ΘΕΩΡΙΑ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ (Μεταπτυχιακό)

4ο Φυλλάδιο Ασκήσεων-Εαρινό Εξάμηνο 2021
Παρακαλώ να μου παραδώσετε τις λύσεις σας μέχρι την Τρίτη 30 Μαρτίου.

(**1**) (2 μονάδες) (**i**) Έστω $\xi_1,\dots,\xi_n$ ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές τέτοιες ώστε $F_{\xi_i}=F_{-\xi_i}$, $i=1,\dots,n$. Δείξτε ότι $\mathbb{P}(\xi_1+\cdots+\xi_n>0)=\mathbb{P}(\xi_1+\cdots+\xi_n<0)$.

(**ii**) Δείξτε ότι το συμπέρασμα στο (i) δεν ισχύει εαν οι τυχαίες μεταβλητές $\xi_1,\dots,\xi_n$ δεν είναι ανεξάρτητες.

(**2**) (1 μονάδα) Έστω (A_n) ακολουθία ανεξάρτητων ενδεχομένων ώστε $\mathbb{P}(A_n)<1$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$. Δείξτε ότι $\mathbb{P}(A_n\ i.o.)=1$ αν και μόνο αν $\mathbb{P}(\cup_{n=1}^{\infty}A_n)=1$.

(**3**) (1 μονάδα) Έστω (ξ_n) ακολουθία ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών ώστε

$$\mathbb{P}(\xi_n=n)=1-1/n^2,\qquad \mathbb{P}(\xi_n=-n^3+n)=1/n^2.$$

Δείξτε ότι $\mathbb{E}\xi_n=0$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$ όμως $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k\to+\infty$ σχεδόν βέβαια.

(**4**) (2 μονάδες) (**i**) Δείξτε ότι υπάρχει σταθερά C ώστε

$$\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{(\log k)^2}\leq C\cdot\frac{n}{(\log n)^2}$$

για κάθε $n\in\mathbb{N}$.

(**ii**) Έστω (A_n) ακολουθία ενδεχομένων ώστε $\mathbb{P}(A_n)\leq 1/(\log n)^2$ για κάθε $n\geq 2$. Δείξτε ότι σχεδόν βέβαια το σύνολο $\{n\in\mathbb{N}\colon \omega\in A_n\}$ έχει πυκνότητα 0, δηλαδή, $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\mathbf{1}_{A_k}(\omega)\to 0$.

(**5**) (1 μονάδα) Έστω (ξ_n) ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών με $\mathbb{E}|\xi_1|<+\infty$. Δείξτε ότι $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k\xrightarrow{L^1}\mathbb{E}\xi_1$.

(**6**) (3 μονάδες) (**i**) Δείξτε ότι $e^x+e^{-x}\leq 2e^{x^2/2}$ και για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

(**ii**) Έστω ξ τυχαία μεταβλητή ώστε $\mathbb{E}\xi=0$ και $|\xi|\leq 1$. Δείξτε ότι $\mathbb{E}e^{t\xi}\leq e^{t^2/2}$ για κάθε $t\in\mathbb{R}$. (Υπόδειξη: Δείξτε πρώτα ότι $e^{t\xi}\leq\frac{\xi+1}{2}e^t+\frac{1-\xi}{2}e^{-t}$.)

(**iii**) Έστω $\xi_1,\dots,\xi_n$ ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές ώστε $\mathbb{E}\xi_n=0$ και $|\xi_n|\leq 1$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$. Θέτουμε $S_n=\xi_1+\cdots+\xi_n$. Δείξτε ότι

$$\mathbb{P}(|S_n-\mathbb{E}S_n|\geq\lambda\sqrt{n})\leq 2e^{-\lambda^2/2}.$$
