ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΚΡΗΤΗΣ

Φθινόπωρο 1985

ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ

Σημειώσεις

Β.Κ. Κλωνιας.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΠΡΟΛΟΓΟΣ. Οπως θα διαπιστωσετε συντομα οι Πιθανοτητες ειναι ενα εξαιρετικα ενδιαφερον αντικειμενο μελετης, που σκοπος τους ειναι να μετρουν την αβεβαιοτητα (ειναι (σ-) πεπερασμενα μετρα).

Αν και η Θεωρια Πιθανοτητων ειναι ενας κλαδος των "καθαρων" Μαθηματικων, οι εννοιες που δινουν ουσια σ' αυτα τα Μαθηματικα εχουν μια δικη τους ζωη και ειναι ο κυριος λογος που αυτο το αντικειμενο εχει ξεχωρισει απο τη Θεωρια Μετρου. Σαν εισαγωγη στις Πιθανοτητες θα ασχοληθουμε αυτο το εξαμηνο με αυτες τις βασικες εννοιες του θεματος — οι οποιες χρειαζονται λιγο χρονο και προσπαθεια να κατανοηθουν — και θα αναπτυξουμε τα απαραιτητα μαθηματικα για τη θεμελιωση και χρηση των Πιθανοτητων.

Παρ' ολο που η εννοια της αβεβαιοτητος, της τυχης, ειχε συλληφθη απο τους αρχαιους — που την καναν και Θεα — και αναγνωρισθη απο τον Αριστοτελη σαν ενα εκ των "ουκ ανευ" για ευτυχια στη ζωη και παρα το οτι τα απαραιτητα Μαθηματικα για τους βασικους υπολογισμους υπηρχαν απο τους π.Χ. χρονους, χρειασθηκε να φθασουμε στα μεσα του 17^{ου} αιωνα (1654) για να γινη η αβεβαιοτητα αντικειμενο μαθηματικης μελετης. Αυτη αρχισε με τη διασημη πλεον ανταλλαγη επιστολων μεταξυ των Pascal και Fermat πανω σ' ενα προβλημα που εθεσε ο παικτης Chevalier de Meré, ο οποιος ισχυριζοταν (σωστα ή λαθος;) οτι η πιθανοτητα να φερη κανεις τουλαχιστον εναν ασσο σε ενα ριξιμο τεσσαρων ζαριων ειναι η ιδια με την πιθανοτητα να φερει κανεις τουλαχιστον ενα διπλο ασσο σε μια σειρα απο εικοσιτεσσερις ριψεις με ενα ζευγος ζαριων.

Απο αυτες τις "υποπτες" αρχες εχει εξελιχθη ο σημερα "αξιοπρεπης" κλαδος των Μαθηματικων, η Θεωρια Πιθανοτητων. Οι εφαρμογες της καλυπτουν ολες τις εφαρμοσμενες επιστημες και η θεωρια της ειναι ενας ζωντανος κλαδος των συγχρονων Μαθηματικων και επισης συνεισφερει στην εξελιξη διαφορων αλλων κλαδων τους. Σαν παραδειγματα εφαρμογων της Θεωριας Πιθανοτητων αναφερουμε συγκεκριμμενα αλλά επιγραμματικα τα ακολουθα: κινηση Brown, κατανομη θεσεως και ροπης ηλεκτρονιων, ελεγχους ποιοτητος στη παραγωγη, συγκρισεις φαρμακων και ιατρικων αγωγων, πιθανοθεωρητικα προφιλ κατασκευων, οικονομετρια, θεματα επιχειρησιακης ερευνας, μεταδωση και ληψη σηματων, αστρονομικες μετρησεις, σφυγμομετρησεις, πληροφορικη, στη δικαιοσυνη πολλων χωρων (π.χ. στον ορισμο της "λογικης αμφιβολιας", ή προς αποδειξη υπαρξεως διακρισεων μεταξυ ομαδων ανθρωπων), τομογραφια, διαγνωση μοντελων (pattern recognition) κ.α. . .
Επι πλεον — και με αμμεσο για μας ενδιαφερον — η Θεωρια Πιθανοτητων ειναι το πλαισιο μεσα στο οποιο αναπτυσσεται η Στατιστικη Επιστημη.

1. ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΥΝΔΙΑΣΤΙΚΗΣ. Η μαθηματικη θεωρια μετρησεως διακριτων μεγεθων λεγεται Συνδιαστικη.

(1.1). Παραδειγμα. Ας υποτεθη οτι εχουμε τρια (αμεροληπτα) νομισματα και τα ριχνουμε κατω τυχαια.

(α) Ποσα ειναι τα δυνατα αποτελεσματα αυτου του πειραματος;
Τα δυνατα αποτελεσματα ειναι: (Κ,Κ,Κ), (Κ,Κ,Γ), (Κ,Γ,Κ), (Γ,Κ,Κ), (Κ,Γ,Γ), (Γ,Κ,Γ), (Γ,Γ,Κ), (Γ,Γ,Γ) · αρα 8.

