ΘΕΩΡΙΑ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ (Μεταπτυχιακό)

1ο Φυλλάδιο Ασκήσεων-Εαρινό Εξάμηνο 2013
Παρακαλώ να μου παραδώσετε τις λύσεις σας την Πέμπτη 28 Φεβρουαρίου.

(**1**) (1 μονάδα) Δείξτε ότι εαν μία σ-άλγεβρα έχει άπειρα στοιχεία τότε έχει υπεραριθμήσιμα στοιχεία.

(**2**) (1 μονάδα) Δώστε παράδειγμα συνόλου Ω και οικογένειας υποσυνόλων $\mathcal{E}$ ώστε $\mu(\mathcal{E}) \neq \sigma(\mathcal{E})$, όπου $\mu(\mathcal{E})$ η μικρότερη μονότονη κλάση που περιέχει το σύνολο $\mathcal{E}$ και $\sigma(\mathcal{E})$ η μικρότερη σ-άλγεβρα που περιέχει το σύνολο $\mathcal{E}$. (Υπόδειξη: Είναι πολύ απλό.)

(**3**) (1 μονάδα) Έστω $\Omega = \mathbb{Q} \cap [0,1]$ και $\mathcal{A}$ η άλγεβρα που παράγεται από σύνολα της μορφής $(a,b)\cap\mathbb{Q}$, $[a,b)\cap\mathbb{Q}$, $(a,b]\cap\mathbb{Q}$, $[a,b]\cap\mathbb{Q}$, όπου $0 \leq a < b \leq 1$. Για A διάστημα της προηγούμενης μορφής ορίζουμε $\mathbb{P}(A) = b - a$ και επεκτείνουμε το $\mathbb{P}$ σε πεπερασμένα προσθετικό μέτρο πιθανότητας $\mathbb{P}\colon \mathcal{A} \to [0,1]$. Δείξτε ότι το $\mathbb{P}$ δεν είναι αριθμήσιμα προσθετικό στην άλγεβρα $\mathcal{A}$.

(**4**) (1 μονάδα) Δείξτε ότι υπάρχουν μέτρα πιθανότητας $\mathbb{P}_1, \mathbb{P}_2$ σε χώρο $(\Omega, \mathcal{F})$ τέτοια ώστε το σύνολο $\{A \in \mathcal{F}\colon \mathbb{P}_1(A) = \mathbb{P}_2(A)\}$ να μην είναι άλγεβρα.

(**5**) (2 μονάδες) Έστω $\mathbb{P}$ ένα πεπερασμένα προσθετικό μέτρο πιθανότητας στην άλγεβρα $\mathcal{A}$. Εαν $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$ ξένα και $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$ δείξτε ότι $\mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) \geq \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i)$. Βρείτε παράδειγμα όπου η ανισότητα είναι γνήσια.

(**6**) (2 μονάδες) Έστω $\mathbb{P}$ μέτρο πιθανότητας σε χώρο $(\Omega, \sigma(\mathcal{A}))$ όπου $\mathcal{A}$ άλγεβρα υποσυνόλων του Ω. Δείξτε ότι για κάθε $A \in \sigma(\mathcal{A})$ και $\varepsilon > 0$ υπάρχει $B \in \mathcal{A}$ ώστε $\mathbb{P}(A \triangle B) \leq \varepsilon$.

(**7**) (2 μονάδες) Ορίζουμε ως $\mathcal{D}$ την οικογένεια υποσυνόλων του $\mathbb{N}$ για τα οποία υπάρχει το όριο

$$d(E) := \lim_{N\to\infty} \frac{|E \cap [1,N]|}{N}.$$

(**i**) Δείξτε ότι το $d(E)$ δεν υπάρχει πάντα.

(**ii**) Δείξτε ότι η $\mathcal{D}$ **δεν** είναι άλγεβρα.

(**iii**) Δείξτε ότι η συνολοσυνάρτηση $d\colon \mathcal{D} \to [0,1]$ είναι πεπερασμένα προσθετικό αλλά όχι σ-προσθετικό μέτρο πιθανότητας στο σύνολο $\mathcal{D}$.