)} f = \int_{(a,b]} f = \int_{(a,b)} f.$$

Έτσι μπορούμε να χρησιμοποιούμε τον «παραδοσιακό» συμβολισμό

$$\int_a^b f$$

για οποιοδήποτε από τα τέσσερα ολοκληρώματα.

(4) Δείξτε ότι  $\int_{[1,\infty)} \frac{dx}{x} = \int_{(0,1]} \frac{dx}{x} = \infty$ .

(5) Έστω  $f_n \geq 0, f \geq 0$  μετρήσιμες τέτοιες ώστε  $f_n \rightarrow f$  και  $f_n \leq f$ . Δείξτε ότι  $\int f = \lim \int f_n$ .

- (6) Έστω  $f_n$  μια φθίνουσα ακολουθία μη αρνητικών, πραγματικών μετρήσιμων συναρτήσεων, τέτοια ώστε  $f_n \rightarrow f$ . Δείξτε ότι αν  $\int f_1 < \infty$  τότε  $\int f = \lim \int f_n$ .
- (7) Έστω  $f_n$  μια ακολουθία μη αρνητικών μετρήσιμων συναρτήσεων τέτοια ώστε  $\lim f_n = f$  και

$$\lim \int f_n = \int f < \infty.$$

Δείξτε ότι για κάθε  $E \in \mathcal{M}$  έχουμε

$$\lim \int_E f_n = \int_E f.$$

## 8. Το γενικό ολοκλήρωμα Lebesgue

Αν η  $f$  είναι κάποια συνάρτηση τότε θέτουμε

$$f^+ = \max\{f, 0\}, \quad f^- = -\min\{f, 0\}.$$

Οι  $f^+$  και  $f^-$  ονομάζονται το θετικό και το αρνητικό μέρος της  $f$  αντίστοιχα. Προφανώς,  $f = f^+ - f^-$ ,  $|f| = f^+ + f^-$ . Επίσης η  $f$  είναι μετρήσιμη αν και μόνο αν οι  $f^+$  και  $f^-$  είναι μετρήσιμες.

**Ορισμός.** Μια μετρήσιμη συνάρτηση  $f$  ονομάζεται ολοκληρώσιμη αν  $\int |f| < \infty$ . Στην περίπτωση αυτή θέτουμε

$$\int f = \int f^+ - \int f^-.$$

Αν  $E$  είναι κάποιο μετρήσιμο σύνολο και η  $f \chi_E$  είναι ολοκληρώσιμη, τότε λέμε ότι η  $f$  είναι ολοκληρώσιμη πάνω στο  $E$ .

**Θεώρημα.** Έστω  $f, g$  ολοκληρώσιμες. Τότε

(1) Για κάθε  $a \in \mathbb{R}$  η  $af$  είναι ολοκληρώσιμη και  $\int af = a \int f$ .

(2) Η  $f + g$  είναι ολοκληρώσιμη και  $\int (f + g) = \int f + \int g$ .

(3) Αν  $f = 0$  σχεδόν παντού, τότε  $\int f = 0$ .

(4) Αν  $f \leq g$  σχεδόν παντού, τότε  $\int f \leq \int g$ .

(5) Αν  $A, B$  είναι ξένα μετρήσιμα, τότε

$$\int_{A \cup B} f = \int_A f + \int_B f.$$

*Απόδειξη.* Από την άσκηση 1 μπορούμε να υποθέσουμε ότι όλες οι εμπλεκόμενες συναρτήσεις είναι πραγματικές.

(1)  $\int |af| = |a| \int |f| < \infty$ , άρα η  $af$  είναι ολοκληρώσιμη.

Αν τώρα  $a > 0$ , τότε  $(af)^+ = af^+$  και  $(af)^- = af^-$ . Επομένως

$$\int af = \int (af)^+ - \int (af)^- = a \int f^+ - a \int f^- = a \int f.$$

Αν  $a < 0$ , τότε  $(af)^+ = -af^-$  και  $(af)^- = -af^+$ . Άρα

$$\int af = \int (af)^+ - \int (af)^- = -a \int f^- + a \int f^+ = a \int f.$$

(2) Έχουμε

$$\int |f + g| \leq \int |f| + \int |g| < \infty,$$

άρα η  $f + g$  είναι ολοκληρώσιμη. Παρατηρήστε τώρα ότι

$$f + g = (f + g)^+ - (f + g)^-,$$

και

$$f + g = f^+ - f^- + g^+ - g^-.$$

Άρα

$$(f + g)^+ + f^- + g^- = (f + g)^- + f^+ + g^+.$$

Χρησιμοποιώντας τη γραμμικότητα του ολοκληρώματος για μη αρνητικές συναρτήσεις, παίρνουμε

$$\int (f + g)^+ + \int f^- + \int g^- = \int (f + g)^- + \int f^+ + \int g^+.$$

Επομένως

$$\int (f + g)^+ - \int (f + g)^- = \int f^+ - \int f^- + \int g^+ - \int g^-,$$

το οποίο είναι το ζητούμενο.

(3) Αν  $f = 0$  σχεδόν παντού τότε  $f^+ = 0$  και  $f^- = 0$  σχεδόν παντού. Άρα από την άσκηση 1 της ενότητας 7

$$\int f = \int f^+ - \int f^- = 0.$$

(4) Έχουμε  $g = f + (g - f)$ , άρα

$$\int g = \int f + \int (g - f)^+ - \int (g - f)^-.$$

Αλλά  $(g - f)^- = 0$  σχεδόν παντού, και έτσι το συμπέρασμα έπεται από το (3).

