ΘΕΩΡΙΑ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ (Μεταπτυχιακό)

3ο Φυλλάδιο Ασκήσεων-Εαρινό Εξάμηνο 2021
Παρακαλώ να μου παραδώσετε τις λύσεις σας πριν την Τρίτη 16 Μαρτίου.

(**1**) (1 μονάδα) Έστω ξ μη αρνητική τυχαία μεταβλητή με $0 < \mathbb{E}\xi < \infty$. Δείξτε ότι για κάθε $\lambda \in (0,1)$ έχουμε

$$\mathbb{P}(\xi \geq \lambda \mathbb{E}\xi) \geq (1-\lambda)^2 \frac{(\mathbb{E}\,\xi)^2}{\mathbb{E}\,\xi^2}$$

(**2**) (1 μονάδα) Έστω ξ μη αρνητική τυχαία μεταβλητή. Δείξτε ότι

$$\mathbb{E}\,\xi^k = k\int_0^\infty t^{k-1}\mathbb{P}(\xi > t)dt$$

για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Υπόδειξη: $Fubini - Tonelli$.

(**3**) (1 μονάδα) Δείξτε ότι οι τυχαίες μεταβλητές ξ, η είναι ανεξάρτητες αν και μόνο αν

$$\mathbb{E}(f(\xi)g(\eta)) = \mathbb{E}f(\xi) \cdot \mathbb{E}g(\eta)$$

για όλες τις $Borel$-μετρήσιμες $f, g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (ώστε οι $f(\xi)$ και $g(\eta)$ να είναι ολοκληρώσιμες).

(**4**) (2 μονάδες) Έστω ξ, η φραγμένες τυχαίες μεταβλητές.

(**i**) Δείξτε ότι η ταυτότητα $\mathbb{E}(\xi\eta) = \mathbb{E}\xi \cdot \mathbb{E}\eta$ μπορεί να ισχύει ακόμη και αν οι ξ, η δεν είναι ανεξάρτητες.

(**ii**) Δείξτε ότι εαν $\mathbb{E}(\xi^k\eta^l) = \mathbb{E}\xi^k \cdot \mathbb{E}\eta^l$ για κάθε $k, l \in \mathbb{N}$, τότε οι ξ, η είναι ανεξάρτητες.

(**5**) (2 μονάδες) Έστω ξ, η φραγμένες ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές και $\mathbb{E}\,\eta = 0$.

(**i**) Δείξτε ότι $\mathbb{E}|\xi + \eta| \geq \mathbb{E}|\xi|$.

(**ii**) Γενικότερα, δείξτε ότι $\mathbb{E}|\xi + \eta|^k \geq \mathbb{E}|\xi|^k$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$.

Υπόδειξη: $\mathbb{E}|\xi + \eta|^k = \int_{\mathbb{R}^2} |x+y|^k dP_{\xi,\eta}(x,y) = \int_{\mathbb{R}^2} |x+y|^k dP_\eta(y) dP_\xi(x)$.

(**6**) (2 μονάδες) Έστω $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^n$ με $\|v_i\| \leq 1$, $p_1, \ldots, p_n \in [0,1]$, και $v = p_1v_1 + \cdots + p_nv_n$. Δείξτε ότι υπάρχουν $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n \in \{0,1\}$ ώστε το διάνυσμα $w = \epsilon_1 v_1 + \cdots + \epsilon_n v_n$ να ικανοποιεί

$$\|v - w\| \leq \frac{\sqrt{n}}{2}.$$

Υπόδειξη: $\mathbb{P}(\xi_i = 1) = p_i$.

(**7**) (2 μονάδες) Έστω $k \in \mathbb{N}$ και $a > 2/k$. Δείξτε ότι εαν ο φυσικός N είναι αρκετά μεγάλος, τότε υπάρχει υποσύνολο του $\{1, 2, \ldots, N\}$ με τουλάχιστον N^{1-a} στοιχεία το οποίο δεν περιέχει καμία αριθμητική πρόοδο μήκους k.
