ΘΕΩΡΙΑ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ (Μεταπτυχιακό)

7ο Φυλλάδιο Ασκήσεων-Εαρινό Εξάμηνο 2013
Παρακαλώ να μου παραδώσετε τις λύσεις σας πριν την Τρίτη 12 Ιουνίου.

(**1**) (1.5 μονάδες) Έστω ξ, η δύο $\mathcal{F}$-μετρήσιμες τυχαίες μεταβλητές με $\mathbb{E}\xi^2, \mathbb{E}\eta^2 < \infty$ και $\mathcal{A} \subset \mathcal{F}$ σ-άλγεβρα. Δείξτε ότι $\mathbb{E}\big(\xi \mathbb{E}(\xi|\mathcal{A})\big) \geq (\mathbb{E}\xi)^2$ και $\mathbb{E}\big(\xi \mathbb{E}(\eta|\mathcal{A})\big) = \mathbb{E}\big(\eta \mathbb{E}(\xi|\mathcal{A})\big)$.

(**2**) (1 μονάδα) Έστω ξ μία $\mathcal{F}$-μετρήσιμη τυχαία μεταβλητή και $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2 \subset \mathcal{F}$ σ-άλγεβρες. Εάν η σ-άλγεβρα που παράγεται από την ξ και την $\mathcal{A}_2$ είναι ανεξάρτητη από την $\mathcal{A}_1$, δείξτε ότι $\mathbb{E}(\xi|\sigma(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2)) = \mathbb{E}(\xi|\mathcal{A}_2)$.

(**3**) (1 μονάδα) Έστω $\xi_1, \ldots, \xi_n$ ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές με $\mathbb{E}|\xi_1| < \infty$ και $S_n = \xi_1 + \cdots + \xi_n$. Δείξτε ότι $\mathbb{E}(\xi_1|S_n) = \frac{S_n}{n}$.

(**4**) (1.5 μονάδες) Έστω $\xi_1, \xi_2, \ldots$ ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές με $\mathbb{E}|\xi_1| < \infty$ και $\mathcal{F}_n = \sigma(S_n, S_{n+1}, \ldots)$, όπου $S_n = \xi_1 + \cdots + \xi_n$. Έστω

$$X_n = \frac{\xi_1 + \cdots + \xi_n}{n}.$$

Δείξτε ότι η ακολουθία $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι *reverse martingale.*

(**5**) (1.5 μονάδες) Έστω $\xi_1, \xi_2, \ldots$ ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές με $\mathbb{P}(\xi_1 = 0) = \mathbb{P}(\xi_1 = 2) = 1/2$, $\mathcal{F}_n = \sigma(\xi_1, \ldots, \xi_n)$, και

$$X_n = \xi_1 \cdots \xi_n.$$

Είναι γνωστό ότι η ακολουθία η $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι *martingale.* Δείξτε ότι δεν υπάρχει τυχαία μεταβλητή ξ ώστε $X_n = \mathbb{E}(\xi|\mathcal{F}_n)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

(**6**) (1.5 μονάδες) Έστω $\xi_1, \xi_2, \ldots$ ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με $\mathbb{E}(\xi_n) = 0$ για $n \in \mathbb{N}$. Υποθέτουμε ότι $\sum_{n=1}^{\infty} b_1 \cdots b_n < \infty$ όπου $b_n = \mathbb{E}\xi_n^2$. Δείξτε ότι η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \xi_1 \cdots \xi_n$$

συγκλίνει σχεδόν βέβαια.

(**7**) (2 μονάδες) Έστω $\xi_1, \xi_2, \ldots$ μη αρνητικές, ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές, με $\mathbb{E}(\xi_n) = 1$ για $n \in \mathbb{N}$. Θέτουμε $X_n = \prod_{i=1}^{n} \xi_i$.

(*i*) Έστω ότι $\sum_{n=1}^{\infty}(1 - b_n) = \infty$ όπου $b_n = \mathbb{E}(\xi_n^{1/2})$. Δείξτε ότι $X_n \to 0$ σχεδόν βέβαια.

(*ii*) Έστω $\mathbb{P}\big(\xi_n = 1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\big) = \mathbb{P}\big(\xi_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\big) = \frac{1}{2}$. Δείξτε ότι $X_n \to 0$ σχεδόν βέβαια.