(5) Παρατηρούμε ότι  $\chi_{A \cup B} = \chi_A + \chi_B$ . Το συμπέρασμα έπεται από το (2). □

**Θεώρημα** (Το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης του Lebesgue). Έστω  $f_n$  μια ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων. Υποθέτουμε ότι

- (1) Υπάρχει  $g$  ολοκληρώσιμη τέτοια ώστε  $|f_n| \leq g$  για κάθε  $n$ .
- (2) Υπάρχει  $f$  τέτοια ώστε  $\lim f_n = f$  σχεδόν παντού.

Τότε η  $f$  είναι ολοκληρώσιμη και

$$\int f = \lim \int f_n.$$

Απόδειξη. Έχουμε  $|f| \leq g$  σχεδόν παντού, άρα

$$\int |f| = \int_{\{|f| \leq g\}} |f| + \int_{\{|f| > g\}} |f| \leq \int g < \infty.$$

Επομένως η  $f$  είναι ολοκληρώσιμη. Παρατηρούμε ότι η  $g + f_n$  είναι μια ακολουθία μη αρνητικών συναρτήσεων, άρα από το λήμμα Fatou έχουμε

$$\int \liminf (g + f_n) \leq \liminf \int (g + f_n).$$

Συνεπώς

$$\int f \leq \liminf \int f_n.$$

Εφαρμόζουμε τώρα το λήμμα Fatou στην ακολουθία  $g - f_n$ :

$$\int \liminf (g - f_n) \leq \liminf \int (g - f_n).$$

Άρα

$$\int f \geq \limsup \int f_n.$$

Επομένως

$$\int f \leq \liminf \int f_n \leq \limsup \int f_n \leq \int f,$$

το οποίο σημαίνει ότι

$$\int f = \lim \int f_n.$$

□

Η υπόθεση ότι η  $f_n$  κυριαρχείται από μια ολοκληρώσιμη συνάρτηση  $g$  είναι απαραίτητη. Για παράδειγμα,  $\chi_{(n,n+1)} \rightarrow 0$  αλλά  $\int \chi_{(n,n+1)} = 1$ .

**Θεώρημα.** Έστω  $f_n, n \in \mathbb{N}$ , μια ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων τέτοια ώστε

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int |f_n| < \infty.$$

Τότε η σειρά  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$  συγκλίνει για σχεδόν όλα τα  $x$  σε κάποια συνάρτηση  $f$ . Η  $f$  είναι ολοκληρώσιμη και

$$\int f = \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n.$$

Απόδειξη. Θετούμε

$$g = \sum_{n=1}^{\infty} |f_n|.$$

Από το Θεώρημα Βερρο Levi, έχουμε

$$\int g = \sum_{n=1}^{\infty} \int |f_n| < \infty,$$

άρα η  $g$  είναι ολοκληρώσιμη, επομένως από την άσκηση 1 είναι σχεδόν παντού πεπερασμένη. Αυτό σημαίνει ότι η σειρά  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$  συγκλίνει απόλυτα για σχεδόν όλα τα  $x$ , άρα συγκλίνει για σχεδόν όλα τα  $x$  σε κάποια συνάρτηση  $f$ . Προφανώς  $|f| \leq g$  σχεδόν παντού, άρα η  $f$  είναι ολοκληρώσιμη. Θετούμε τώρα

$$h_n = \sum_{k=1}^n f_k.$$

Έχουμε  $|h_n| \leq g$  και  $h_n \rightarrow f$  σχεδόν παντού, άρα από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης,

$$\int f = \lim \int h_n = \lim_n \sum_{k=1}^n \int f_k = \sum_{k=1}^{\infty} \int f_k.$$

□

**Θεώρημα.** Έστω  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  συνεχής. Τότε η  $f$  είναι ολοκληρώσιμη και αν θέσουμε

$$F(x) = \int_a^x f, \quad a < x < b,$$

έχουμε  $F' = f$ .

Απόδειξη.

$$\int_a^b |f| \leq (b-a) \max |f| < \infty,$$

άρα η  $f$  είναι ολοκληρώσιμη. Έστω τώρα  $x \in (a, b)$ , τότε για  $h > 0$  αρκετά μικρό έχουμε

$$\left| \frac{F(x+h) - F(x)}{h} - f(x) \right| \leq \frac{1}{h} \int_x^{x+h} |f(t) - f(x)| dt \leq \max_{t \in [x, x+h]} |f(t) - f(x)| \rightarrow 0$$

καθώς  $h \rightarrow 0^+$  διότι η  $f$  είναι συνεχής. Το ίδιο ισχύει καθώς  $h \rightarrow 0^-$ , άρα η  $F$  είναι παραγωγίσιμη και  $F' = f$ . □

Άμεση συνέπεια του προηγούμενου θεωρήματος είναι ότι αν η  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  είναι παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο, τότε

$$\int_a^b f' = f(b) - f(a).$$

Αυτό μας επιτρέπει να χρησιμοποιούμε όλες τις γνωστές τεχνικές του Απειροστικού Λογισμού όταν υπολογίζουμε ολοκληρώματα (Lebesgue) στοιχειωδών συναρτήσεων.

#### ΑΣΚΗΣΕΙΣ

- (1) Έστω  $f$  ολοκληρώσιμη. Δείξτε ότι η  $f$  είναι σχεδόν παντού πεπερασμένη.