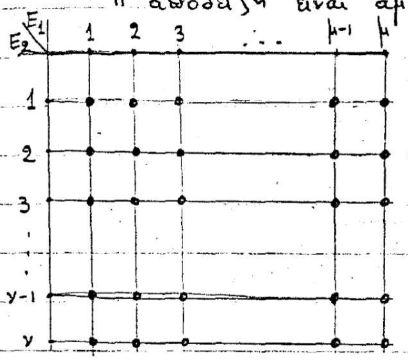
(β) Ποσα απο τα δυνατα αποτελεσματα αυτου του πειραματος περιεχουν ακριβως 2 κορωνες; Τουλαχιστον 2 κορωνες; (3, 4 αντιστοιχα

(γ) Με ποια "πιθανοτητα" το αποτελεσμα του πειραματος θα περιεχη τουλαχιστον 2 κορωνες; ($4/8 = .5$)

Απαντησαμε στα ερωτηματα (α) και (β) με απευθειας απαριθμηση των δυνατων αποτελεσματων του πειραματος. Σκεφθειτε να ειχαμε 10 νομισματα, οποτε το πειραμα θα ειχε 1.024 δυνατα αποτελεσματα. Αυτου του ειδους οι απλες απαριθμησεις — οταν συνδιαζουμε πολλα αντικειμενα συγχρονως — μπορουν να γινουν εξαιρετικα χρονοβορες ή και πρακτικα αδυνατες ακομη και με υπολογιστη. Πρεπει να χρησιμοποιουμε μια πιο αποτελεσματικη μεθοδο μετρηματος. Η μαθηματικη θεωρια μετρηματος λεγεται Συνδιαστικη ή Συνδιαστικη Αναλυση και στον διακριτο κοσμο εχει τον ρολο που εχει ο απειροστικος λογισμος στον συνεχη.

(1.2) <u>Βασικη Αρχη Μετρηματος</u>: Εαν το πειραμα Π_1 εχει ν_1 δυνατα αποτελεσματα και για καθε αποτελεσμα του πειραματος Π_1 το πειραμα Π_2 εχει ν_2 δυνατα αποτελεσματα, τοτε το πειραμα (συνδιασμος) (Π_1, Π_2) εχει $\nu_1 \cdot \nu_2$ δυνατα αποτελεσματα.

Η αποδειξη ειναι αμεση:



(1.3) <u>Παραδειγμα</u>: Σε ενα χορό παρευρισκονται 15 ανδρες και 10 γυναικε(ς). Ποσα ειναι τα δυνατα ζευγαρια (Α, Γ.);

Στη θεση Α μπορουμε να βαλουμε εναν απο τους 15 ανδρες και για καθε εναν ανδρα μπορουμε να βαλουμε στη θεση Γ μια απο τις 10 γυναικες. Αρα υπαρχουν συνολικα $15 \times 10 = 150$ δυνατα ζευγαρια.

<u>Ερωτησεις</u>: Ποσα δυνατα αποτελεσματα εχουμε αν ριξουμε δυο νομισματα; Δυο ζαρια;

(1.4). <u>Γενικη Αρχη Μετρηματος</u>: Κανουμε τα πειραματα $\Pi_1, \dots, \Pi_k$, και ας υποτεθη οτι το πειραμα

Π_1 εχει ν_1 δυνατα αποτελεσματα, και για καθε αποτελεσμα του Π_1,
το Π_2 » ν_2 » ——— », » ——— » (Π_1,Π_2),
το Π_3 » ν_3 » ——— », » ——— » (Π_1,Π_2,Π_3)
⋮
» ——— » $(\Pi_1,\dots,\Pi_{i-1})$
το Π_i » ν_i » ——— », κ.ο.κ.,

τοτε το συνθετο πειραμα $(\Pi_1,\dots,\Pi_K)$ εχει $\nu_1\cdot\nu_2\dots\nu_K$ δυνατα αποτελεσματα.

(1.5). Παραδειγμα: Ποσοι διαφορετικοι αριθμοι αυτοκινητων ειναι δυνατοι εαν το καθε πλαισιο εχει 7 θεσεις, απο τις οποιες στις 3 πρωτες μπαινουν γραμματα και στις υπολοιπες 4 αριθμοι;

$$24\times24\times24\times10\times10\times10\times10 = 138.240.000$$

(1.6) Παραδειγμα: Ποσοι 7-θεσιοι αριθμοι πλαισιων, οπως στο παραδ. 1.3 ειναι δυνατοι εαν κανενα γραμμα ή αριθμος δεν μπορουν να επαναληφθουν στο ιδιο πλαισιο;

$$24\times23\times22\times10\times9\times8\times7 = 61.205.760$$

(1.7) Παραδειγμα: Αν ριξουμε ενα (αμεροληπτο) νομισμα ν φορες, ποσες δυνατες διαταξεις υπαρχουν απο Κ και Γ;

$$\underbrace{2\times2\times\cdots\times2}_{\nu} = 2^{\nu}.$$

Χρησιμοποιοντας την γενικη αρχη μετρηματος, επαναλαβατε το παραδειγμα (1.1).

Ας υποθεθη οτι εχουμε ενα συνολο ν διαφορετικων αντικειμενων $\{a_1, a_2, \dots, a_\nu\}$.

(1.8). Αν διαταχθουν ολα τα αντικειμενα στη σειρα, ποσες διαφορετικες <u>ΔΙΑΤΑΞΕΙΣ</u>, δηλαδη διατεταγμενες ν-αδες, υπαρχουν;

$\nu\cdot(\nu-1)\cdot(\nu-2)\cdot\cdots\cdot 2\cdot 1 =: \nu!$

(1.9) Αν διατασουμε στη σειρα $\kappa \le \nu$ αντικειμενα τη φορα, ποσες διαφορετικες διατεταγμενες κ-αδες, των ν αντικειμενων, υπαρχουν;

$$\nu(\nu-1)\cdots(\nu-(\kappa-1)) = (\nu-\kappa+1)\cdots(\nu-1)\nu = \frac{\nu!}{(\nu-\kappa)!} =: (\nu)_\kappa$$

<u>Σημ.</u> $0! := 1$ και αρα $(\nu)_\nu = \frac{\nu!}{0!} = \nu!$.

