ΘΕΩΡΙΑ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ (Μεταπτυχιακό)

Τελικό Διαγώνισμα-Εαρινό Εξάμηνο 2021
Διάρκεια: 4 ώρες
Καλή Επιτυχία!

(**1**) (1.5 Μονάδες) Έστω $\xi_1, \xi_2, \dots$ ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές ώστε $\mathbb{P}(\xi_n = 1) = \frac{1}{n}$, $\mathbb{P}(\xi_n = 0) = 1 - \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$. Δείξτε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n \, \xi_{n+1}$ συγκλίνει σχεδόν βέβαια. Δείξτε επίσης ότι το συμπέρασμα δεν ισχύει εαν βγάλουμε την υπόθεση της ανεξαρτησίας.

(**2**) (2 Μονάδες) (*i*) Έστω $f_1, \dots, f_n \in L^2[0,1]$ με $\|f_1\|_2 = \dots = \|f_n\|_2 = 1$. Δείξτε ότι υπάρχουν $\epsilon_1, \dots, \epsilon_n \in \{-1, 1\}$ ώστε $\|\epsilon_1 \, f_1 + \dots + \epsilon_n f_n\|_2 \leq \sqrt{n}$.

(*ii*) Δείξτε ότι υπάρχουν $f_1, \dots, f_n \in L^2[0,1]$ τέτοιες ώστε $\|f_1\|_2 = \dots = \|f_n\|_2 = 1$ και $\|\epsilon_1 \, f_1 + \dots + \epsilon_n f_n\|_2 = \sqrt{n}$ για κάθε $\epsilon_1, \dots, \epsilon_n \in \{-1, 1\}$.

(**3**) (1.5 Μονάδες) Έστω $\xi_1, \xi_2, \dots$ ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές.

(*i*) Δείξτε ότι $\mathbb{P}(\xi_1 + \dots + \xi_n = [\sqrt{n}]$ για άπειρα $n) = 0$ ή 1.

(*ii*) Εαν $\mathbb{P}(\xi_n = \pm 1) = \frac{1}{2}$, $n \in \mathbb{N}$, δείξτε ότι $\mathbb{P}(\xi_1 + \dots + \xi_n = [\sqrt{n}]$ για άπειρα $n) = 1$.

(**4**) (2 Μονάδες) Έστω $\xi_1, \xi_2, \dots$ ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές ώστε $\mathbb{P}(\xi_n = \pm n^a) = \frac{1}{2}$, $n \in \mathbb{N}$, για κάποιο $a \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι

(*i*) Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n$ συγκλίνει σχεδόν βέβαια εάν και μόνο αν $a < -\frac{1}{2}$.

(*ii*) Εάν $a < \frac{1}{2}$, τότε $\lim_{n \to \infty} \frac{\xi_1 + \dots + \xi_n}{n} = 0$ σχεδόν βέβαια.

(*iii*) Εάν $a = 1$, τότε το όριο $\lim_{n \to \infty} \frac{\xi_1 + \dots + \xi_n}{n}$ **δεν** υπάρχει σχεδόν βέβαια.

(**5**) (2 Μονάδες) Έστω $\xi_1, \xi_2, \dots$ ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές ώστε $\mathbb{P}(\xi_n = \pm \frac{1}{2^n}) = \frac{1}{2}$, $n \in \mathbb{N}$, και $S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$, $n \in \mathbb{N}$. Δείξτε ότι

(*i*) $\phi_{S_n}(t) = \frac{\sin t}{2^n \sin(t/2^n)}$, $n \in \mathbb{N}$, $t \neq 0$, όπου ϕ_{S_n} η χαρακτηριστική συνάρτηση της S_n.

(*ii*) $S_n \to^d U[-1, 1]$, όπου $U[-1, 1]$ η ομοιόμορφη κατανομή στο $[-1, 1]$.

(Υπενθυμίζω ότι η $U[-1, 1]$ έχει συνάρτηση πυκνότητας $\frac{1}{2} \cdot \mathbf{1}_{[-1,1]}$.)

(**6**) (2 Μονάδες) Έστω $\xi_1, \xi_2, \dots$ ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές ώστε $\mathbb{P}(\xi_n = \pm \frac{1}{n}) = \frac{1}{2}$, $n \in \mathbb{N}$. Δείξτε ότι η σειρά

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\xi_{n+1}}{1 + \xi_1 \cdots \xi_n}$$

συγκλίνει σχεδόν βέβαια. Επίσης, εαν ξ η οριακή συνάρτηση, υπολογίστε τη μέση τιμή $\mathbb{E}\xi$.

(Προσοχή οι όροι της σειράς δεν είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές.)