(2) Έστω  $f$  ολοκληρώσιμη. Δείξτε ότι  $\left| \int f \right| \leq \int |f|$ . Ισότητα έχουμε αν και μόνο αν είτε  $f \geq 0$  σχεδόν παντού ή  $f \leq 0$  σχεδόν παντού.

(3) Έστω  $f$  ολοκληρώσιμη και  $E_n, n \in \mathbb{N}$ , μια ακολουθία μετρήσιμων συνόλων. Θέτουμε  $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ . Δείξτε ότι

(α') Αν τα  $E_n$  είναι ανά δύο ξένα τότε

$$\int_E f = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} f.$$

(β') Αν η  $E_n$  είναι αύξουσα τότε

$$\int_E f = \lim_n \int_{E_n} f.$$

Δείξτε ότι τα (α') και (β') ισχύουν αν αντί της ολοκληρωσιμότητας της  $f$  υποθέσουμε ότι  $f \geq 0$ .

(4) Έστω  $f$  ολοκληρώσιμη. Δείξτε ότι

$$\int f = \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^r f.$$

Το ίδιο ισχύει αν αντί της ολοκληρωσιμότητας της  $f$  υποθέσουμε ότι  $f \geq 0$ .

(5) Δείξτε ότι η συνάρτηση  $\frac{\sin x}{x}$  δεν είναι ολοκληρώσιμη. Παρ' όλα αυτά, το

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_0^r \frac{\sin x}{x} dx$$

υπάρχει.

(6) Έστω  $f_n, g$  ολοκληρώσιμες, τέτοιες ώστε  $f_n \geq g$  σχεδόν παντού, για κάθε  $n$ . Δείξτε ότι

$$\int \liminf f_n \leq \liminf \int f_n.$$

(7) Έστω  $f_n$  ολοκληρώσιμες, τέτοιες ώστε  $|f_n| \leq g$  για κάποια  $g$  ολοκληρώσιμη. Δείξτε ότι

$$\int \liminf f_n \leq \liminf \int f_n \leq \limsup \int f_n \leq \int \limsup f_n.$$

(8) Έστω  $f$  ολοκληρώσιμη. Δείξτε ότι για κάθε  $\varepsilon > 0$  υπάρχει  $\delta > 0$  τέτοιο ώστε για κάθε  $E \in \mathcal{M}$  με  $\mu(E) < \delta$  έχουμε

$$\left| \int_E f \right| < \varepsilon.$$

(Υπόδειξη: Η άσκηση είναι εύκολη αν υποθέσουμε ότι η  $f$  είναι φραγμένη. Αν η  $f$  δεν είναι φραγμένη, παρατηρήστε ότι

$$f \chi_{\{|f| \leq n\}} \rightarrow f$$

σχεδόν παντού.)

(9) Έστω  $f$  ολοκληρώσιμη. Θέτουμε

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Δείξτε ότι η  $F$  είναι συνεχής.

(10) Υπολογίστε τα ακόλουθα όρια.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^{\infty} \frac{n^2 x e^{-n^2 x^2}}{1 + x^2} dx, \quad a \geq 0,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n e^{-2x} dx.$$

(11) Δείξτε ότι

$$\int_0^1 \sin x \ln x \, dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)(2n)!}.$$

(12) Έστω  $f$  ολοκληρώσιμη τέτοια ώστε

$$\int_E f = 0,$$

για κάθε  $E \in \mathcal{M}$ . Δείξτε ότι  $f = 0$  σχεδόν παντού.

(13) Έστω  $f$  ολοκληρώσιμη τέτοια ώστε

$$\int_{-\infty}^x f = 0,$$

για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ . Δείξτε ότι  $f = 0$  σχεδόν παντού. (Υπόδειξη: Δείξτε ότι το ολοκλήρωμα της  $f$  είναι μηδέν πάνω σε κάθε ανοιχτό διάστημα, άρα πάνω σε κάθε ανοιχτό σύνολο, άρα πάνω σε κάθε κλειστό σύνολο, άρα πάνω σε κάθε  $F_\sigma$  σύνολο, άρα πάνω σε κάθε μετρήσιμο σύνολο. Μετά από όλα αυτά τα «άρα» μπορείτε να χρησιμοποιήσετε την προηγούμενη άσκηση.)

(14) Έστω  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  μια συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι

(α') Για κάθε  $t$  η  $f(x, t)$  είναι ολοκληρώσιμη συνάρτηση του  $x$ .

(β') Η μερική παράγωγος  $\frac{\partial f}{\partial t}(x, t)$  υπάρχει για κάθε  $(x, t)$ .

(γ') Υπάρχει μια ολοκληρώσιμη συνάρτηση  $g$  τέτοια ώστε

$$\left| \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) \right| \leq g(x)$$

για κάθε  $(x, t)$ .

Δείξτε ότι

$$\frac{d}{dt} \int f(x, t) \, dx = \int \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) \, dx.$$

## 9. Σύγκλιση ακολουθιών μετρήσιμων συναρτήσεων

**Ορισμός.** Έστω  $f_n, f$  μετρήσιμες. Λέμε ότι

- Η  $f_n$  συγκλίνει στην  $f$  σχεδόν ομοιόμορφα, αν για κάθε  $\varepsilon > 0$  υπάρχει  $E \in \mathcal{M}$  με  $\mu(E) < \varepsilon$  έτσι ώστε  $f_n \rightarrow f$  ομοιόμορφα στο  $E^c$ .
- Η  $f_n$  συγκλίνει στην  $f$  κατά μέτρο, αν για κάθε  $\delta > 0$  έχουμε  $\mu(\{|f_n - f| > \delta\}) \rightarrow 0$ .
- Η  $f_n$  συγκλίνει στην  $f$  κατά μέση τιμή, αν  $\int |f_n - f| \rightarrow 0$ .