(1.10). Ποσα υποσυνολα μεγεθους κ του αρχικου συνολου των ν αντικειμενων υπαρχουν; (Εδω, η διαταξη των αντικειμενων στο καθε υποσυνολο δεν λαμβανεται υπ' οψιν.)

Ας συμβολισουμε τον αριθμο που ζηταμε με Μ. Τοτε, εφοσον για καθε υποσυνολο μεγεθους κ εχουμε $\kappa!$ διαφορετικες διατεταγμενες κ-αδες, $M\cdot\kappa! = (\nu)_\kappa \Rightarrow$

$\Rightarrow M = \frac{(\nu)_\kappa}{\kappa!} = \frac{\nu!}{\kappa!\,(\nu-\kappa)!} =: \binom{\nu}{\kappa}$ — διωνυμικος συντελεστης.

Λεμε οτι $\binom{\nu}{\kappa}$ ειναι ο αριθμος των <u>ΣΥΝΔΙΑΣΜΩΝ</u> ν αντικειμενων (λαμβανομενων) κ τη φορα.

(1.11). <u>Ασκηση</u>: Αποδειξτε οτι $(a+\beta)^\nu = \sum_{\kappa=0}^{\nu} \binom{\nu}{\kappa} a^\kappa \beta^{\nu-\kappa}$.

<u>Τριγωνο Pascal</u>:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & \binom{0}{0} & & & & \\
 & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & \\
 & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & \\
 & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & \\
\binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4}
\end{array}
=
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1
\end{array}$$

(1.12). Ας υποτεθη τωρα οτι θελουμε να διαιρεσουμε το αρχικο συνολο των ν αντικειμενων σε κ διαφορετικα υποσυνολα μεγεθων $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_k$ αντιστοιχως, οπου $\Sigma_{i=1}^{k} \nu_i = \nu$. Ποσα τετοια υποσυνολα υπαρχουν;

$$\binom{\nu}{\nu_1}\binom{\nu-\nu_1}{\nu_2}\cdots\binom{\nu-\Sigma_{i=1}^{k-1}\nu_i}{\nu_k} = \frac{\nu!}{\nu_1!\,\nu_2!\ldots\nu_k!} =: \binom{\nu}{\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_k}$$

— πολυωνυμικος συντελεστης.

(1.13). <u>Ασκηση</u>: Αποδειξτε οτι $(x_1+\cdots+x_k)^{\nu} = \sum_{\{(\nu_1,\ldots,\nu_k):\ \sum_{i=1}^{k}\nu_i=\nu\}} \binom{\nu}{\nu_1,\ldots,\nu_k} x_1^{\nu_1}\ldots x_k^{\nu_k}$

(1.14). Αν αντι για την ευθεια, διαταξουμε τα ν αντικειμενα μας σε περιφερεια κυκλου εχουμε $(\nu-1)!$ διαφορετικες διαταξεις. Γιατι;

(1.15). <u>Σημ.</u> $\binom{\nu}{0} = 1$ και $\binom{\nu}{1} = \binom{\nu}{\nu-1} = \nu$.

(1.16). <u>Παραδειγμα</u> : Ας υποτεθη οτι εχουμε 10 διαφορετικες ασπρες μπαλες
8 » μαυρες »
και 7 » κοκκινες ».

Ποσες διαφορετικες διαταξεις με τις 25 μπαλες ειναι δυνατες <u>εαν</u> θελουμε να διατηρησουμε ολες με το ιδιο χρωμα μαζυ; $(10! \times 8! \times 7!) \times 3!$

Αν οι μπαλες διακρινονται μονο απο το χρωμα τους, ποσες διαφορετικες διαταξεις με τις 25 μπαλες ειναι δυνατες;

Ας υποτεθη οτι ο αριθμος που ζηταμε ειναι M· τοτε
$M \times (10!\,8!\,7!) = (10+8+7)! \Rightarrow M = 25!/(10!\,8!\,7!) = \binom{25}{10, 8, 7}$

(1.17). Μεταξυ ν ανθρωπων εκλεγμενων στη τυχη ποια η "πιθανοτητα" να εχουν ολοι διαφορετικες ημερομηνιες γεννεθλιων;

Απ. $\frac{365 \times 364 \times \cdots (365-(\nu-1))}{(365)^{\nu}} = (365)_{\nu} / (365)^{\nu}$

(1.18). Εχετε ενα συνολο με ν στοιχεια.