Θα εξετάσουμε πως σχετίζονται οι παραπάνω έννοιες σύγκλισης.

**Θεώρημα.** Αν  $f_n \rightarrow f$  σχεδόν ομοιόμορφα, τότε  $f_n \rightarrow f$  σχεδόν παντού.

*Απόδειξη.* Για κάθε  $k$  υπάρχει μετρήσιμο σύνολο  $E_k$  με  $\mu(E_k) < 1/k$  τέτοιο ώστε  $f_n \rightarrow f$  ομοιόμορφα στο  $E_k^c$ .

Θέτουμε  $E = \bigcap_{k=1}^{\infty} E_k$ . Τότε  $\mu(E) = 0$ . Αν τώρα  $x \notin E$  τότε  $x \in E_k^c$  για κάποιο  $k$ . Αλλά  $f_n \rightarrow f$  ομοιόμορφα στο  $E_k^c$ , άρα και κατά σημείο. Επομένως  $f_n(x) \rightarrow f(x)$ . □

Το αντίστροφο γενικά δεν ισχύει. Για παράδειγμα, η  $\chi_{(n,\infty)}$  συγκλίνει κατά σημείο στη μηδενική συνάρτηση, αλλά όχι σχεδόν ομοιόμορφα. Έχουμε όμως το ακόλουθο.

**Θεώρημα (Egorov).** Έστω  $X$  ένα μετρήσιμο σύνολο με θετικό και πεπερασμένο μέτρο, και  $f_n$  μια ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων στο  $X$  τέτοια ώστε  $f_n \rightarrow f$  σχεδόν παντού. Τότε  $f_n \rightarrow f$  σχεδόν ομοιόμορφα.

*Απόδειξη.* Έστω  $A$  το σύνολο πάνω στο οποίο η  $f_n$  δεν συγκλίνει στην  $f$ . Τότε  $\mu(A) = 0$  και προφανώς για κάθε  $k \in \mathbb{N}$  έχουμε

$$X \setminus A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{j=n}^{\infty} \{|f_j - f| < 1/k\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_{n,k}.$$

Η  $E_{n,k}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , είναι αύξουσα, άρα η  $X \setminus E_{n,k}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , είναι φθίνουσα. Επίσης

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} (X \setminus E_{n,k}) \subset A.$$

Αφού το  $X$  έχει πεπερασμένο μέτρο, έχουμε

$$\lim_n \mu(X \setminus E_{n,k}) = \mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} (X \setminus E_{n,k})\right) \leq \mu(A) = 0.$$

Έστω τώρα  $\varepsilon > 0$ . Τότε από την προηγούμενη σχέση έχουμε ότι υπάρχει  $n_k$  τέτοιο ώστε

$$\mu(X \setminus E_{n_k,k}) < \frac{\varepsilon}{2^k}.$$

Θέτουμε

$$E = \bigcup_{k=1}^{\infty} (X \setminus E_{n_k,k}).$$

Τότε

$$\mu(E) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^k} = \varepsilon.$$

Ισχυριζόμαστε ότι  $f_n \rightarrow f$  ομοιόμορφα στο  $X \setminus E$ . Πράγματι, έστω  $\delta > 0$ . Επιλέγουμε  $k_0$  τέτοιο ώστε  $1/k_0 < \delta$ . Τότε για κάθε  $x \in X \setminus E$  έχουμε ότι  $x \in E_{n_{k_0}, k_0}$ . Αυτό σημαίνει ότι

$$|f_j(x) - f(x)| < \frac{1}{k_0} < \delta$$

για κάθε  $j \geq n_{k_0}$ . Δηλαδή η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη. □

**Θεώρημα.** Αν  $f_n \rightarrow f$  σχεδόν ομοιόμορφα ή κατά μέση τιμή, τότε  $f_n \rightarrow f$  κατά μέτρο.



Απόδειξη. Σταθεροποιούμε  $\delta > 0$  και έστω ότι  $f_n \rightarrow f$  σχεδόν ομοιόμορφα. Τότε για τυχόν  $\varepsilon > 0$  υπάρχει  $E$  μετρήσιμο με  $\mu(E) < \varepsilon$  τέτοιο ώστε  $f_n \rightarrow f$  ομοιόμορφα στο  $E^c$ . Άρα υπάρχει  $n_0$  τέτοιο ώστε

$$\sup_{x \notin E} |f_n(x) - f(x)| < \delta$$

για κάθε  $n \geq n_0$ . Επομένως για κάθε τέτοιο  $n$  έχουμε  $\{|f_n - f| > \delta\} \subset E$ . Άρα

$$\mu(\{|f_n - f| > \delta\}) \leq \mu(E) < \varepsilon.$$

Αυτό σημαίνει ότι  $f_n \rightarrow f$  κατά μέτρο.

Έστω τώρα ότι  $f_n \rightarrow f$  κατά μέση τιμή. Τότε

$$\mu(\{|f_n - f| > \delta\}) \leq \frac{1}{\delta} \int_{\{|f_n - f| > \delta\}} |f_n - f| \leq \frac{1}{\delta} \int |f_n - f| \rightarrow 0.$$

Άρα και σ'αυτήν την περίπτωση,  $f_n \rightarrow f$  κατά μέτρο. □

**Θεώρημα.** Αν  $f_n \rightarrow f$  κατά μέτρο, τότε υπάρχει υπακολουθία  $f_{n_k}$  τέτοια ώστε  $f_{n_k} \rightarrow f$  σχεδόν παντού.

Απόδειξη. Αφού  $f_n \rightarrow f$  κατά μέτρο, μπορούμε να επιλέξουμε  $n_1 < n_2 < \dots$  έτσι ώστε

$$\mu\left(\left\{|f_{n_k} - f| > \frac{1}{k}\right\}\right) < \frac{1}{2^k},$$

για κάθε  $k$ . Θέτουμε

$$E_k = \left\{|f_{n_k} - f| > \frac{1}{k}\right\}, \quad E = \bigcap_{j=1}^{\infty} \bigcup_{k=j}^{\infty} E_k.$$

Τότε

$$\mu(E) \leq \mu\left(\bigcup_{k=j}^{\infty} E_k\right) \leq \sum_{k=j}^{\infty} \frac{1}{2^k} \rightarrow 0$$

καθώς  $j \rightarrow \infty$ . Αν τώρα  $x \notin E$  τότε υπάρχει  $j_0$  τέτοιο ώστε  $x \notin E_k$  για κάθε  $k \geq j_0$ . Δηλαδή

$$|f_{n_k}(x) - f(x)| \leq \frac{1}{k}$$

για κάθε  $k \geq j_0$ . Άρα  $f_{n_k}(x) \rightarrow f(x)$ . □

#### ΑΣΚΗΣΕΙΣ

- (1) Αν  $f_n \rightarrow f$  και  $f_n \rightarrow g$  κατά μέτρο, τότε  $f = g$  σχεδόν παντού.
- (2) Αν  $f_n \rightarrow f$  και  $g_n \rightarrow g$  κατά μέτρο, τότε  $f_n + g_n \rightarrow f + g$  κατά μέτρο.
- (3) Αν  $f_n \rightarrow f$  κατά μέτρο και  $a \in \mathbb{R}$ , τότε  $af_n \rightarrow af$  κατά μέτρο.
- (4) Αν  $f_n \rightarrow f$  κατά μέτρο, τότε  $|f_n| \rightarrow |f|$  κατά μέτρο.
- (5) Έστω  $X \in \mathcal{M}$  με  $\mu(X) < \infty$  και  $f_n, f : X \rightarrow \mathbb{R}$  μετρήσιμες. Δείξτε ότι αν  $f_n \rightarrow f$  κατά μέτρο τότε  $f_n^2 \rightarrow f^2$  κατά μέτρο.
- (6) Με ένα παράδειγμα δείξτε ότι η υπόθεση  $\mu(X) < \infty$  είναι απαραίτητη στην προηγούμενη άσκηση.
- (7) Θέτουμε  $f_n(x) = ne^{-nx}$ ,  $0 \leq x \leq 1$ . Δείξτε ότι  $f_n \rightarrow 0$  σχεδόν ομοιόμορφα αλλά όχι κατά μέση τιμή.
- (8) Θέτουμε  $f_n(x) = x^n$ ,  $0 \leq x \leq 1$ . Δείξτε ότι  $f_n \rightarrow 0$  σχεδόν ομοιόμορφα αλλά όχι ομοιόμορφα.
- (9) Έστω  $X \in \mathcal{M}$  με  $\mu(X) < \infty$ . Για κάθε  $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$  μετρήσιμες θέτουμε

$$\rho(f, g) = \int_X \frac{|f - g|}{1 + |f - g|}.$$

Δείξτε ότι  $\rho(f_n, f) \rightarrow 0$  αν και μόνο αν  $f_n \rightarrow f$  κατά μέτρο.

## 10. Προσέγγιση ολοκληρώσιμων συναρτήσεων

Κάθε ολοκληρώσιμη συνάρτηση προσεγγίζεται (κατά μέση τιμή) από απλές συναρτήσεις. Στην πραγματικότητα, προσεγγίζεται από ακόμη «απλούστερες».

**Ορισμός.** Μια συνάρτηση της μορφής

$$s = \sum_{k=1}^n a_k \chi_{I_k},$$

όπου τα  $I_k$  είναι διαστήματα, και  $a_k \in \mathbb{R}$ , ονομάζεται κλιμακωτή.

**Θεώρημα.** Έστω  $f$  ολοκληρώσιμη. Τότε

- (1) Για κάθε  $\varepsilon > 0$  υπάρχει κλιμακωτή συνάρτηση  $s$  τέτοια ώστε  $\int |f - s| < \varepsilon$ .
- (2) Για κάθε  $\varepsilon > 0$  υπάρχει συνεχής συνάρτηση  $g$  τέτοια ώστε  $\int |f - g| < \varepsilon$ .

Απόδειξη.