(α) Ποσα διαφορετικα υποσυνολα μεγεθους k ($\leq \nu$) υπαρχουν; (

(β) Ποσα διαφορετικα υποσυνολα υπαρχουν;

$$\sum_{k=0}^{\nu} \binom{\nu}{k} = \sum_{k=0}^{\nu} \binom{\nu}{k} 1^{k} 1^{\nu-k} = (1+1)^{k} = 2^{k}$$

ή $\underset{1\ 2\ 3\ 4\ \cdots\ \nu-1\ \nu}{1\ 0\ 0\ 1\ \cdots\ 1\ 0}$ 2^{ν}. (0 ↔ δεν περιλαμβανεται / 1 ↔ » » } στο υπο

(1.19). Ενα χερι του ποκερ εχει 5 καρτες τις οποιες τραβα κανεις τυχαια απο μια συνηθισμενη τραπουλα με 52 χαρτια:

Χρωματα / νουμερα & φιγουρες	Καρρο ♢	Κουπα ♡	Μπαστουνι ♠	Σπαθι ♣
1				
2		τα 52		
.		χαρτια		
.		της		
.		τραπουλας		
10				
Βαλες J				
Νταμα Q				
Ρηγας K				

$\binom{52}{5} = 2.598.960$

Ποια η "πιθανοτητα" το χερι του ποκερ να:

(α) εχει ακριβως δυο Ρηγες: $\binom{4}{2}\binom{48}{3} / \binom{52}{5} \approx .04$

(β) ειναι χρωμα (5 καρτες του ιδιου χρωματος): $\binom{4}{1}\binom{13}{5} / \binom{52}{5} \approx .0005$

(γ) ειναι φουλ $((x,x,x,y,y)$ οπου $x \neq y)$: $\frac{\binom{13}{1}\binom{4}{3} \cdot \binom{13-1}{1}\binom{4}{2}}{\binom{52}{5}} \approx .00144$

(δ) ειναι καρρε (4 ιδια νουμερα ή φιγουρες): $\frac{\binom{13}{1}\binom{4}{4} \cdot 48}{\binom{52}{5}} \approx .0002$

(ε) ειναι κεντα $(x, x+1, x+2, x+3, x+4)$: $9 \cdot 4^{5} / \binom{52}{5} \approx .0035$

(ζ) ειναι φλος (= κεντα και χρωμα): $9 \cdot 4 / \binom{52}{5} \approx .000014$

(1.20). 8 δασκαλοι ειναι να σταλουν σε 4 σχολεια.

(α) Ποσες ειναι οι δυνατες διαιρεσεις αν σε καθε σχολειο θα σταλουν 2;

$$\binom{8}{2,2,2,2} = \frac{8!}{(2!)^4} = 2.520$$

(β) Ποσες ειναι οι δυνατες διαιρεσεις;

$$\sum_{\{(\nu_1,\dots,\nu_4)\,:\,\Sigma_{i=1}^4 \nu_i = 8\}} \binom{8}{\nu_1,\nu_2,\nu_3,\nu_4} = (1+1+1+1)^8 = 4^8 = 65.536\,.$$

(1.21). Τυπος Stirling: Οταν το ν ειναι πολυ μεγαλο ο υπολογισμος του $\nu!$ ειναι εξαιρετικα δυσκολος. Τοτε το $\nu!$ μπορει να προσεγγισθη με τον τυπο του Stirling, ο οποιος εχει και θεωρητικο ενδιαφερον:

$$\lim_{\nu\to\infty} \frac{\nu!}{e^{-\nu}\,\nu^{\nu+(1/2)}\sqrt{2\pi}} = 1\,.$$

(1.22). Παραδειγμα: $\binom{\nu}{\kappa} = \frac{\nu!}{\kappa!\,(\nu-\kappa)!} \approx \frac{e^{-\nu}\,\nu^{\nu+1/2}\,(2\pi)^{1/2}}{e^{-\kappa}\,\kappa^{\kappa+1/2}\,(2\pi)\,e^{-(\nu-\kappa)}\,(\nu-\kappa)^{\nu-\kappa+1/2}}$

$$= \left(\frac{\nu}{\kappa(\nu-\kappa)\,2\pi}\right)^{1/2} \frac{\nu^\nu}{(\nu-\kappa)^{\nu-\kappa}\,\kappa^\kappa} = \left(\frac{\nu}{\kappa(\nu-\kappa)\,2\pi}\right)^{1/2} \left[\left(\frac{\kappa}{\nu}\right)^{\kappa}\left(1-\frac{\kappa}{\nu}\right)^{\nu-\kappa}\right]^{-1}.$$

(1.23). Παραδειγμα: Εχουμε ν διακριτους βωλους τους οποιους θελουμε να τοποθετησουμε σε κ διακριτα δοχεια. Ποσοι τροποι υπαρχουν;

αριθ. δοχ.	1	1	4	....	8
βωλοι:	1	2	3	---	ν

$$\underbrace{\kappa\cdot\kappa\cdot\ldots\kappa}_{\nu \text{ φορες}} = \kappa^\nu\,.$$

(1.24). Παραδειγμα: Εχουμε ν ομοιους (μη διακριτους) βωλους τους οποιους θελουμε να τοποθετησουμε σε κ διακριτα δοχεια. Ποσοι τροποι υπαρχουν;

Η απαντηση ειναι $\binom{\nu+\kappa-1}{\nu} = \binom{\nu+\kappa-1}{\kappa-1}$, και για να το δουμε αυτο θεωρειστε $\nu+\kappa-1$ θεσεις στην ευθεια (ν για τους βολους και $\kappa-1$ για τα καθετα ευθυγραμμα τμηματα |):

$\underbrace{|\ *\ |\ ***\ |\ **\ \cdots\ |\ |\ **\ }_{\nu+\kappa-1 \text{ θεσεις}}|$ (το καθε δοχειο οριζεται απο δυο διαδοχικα καθετα ευθυγραμμα τμηματα).