- (1) Έχουμε  $f = f^+ - f^-$ . Γνωρίζουμε ότι οι  $f^+$  και  $f^-$  μπορούν να προσεγγιστούν από ολοκληρώσιμες απλές συναρτήσεις. Κάθε ολοκληρώσιμη απλή συνάρτηση είναι γραμμικός συνδυασμός χαρακτηριστικών συναρτήσεων μετρήσιμων συνόλων πεπερασμένου μέτρου. Επομένως αρκεί να δείξουμε ότι αν  $A \in \mathcal{M}$ ,  $\mu(A) < \infty$ , τότε υπάρχει κλιμακωτή συνάρτηση  $s$  τέτοια ώστε

$$\int |\chi_A - s| < \varepsilon.$$

Πράγματι, από την κανονικότητα του μέτρου Lebesgue υπάρχουν ξένα ανά δύο φραγμένα διαστήματα  $I_1, I_2, \dots, I_n$  τέτοια ώστε

$$\mu\left(A \Delta \bigcup_{k=1}^n I_k\right) < \varepsilon.$$

Επομένως, αν θέσουμε

$$s = \sum_{k=1}^n \chi_{I_k}$$

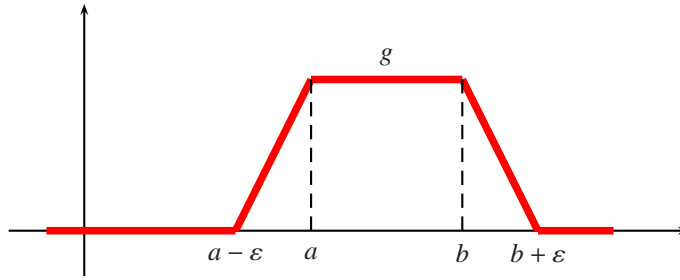
έχουμε

$$\begin{aligned} \int |\chi_A - s| &= \int \left| \chi_A - \sum_{k=1}^n \chi_{I_k} \right| = \int |\chi_A - \chi_{\bigcup_{k=1}^n I_k}| = \int \chi_{A \Delta \bigcup_{k=1}^n I_k} \\ &= \mu\left(A \Delta \bigcup_{k=1}^n I_k\right) < \varepsilon. \end{aligned}$$

- (2) Από το (1) η  $f$  μπορεί να προσεγγιστεί από ολοκληρώσιμες κλιμακωτές συναρτήσεις. Κάθε τέτοια συνάρτηση είναι γραμμικός συνδυασμός χαρακτηριστικών συναρτήσεων φραγμένων διαστημάτων. Επομένως αρκεί να δείξουμε ότι αν  $I = (a, b)$ , τότε υπάρχει  $g$  συνεχής τέτοια ώστε

$$\int |\chi_I - g| \leq \varepsilon.$$

Πράγματι, αν  $g$  είναι η κατά τμήματα γραμμική συνάρτηση του σχήματος, έχουμε το ζητούμενο.



Παρατηρήστε ότι η απόδειξη στην πραγματικότητα δείχνει ότι η  $f$  προσεγγίζεται από συνεχείς συναρτήσεις οι οποίες μηδενίζονται έξω από ένα φραγμένο διάστημα. Τέτοιου είδους συναρτήσεις λέμε ότι έχουν συμπαγή φορέα.  $\square$

Το επόμενο αποτέλεσμα μας λέει ότι μια ολοκληρώσιμη συνάρτηση σ' ένα φραγμένο διάστημα ταυτίζεται με συνεχείς συναρτήσεις έξω από σύνολα αυθαίρετα μικρού μέτρου.

**Θεώρημα** (Ειδική περίπτωση του Θεωρήματος του Lusin). Έστω  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  ολοκληρώσιμη. Τότε για κάθε  $\varepsilon > 0$  υπάρχει  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  συνεχής τέτοια ώστε

$$\mu(\{f \neq g\}) < \varepsilon.$$

*Απόδειξη.* Από το προηγούμενο θεώρημα, για κάθε  $n$  υπάρχει  $g_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  συνεχής τέτοια ώστε

$$\int |f - g_n| < \frac{1}{n}.$$

Επομένως  $g_n \rightarrow f$  κατά μέση τιμή, άρα κατά μέτρο, συνεπώς υπάρχει υπακολουθία  $g_{k_n}$  τέτοια ώστε  $g_{k_n} \rightarrow f$  σχεδόν παντού, άρα από το θεώρημα Egorov, σχεδόν ομοιόμορφα. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει  $E \subset [a, b]$  μετρήσιμο με  $\mu(E) < \varepsilon/2$  τέτοιο ώστε  $g_{k_n} \rightarrow f$  ομοιόμορφα στο  $E^c$ . Άρα  $f|_{E^c}$  συνεχής. Τώρα, από την κανονικότητα του μέτρου Lebesgue, υπάρχει  $K \subset E^c$  συμπαγές, τέτοιο ώστε  $\mu(E^c \setminus K) < \varepsilon/2$ . Θέτουμε  $g$  να είναι μια συνεχής επέκταση της  $f|_K$  (άσκηση 6). Τότε

$$\{f \neq g\} \subset (E^c \setminus K) \cup E,$$

άρα

$$\mu(\{f \neq g\}) \leq \mu(E^c \setminus K) + \mu(E) < \varepsilon.$$

$\square$

#### ΑΣΚΗΣΕΙΣ

(1) Έστω  $f$  ολοκληρώσιμη. Θέτουμε

$$\widehat{f}(\xi) = \int f(x)e^{-2\pi i x \xi} dx, \quad \xi \in \mathbb{R}, \quad i \text{ είναι η φανταστική μονάδα } i^2 = -1.$$

Δείξτε ότι

$$\lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} \widehat{f}(\xi) = 0.$$

(Υπόδειξη: Προσεγγίστε την  $f$  με μια κλιμακωτή συνάρτηση.)