Τοτε μπορουμε να διαλεξουμε ειτε ν απο τις $\nu+\kappa-1$ θεσεις για βολους: $\binom{\nu+\kappa-1}{\nu}$, ειτε $\kappa-1$ απο τις $\nu+\kappa-1$ θεσεις για | : $\binom{\nu+\kappa-1}{\kappa-1}$.

(1.25) <u>Παραδειγμα</u>: Ποσες ακεραιες και μη αρνητικες λυσεις εχει η εξισωση : $x_1+x_2+\cdots+x_\kappa=\nu$; $\binom{\nu+\kappa-1}{\nu}$

Αν $\kappa \le \nu$, ποσες ακεραιες θετικες λυσεις εχει η ιδια εξισωση; Η ερωτηση ειναι η ιδια με την προηγουμενη σε σχεση με την εξισωση $x_1^*+\cdots+x_\kappa^* = \nu-\kappa$, οπου $x_i^* = x_i - 1$, $i=1,\ldots,\kappa$, και αρα η απαντηση ειναι $\binom{(\nu-\kappa)+\kappa-1}{\nu-\kappa} = \binom{\nu-1}{\nu-\kappa}$.

(1.26) <u>Παραδειγμα</u>: Ποσες διαφορετικες διαταξεις ν διαφορετικων αντικειμενων υπαρχουν αν τα αντικειμενα ειναι διατεταγμενα στη περιφερεια κυκλου;

As υποτεθη οτι ο αριθμος που ζηταμε ειναι K.

Απο καθε κυκλικη διαταξη μπορουμε να παρουμε ν διαφορετικες ευθυγραμμες διαταξεις (αρχιζοντας την καθε ευθυγραμμη διαταξη απο καποιο σημειο της κυκλικης). Το οτι καμμια απο αυτες τις ευθυγραμμες διαταξεις δεν μπορει να αντιστοιχη σε διαφορετικη κυκλικη επεται απο το οτι δυο ιδιες ευθυγραμμες θα δωσουν την αυτη κυκλικη. Αρα $K\cdot\nu=\nu! \Rightarrow K=(\nu-1)!$.

2. ΤΑ ΑΞΙΩΜΑΤΑ ΤΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ.

Οταν εκτελουμε ενα μη τετριμμενο πειραμα δεν γνωριζουμε φυσικα το αποτελεσμα του εκ των προτερων. Γνωριζουμε ομως το συνολο ολων των δυνατων αποτελεσματων του. Για παραδειγμα οταν ριχνουμε ενα ζαρι το αποτελεσμα θα ανηκη στο συνολο $\{1,2,3,4,5,6\}$.

(2.1). Ορισμος: Το συνολο Ω ολων των δυνατων αποτελεσματων ενος πειραματος λεγεται δειγματικος χωρος του πειραματος.

Το συνολο των υποσυνολων του Ω θα το συμβολιζουμε με $\mathcal{P}_\Omega := \{A : A \subseteq \Omega\}$.

Τα ενδεχομενα ενος πειραματος ειναι συγκεκριμενα υποσυνολα του δειγματικου χωρου Ω. Για τεχνικους λογους θα δοσουμε μια αλγεβρικη δομη στο συνολο $\mathcal{A}$ των ενδεχομενων ενος πειραματος. Θα θυμηθουμε ομως πρωτα μερικους ορισμους απο τη θεωρια συνολων: εαν $A, B \subseteq \Omega$.

$A \cup B = \{x : x \in A \text{ ή } x \in B\}$ — ενωση,
$A \cap B = \{x : x \in A \text{ και } x \in B\}$ — τομη,
$A^c = \{x \in \Omega : x \notin A\}$ — συμπληρωμα,
$A \setminus B = A \cap B^c$ — διαφορα,
$\emptyset$ συμβολιζει το κενο συνολο.

Επισης για μια ακολουθια συνολων $A_1, A_2, \dots, A_\nu, \dots \subseteq \Omega$, οριζουμε:

$$\bigcup_{i=1}^{\nu} A_i = \{x : x \in A_i \text{ για καθολο } i=1,2,\dots,\nu\},$$

$$\bigcap_{i=1}^{\nu} A_i = \{x : x \in A_i \text{ για ολα τα } i=1,\dots,\nu\},$$

και στο οριο:

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i := \{x : x \in A_i \text{ για καθολο } i=1,2,\dots\},$$

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i := \{x : x \in A_i \text{ για ολα τα } i=1,2,\dots\}.$$

Μπορουμε να θεωρουμε τα $\overset{\nu}{\bigcup}$, $\overset{\nu}{\bigcap}$ σαν μερικες περιπτωσεις των $\overset{\infty}{\bigcup}$, $\overset{\infty}{\bigcap}$ με $A_i = \emptyset$ για $i>\nu$ και $A_i = \Omega$ για $i>\nu$ αντιστοιχως.

Αποδειξτε τα ακολουθα σαν ασκηση:

$A \cup B = B \cup A$ — αντιμεταθετικη
$A \cap B = B \cap A$

$(A \cup B) \cup \Gamma = A \cup (B \cup \Gamma)$ $(= A \cup B \cup \Gamma)$ — προσεταιριστικη ιδιοτητα
$(A \cap B) \cap \Gamma = A \cap (B \cap \Gamma)$ $(= A \cap B \cap \Gamma)$

$(A \cup B) \cap \Gamma = (A \cap \Gamma) \cup (B \cap \Gamma)$ — επιμεριστικη ιδιοτητα
$(A \cap B) \cup \Gamma = (A \cup \Gamma) \cap (B \cup \Gamma)$

$\left(\bigcup_{i=1}^{\nu} A_i\right)^c = \bigcap_{i=1}^{\nu} A_i^c$

$\left(\bigcap_{i=1}^{\nu} A_i\right)^c = \bigcup_{i=1}^{\nu} A_i^c$. — κανονας De Morgan (ισχυει και για $\nu = \infty$)

(2.2) <u>Ορισμος</u>. Εστω Ω ενας δειγματικος χωρος (καποιου πειραματος). Το υποσυνολο $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}_\Omega$ λεγεται μια (σ-) <u>αλγεβρα ενδεχομενων</u> εαν:

(i) $\Omega \in \mathcal{A}$

(ii) $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$

(iii) $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$.