(2) Έστω  $f$  ολοκληρώσιμη. Δείξτε ότι:

(α)  $\int f(x+y)dx = \int f(x)dx$ , για κάθε  $y \in \mathbb{R}$ .

(β)  $\lim_{y \rightarrow 0} \int |f(x+y) - f(x)|dx = 0$ .

(3) Έστω  $A \subset \mathbb{R}$  μετρήσιμο, με πεπερασμένο μέτρο. Θέτουμε

$$\varphi(x) = \mu(A \cap (x + A)), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Δείξτε ότι η  $\varphi$  είναι συνεχής.

- (4) Χρησιμοποιήστε την προηγούμενη άσκηση για να δώσετε μια εναλλακτική απόδειξη του θεωρήματος Steinhaus.
- (5) Δείξτε ότι το θεώρημα Lusin εξακολουθεί να ισχύει αν υποθέσουμε ότι η  $f$  είναι απλά μετρήσιμη.  
(Υπόδειξη:  $[a, b] = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{|f| \leq n\}$ .)
- (6) Δείξτε ότι κάθε συνεχής συνάρτηση ορισμένη σ' ένα κλειστό σύνολο έχει συνεχή επέκταση σ' ολόκληρο το  $\mathbb{R}$ . (Υπόδειξη: Το συμπλήρωμα του πεδίου ορισμού της συνάρτησης είναι ανοιχτό, άρα γράφεται σαν αριθμήσιμη ένωση ξένων ανά δύο ανοιχτών διαστημάτων. Επεκτείνουμε τη συνάρτηση στα διαστήματα αυτά με γραμμικό τρόπο.)
- (7) Ισχύει το θεώρημα Lusin αν υποθέσουμε ότι η  $f$  είναι ορισμένη σ' ολόκληρο το  $\mathbb{R}$ ;

## 11. Η μεγιστική συνάρτηση Hardy-Littlewood

Γνωρίζουμε από τον Απειροστικό Λογισμό ότι αν η  $f$  είναι συνεχής τότε για κάθε  $x$  η μέση τιμή της  $f$  στο διάστημα  $(x-r, x+r)$

$$A_r f(x) := \frac{1}{2r} \int_{x-r}^{x+r} f$$

συγκλίνει στο  $f(x)$  καθώς  $r \rightarrow 0$ .

Στην ενότητα αυτή θα δείξουμε το πολύ ισχυρότερο αποτέλεσμα ότι αν η  $f$  είναι ολοκληρώσιμη σε κάθε φραγμένο διάστημα (μια τέτοια συνάρτηση ονομάζεται τοπικά ολοκληρώσιμη), τότε

$$\lim_{r \rightarrow 0} A_r f = f$$

σχεδόν παντού.

**Ορισμός.** Έστω  $f$  τοπικά ολοκληρώσιμη. Η μεγιστική συνάρτηση Hardy-Littlewood της  $f$  ορίζεται να είναι

$$Mf := \sup_{r>0} A_r |f|.$$

**Θεώρημα.** Η  $Mf$  είναι μετρήσιμη.

*Απόδειξη.* Έστω  $a \in \mathbb{R}$ . Θα δείξουμε ότι το  $E = \{Mf > a\}$  είναι ανοιχτό (άρα μετρήσιμο). Πράγματι, αν  $x \in E$  τότε υπάρχει  $r > 0$  τέτοιο ώστε

$$\frac{1}{2r} \int_{x-r}^{x+r} |f| > a.$$

Επιλέγουμε  $\delta > 0$  αρκετά μικρό έτσι ώστε

$$\frac{1}{2(r+\delta)} \int_{x-r}^{x+r} |f| > a.$$

Προφανώς για κάθε  $y \in (x-\delta, x+\delta)$  έχουμε

$$(x-r, x+r) \subset (y-(r+\delta), y+(r+\delta)),$$

και άρα

$$Mf(y) \geq \frac{1}{2(r+\delta)} \int_{y-(r+\delta)}^{y+(r+\delta)} |f| \geq \frac{1}{2(r+\delta)} \int_{x-r}^{x+r} |f| > a.$$

Επομένως  $(x-\delta, x+\delta) \subset E$ , συνεπώς το  $E$  είναι ανοιχτό.  $\square$

Στα παρακάτω θα χρησιμοποιούμε το συμβολισμό

$$\|f\| = \int |f|.$$

**Θεώρημα** (Η weak-type ανισότητα για τη μεγιστική συνάρτηση). Έστω  $f$  ολοκληρώσιμη. Τότε για κάθε  $\lambda > 0$  έχουμε

$$\mu(\{Mf > \lambda\}) \leq \frac{3}{\lambda} \|f\|.$$

*Απόδειξη.* Έστω  $K \subset \{Mf > \lambda\}$  συμπαγές. Από την κανονικότητα του μέτρου, αρκεί να δείξουμε ότι

$$\mu(K) \leq \frac{3}{\lambda} \|f\|.$$

Για κάθε  $x \in K$  υπάρχει ένα ανοιχτό διάστημα  $I_x$  με κέντρο το  $x$  τέτοιο ώστε

$$\frac{1}{\mu(I_x)} \int_{I_x} |f| > \lambda.$$

Η οικογένεια  $\{I_x : x \in K\}$  είναι ανοιχτή κάλυψη του συμπαγούς συνόλου  $K$ , άρα έχει πεπερασμένη υποκάλυψη, έστω  $\mathcal{S} = \{I_1, I_2, \dots, I_n\}$ . Θα κατασκευάσουμε μια ξένη υποοικογένεια της  $\mathcal{S}$  ως εξής:

Έστω  $J_1$  το μεγαλύτερο, ως προς το μήκος, διάστημα της  $\mathcal{S}$ . Θετούμε  $\tilde{J}_1$  να είναι το διάστημα με το ίδιο κέντρο με το  $J_1$  και τριπλάσιο μήκος. Τότε το  $\tilde{J}_1$  περιέχει όλα τα διαστήματα της  $\mathcal{S}$  τα οποία τέμνουν το  $J_1$ . Πετάμε έξω από την  $\mathcal{S}$  τα διαστήματα αυτά.

Έστω  $J_2$  το μεγαλύτερο, ως προς το μήκος, διάστημα από αυτά που έχουν μείνει στην  $\mathcal{J}$ , και θέτουμε  $\tilde{J}_2$  να είναι όπως πριν. Πετάμε έξω από την  $\mathcal{J}$  όλα τα διαστήματα που τέμνουν το  $J_2$ .

Συνεχίζουμε με τον ίδιο τρόπο μέχρι να εξαντλήσουμε την  $\mathcal{J}$ . Μόλις συμβεί αυτό θα έχουμε μια οικογένεια ξένων ανά δύο διαστημάτων  $J_1, J_2, \dots, J_m$  τέτοια ώστε

$$K \subset \bigcup_{k=1}^n I_k \subset \bigcup_{k=1}^m \tilde{J}_k.$$

Τότε

$$\begin{aligned} \mu(K) &\leq \mu\left(\bigcup_{k=1}^n I_k\right) \leq \sum_{k=1}^m \mu(\tilde{J}_k) = 3 \sum_{k=1}^m \mu(J_k) < \frac{3}{\lambda} \sum_{k=1}^m \int_{J_k} |f| \\ &= \frac{3}{\lambda} \int_{\bigcup_{k=1}^m J_k} |f| \leq \frac{3}{\lambda} \|f\|. \end{aligned}$$

□

**Θεώρημα.** Έστω  $f$  ολοκληρώσιμη. Τότε

$$\lim_{r \rightarrow 0} A_r f = f$$

σχεδόν παντού.

Απόδειξη. Πρέπει να δείξουμε ότι το σύνολο

$$\{\limsup_{r \rightarrow 0} |A_r f - f| > 0\}$$

έχει μέτρο μηδέν. Εφόσον

$$\{\limsup_{r \rightarrow 0} |A_r f - f| > 0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{\limsup_{r \rightarrow 0} |A_r f - f| > 1/n\}$$

αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε  $\delta > 0$  το σύνολο

$$\{\limsup_{r \rightarrow 0} |A_r f - f| > \delta\}$$

έχει μέτρο μηδέν. Πράγματι, έστω  $\varepsilon > 0$ . Τότε υπάρχει  $g$  συνεχής τέτοια ώστε  $\|f - g\| < \varepsilon$ . Έχουμε

$$|A_r f - f| \leq A_r(|f - g|) + |A_r g - g| + |f - g| \leq M(f - g) + |A_r g - g| + |f - g|.$$

Εφόσον  $A_r g \rightarrow g$  καθώς  $r \rightarrow 0$ , παίρνουμε

$$\limsup_{r \rightarrow 0} |A_r f - f| \leq M(f - g) + |f - g|.$$

Άρα, από το προηγούμενο θεώρημα

$$\mu(\{\limsup_{r \rightarrow 0} |A_r f - f| > \delta\}) \leq \mu(\{M(f - g) > \delta/2\}) + \mu(\{|f - g| > \delta/2\}) \leq \frac{8}{\delta} \|f - g\| < \frac{8\varepsilon}{\delta}.$$

Η παραπάνω σχέση ισχύει για κάθε  $\varepsilon > 0$  και έτσι το συμπέρασμα έπεται. □

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

- (1) Δείξτε ότι αν η  $f$  είναι τοπικά ολοκληρώσιμη τότε  $\lim_{r \rightarrow 0} A_r f = f$  σχεδόν παντού.
- (2) Αν η  $f$  είναι τοπικά ολοκληρώσιμη τότε  $f \leq Mf$  σχεδόν παντού.
- (3) Έστω  $f$  τοπικά ολοκληρώσιμη. Χρησιμοποιώντας συναρτήσεις της μορφής  $f - q$ , όπου  $q \in \mathcal{Q}$ , δείξτε ότι για σχεδόν όλα τα  $x$  έχουμε

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{2r} \int_{x-r}^{x+r} |f(y) - f(x)| dy = 0.$$

- (4) Χρησιμοποιήστε την προηγούμενη άσκηση για να δείξετε το Θεώρημα Διαφορισιμότητας του Lebesgue. Αν η  $f$  είναι τοπικά ολοκληρώσιμη, σταθεροποιήσουμε  $a \in \mathbb{R}$  και θέσουμε

$$F(x) = \int_a^x f, \quad x > a,$$

τότε η  $F$  είναι σχεδόν παντού παραγωγίσιμη και  $F' = f$  σχεδόν παντού.

- (5) Δείξτε ότι η  $Mf$  δεν είναι ποτέ ολοκληρώσιμη, εκτός αν  $f = 0$  σχεδόν παντού.