Ενα <u>πειραμα</u> οριζεται απο το ζευγος $(\Omega, \mathcal{A})$ (μετρησιμος χωρος στη γλωσσα της θεωριας μετρου), οπου το συνολο των <u>δυνατων αποτελεσματων</u> του πειραματος ειναι το Ω, τα δε <u>ενδεχομενα</u> ειναι τα στοιχεια της αλγεβρας $\mathcal{A}$.

Για παραδειγμα ας επιστρεψουμε στο ζαρι:

(2.3) <u>Παραδειγμα</u>:

$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$ και πανω στο Ω μπορουμε να ορισουμε διαφορες αλγεβρες ενδεχομενων, π.χ.:

(α) $\mathcal{A} = \mathcal{P}_\Omega$

(β) $\mathcal{A} = \{\Omega, \emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}, \{2,3,\ldots,6\}, \{1,3,\ldots,6\}, \{3,\ldots,6\}\}$,

(γ) $\mathcal{A} = \{\Omega, \emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}, \{2,\ldots,6\}, \{1,3,\ldots,6\}, \{1,2,4,5,6\}, \{3,\ldots,6\}, \{2,4,5,6\}, \{1,4,5,6\}, \{4,5,6\}, \{2,\ldots,6\}, \ldots\}$.

Θα λεμε οτι το <u>ενδεχομενο A συνεβη</u> εαν το αποτελεσμα α του πειραματος $(\Omega, \mathcal{A})$ ανηκει στο A $(\alpha \in A)$.

Ενα χρησιμο παραδειγμα που δειχνει τις συνολοθεωρητικες εκφρασεις καθημερινων εκφρασεων ειναι το εξης:

(2.4). <u>Παραδειγμα.</u> Ας θεωρησουμε τα ενδεχομενα A, B και Γ. Θα βρουμε συνολοθεωρητικες εκφρασεις των εξης ενδεχομενων: Απο τα A, B και Γ,

(α) μονο το A συμβαινει : $A \cap B^c \cap \Gamma^c$
(β) το A και B συμβαινουν αλλα οχι το Γ : $A \cap B \cap \Gamma^c$
(γ) τουλαχιστον ενα συμβαινει : $A \cup B \cup \Gamma$
(δ) τουλαχιστον δυο συμβαινουν : $(A\cap B)\cup(A\cap\Gamma)\cup(B\cap\Gamma)$
(ε) και τα τρια συμβαινουν : $A \cap B \cap \Gamma$
(στ) κανενα απ' τα τρια δεν συμβαινει : $A^c \cap B^c \cap \Gamma^c = (A \cup B \cup \Gamma)^c$
(ζ) το πολυ ενα συμβαινει : $(A\cap B^c\cap\Gamma^c)\cup(B\cap A^c\cap\Gamma^c)\cup(\Gamma\cap A^c\cap B^c)\cup(A^c\cap B^c\cap\Gamma^c)$
(η) το πολυ δυο συμβαινουν : $(A\cap B\cap\Gamma)^c$
(θ) ακριβως δυο συμβαινουν : $(A\cap B\cap\Gamma^c)\cup(A\cap\Gamma\cap B^c)\cup(B\cap\Gamma\cap A^c)$
(ι) το πολυ τρια συμβαινουν : Ω

<u>Αξιωματικη Θεμελιωση των Πιθανοτητων:</u>

Ας υποτεθη οτι ενα πειραμα $(\Omega, \mathcal{A})$ επαναλαμβανεται πολλες φορες κατω απο τις ιδιες ακριβως συνθηκες. Για καθε ενδεχομενο $A \in \mathcal{A}$ ας ορισουμε το

$\nu(A) :=$ αριθμο των φορων που το A συμβαινει κατα τις πρωτες ν επαναληψεις του πειραματος.

Ο συχνοθεωρητικος ορισμος της πιθανοτητος του ενδεχομενου A ειναι

(2.5) $$P(A) := \lim_{\nu \to \infty} \frac{\nu(A)}{\nu}.$$

Η υπαρξη αυτου του οριου ειναι ενα συνθετο (και αρα αποφευκταιο) <u>αξιωμα</u>.

Η συγχρονη αξιωματικη θεωρια πιθανοτητων (Kolmogorov), αρχιζει με ενα μικρο αριθμο απλων αξιωματων, τα οποια συνεπαγονται – στη ουσια – την υπαρξη του οριου (2.5) (Νομοι των Μεγαλων Αριθμων (ΝΜΑ)). Παραθετουμε αυτα τα αξιωματα αμεσως:

(2.6) *Ορισμος.* Στο πειραμα $(\Omega, \mathcal{A})$ οριζουμε την συναρτηση *πιθανοτητος*:

$P : \mathcal{A} \ni A \longmapsto P(A) \in \mathbb{R}$, η οποια αξιωνουμε να πληρη τα εξης:

(i) $0 \leq P(A) \leq 1 \quad \forall A \in \mathcal{A}$,

(ii) $P(\Omega) = 1$

(iii) Για καθε ακολουθια ενδεχομενων $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A}$, τετοια ωστε $A_i \cap A_j = \emptyset \quad \forall i \neq j$, εχουμε οτι

$$P\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\Big) = \Sigma_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

Για καθε $A \in \mathcal{A}$ ο αριθμος $P(A) \in [0,1]$, ειναι εξ ορισμου η *πιθανοτητα* του ενδεχομενου A. Την τριαδα $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ θα ονομαζουμε *χωρο με πιθανοτητα*.

(2.7). *Παραδειγμα:* Αμεροληπτο ζαρι ειναι εξ ορισμου εκεινο για το οποιο ολα τα δυνατα ενδεχομενα $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ειναι εξ ισου πιθανα. Αρα *οριζουμε*:

$P(\{1\}) = \dots = P(\{6\}) = \frac{1}{\#\Omega} = \frac{1}{6}$.

Απο αυτη την απεικονιση P, και τα αξιωματα του ορισμου (2.6), μπορουμε να βρουμε την πιθανοτητα καθε αλλου ενδεχομενου, π.χ., $P(\{1,2,3\}) = P\big(\bigcup_{i=1}^{3}\{i\}\big) = \Sigma_{i=1}^{3} P(\{i\}) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$.

Το αμερόληπτο ζάρι είναι μια ειδική περίπτωση μιας μεγάλης κατηγορίας χώρων με πιθανότητα $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ που χαρακτηρίζονται από την ιδιότητα $P(\{a\}) = \frac{1}{\#\Omega}$ $\forall a \in \Omega$ (αναγκαστικά $\#\Omega < +\infty$).
Αυτοί οι χώροι είναι γνωστοί σαν χώροι με <u>ισοπίθανα δυνατά αποτελέσματα</u> (ΙΔΑ).

Θα μας χρειασθεί η ακόλουθη ορολογία:

<u>(2.8) Ορισμός.</u> Τα ενδεχόμενα μιας ακολουθίας $(A_i)_{i=1}^{\infty}$ λέγονται <u>ασυμβίβαστα</u> εάν $i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset$.

Θα δούμε τώρα μερικές άλλες συνέπειες των αξιωμάτων πιθανότητος:

(2.9) $P(\emptyset) = 0$

Ας ορίσουμε $A_1 = \Omega$, $A_i = \emptyset$ $\forall i \geq 2$. Τότε η ακολουθία $(A_i)_{i=1}^{\infty}$ αποτελείται από ασυμβίβαστα ενδεχόμενα και $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \Omega$.
Τότε, από τα αξιώματα 2.6 (ii) & (iii) έχουμε:

$$1 = P(\Omega) = P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) = P(\Omega) + \sum_{i=2}^{\infty} P(A_i) =$$
$$= 1 + \sum_{i=2}^{\infty} P(A_i) \Rightarrow \sum_{i=2}^{\infty} P(A_i) = 0 \Rightarrow P(\emptyset) = 0 .$$

(2.10) Εάν τα ενδεχόμενα $(A_i)_{i=1}^{\nu}$ είναι ασυμβίβαστα τότε $P\left(\bigcup_{i=1}^{\nu} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\nu} P(A_i)$.

Θέτουμε $A_i = \emptyset$ $\forall i \geq \nu+1$. και από το αξίωμα 2.6 (iii) έχουμε:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\nu} A_i\right) = P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) = \sum_{i=1}^{\nu} P(A_i) + \sum_{i=\nu+1}^{\infty} P(A_i)$$
$$= \sum_{i=1}^{\nu} P(A_i) .$$

(2.11) $P(A^c) = 1 - P(A)$

Έχουμε $A \cap A^c = \emptyset$ και $A \cup A^c = \Omega \Rightarrow$
$\Rightarrow 1 = P(A \dot{\cup} A^c) = P(A) + P(A^c)$.

(2.12) $A \subseteq B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$

$B = A \cup (B \setminus A) \Rightarrow P(B) = P(A) + P(B \cap A^c) \geq P(A)$.

(2.13) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B \cap A^c)$ και $P(B) = P(A \cap B) + P(A^c \cap B)$,
οπότε λύνουμε τη μία ως προς $P(A^c \cap B)$ και αντικαθιστούμε στην άλλη.

Παρόμοια:
$P(A \cup B \cup \Gamma) = P(A) + P(B) + P(\Gamma) - P(A \cap B) - P(A \cap \Gamma) - P(B \cap \Gamma) + P(A \cap B \cap \Gamma)$
και γενικότερα:
η πιθανότητα της ένωσης ν ενδεχομένων =
αθροισμα των πιθανοτήτων των ενδεχομένων +
− αθροισμα των πιθανοτήτων των τομών των ενδεχομένων ανά δύο
+ » ———————————— » τρία
− » ———————————— » τέσσερα
κ.ο.κ. . .

(2.14) Ανισότητα Boole : $P(\bigcup_{i=1}^{\nu} A_i) \leq \Sigma_{i=1}^{\nu} P(A_i)$ (ισχύει και για $\nu = \infty$)
Η απόδειξη με επαγωγή.

$\bigcap_{i=1}^{\nu} A_i$

(2.15) Ανισοτητα Bonferroni : $P(\bigcup_{i=1}^{\nu} A_i) \geq \sum_{i=1}^{\nu} P(A_i) - (\nu-1)$

Για την αποδειξη χρησιμοποιουμε την (2.14) και τον κανονα De Morgan : $P(\bigcup_{i=1}^{\nu} A_i^c) \leq \sum_{i=1}^{\nu} P(A_i^c) \Rightarrow$

$$\Rightarrow 1 - P(\bigcap_{i=1}^{\nu} A_i) \leq \nu - \sum_{i=1}^{\nu} P(A_i) .$$

(2.16). <u>Παραδειγμα</u>: Ας θεωρησουμε τα ενδεχομενα A, B ενος πειραματος $(\Omega, \mathcal{A})$ και ας ορισουμε $P(A) = 1/2$, $P(B) = 1/3$, $P(A \cap B) = 1/6$.

(α) $P(\text{τουλαχιστον ενα συμβαινει}) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 2/3$.

(β) $P(\text{μονο το } A \text{ συμβαινει}) = P(A \cap B^c) = P(A) - P(A \cap B) = \frac{1}{2} - 1/6 = 1/3$.

(γ) $P(\text{ουτε το } A \text{ ουτε το } B \text{ συμβαινει}) = P(A^c \cap B^c) = 1 - P(A \cup B) = 1 - 2/3 = 1/3$.

(δ) $P(\text{το πολυ ενα συμβαινει}) = P((A \cap B)^c) = 1 - P(A \cap B) = 1 - 1/6 = 5/6$.

(2.17). <u>Παραδειγμα</u>: Μια συνθετη μηχανη αποτελειται απο 5 εξαρτηματα $E_1, E_2, \dots, E_5$, τα οποια χαλουν με πιθανοτητες $P(E_1^c) = 0.1$, $P(E_2^c) = P(E_3^c) = 0,15$, $P(E_4^c) = P(E_5^c) = 0,05$. Βρητε ενα κατωτερο φραγμα για την πιθανοτητα οτι ολα τα εξαρτηματα, και αρα η μηχανη, δουλευει κανονικα.

$P(E_1) = 1 - P(E_1^c) = 0,9$, $P(E_2) = P(E_3) = 0.85$, $P(E_4) = P(E_5) = 0.95$

Μετα, απο τη ανισοτητα Bonferroni, εχουμε :
$P(\bigcap_{i=1}^{5} E_i) \geq \sum_{i=1}^{5} P(E_i) - 4 = 1/2$.

<u>Η πιθανοτητα σαν συνεχης συνολοσυναρτηση</u>.

Θα ορισουμε πρωτα μια εννοια οριου για ακολουθιες ενδεχομενων

(2.18) <u>Ορισμος</u>. Μια ακολουθια ενδεχομενων $(A_i)_{i=1}^{\infty}$ λεγεται <u>αυξουσα</u> (↑) εαν $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \cdots \subseteq A_\nu \subseteq A_{\nu+1} \subseteq \cdots$, και <u>φθινουσα</u> (↓) εαν $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \cdots \supseteq A_\nu \supseteq A_{\nu+1} \supseteq \cdots$.

Για μια μονοτονη (↑ ή ↓) ακολουθια (A_ν) οριζουμε αντιστοιχα τα ενδεχομενα:

(2.19) $$\lim_{\nu\to\infty} A_\nu := \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \quad \text{εαν } (A_\nu)\uparrow,$$

και

(2.20) $$\lim_{\nu\to\infty} A_\nu := \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \quad \text{εαν } (A_\nu)\downarrow.$$

Εαν η ακολουθια (A_ν) δεν ειναι μονοτονη, οριζουμε αρχικα τα ενδεχομενα $\limsup_{\nu\to\infty}$ και $\liminf_{\nu\to\infty}$, σε αναλογια με την περιπτωση ακολουθιών πραγματικων αριθμων:

$\left(\bigcup_{i=n}^{\infty} A_i\right)_{n=1}^{\infty} \downarrow$ και αρα απο την (2.19) μπορουμε να ορισουμε

(2.21) $$\limsup_{\nu\to\infty} A_\nu := \lim_{n\to\infty}\left(\bigcup_{i=n}^{\infty} A_i\right) = \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{i=n}^{\infty} A_i = \text{συνολο των σημειων}$$

που περιεχονται σε ενα απειρο αριθμο ενδεχομενων της ακολουθιας (A_ν).

Επισης $\left(\bigcap_{i=n}^{\infty} A_i\right)_{n=1}^{\infty} \uparrow$ και αρα απο την (2.20) οριζουμε:

(2.22) $$\liminf_{\nu\to\infty} A_\nu := \lim_{n\to\infty}\bigcap_{i=n}^{\infty} A_i = \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{i=n}^{\infty} A_i = \text{συνολο των σημειων}$$

που περιεχονται σε ολα τα ενδεχομενα της (A_ν) εκτος ενος πεπερασμενου αριθμου.

Για παραδειγμα θεωρησε την ακολουθια $(A_\nu)_{\nu=1}^{\infty}$, όπου $A_{2k} = \{1\}$, $A_{2k+1} = \{2\}$, $k = 1, 2, \ldots$. Τότε,

$\liminf_{\nu\to\infty} A_\nu = \emptyset$ και $\limsup_{\nu\to\infty} A_\nu = \{1,2\}$.

Γενικά,

(2.23) $\liminf_{\nu\to\infty} A_\nu \subseteq \limsup_{\nu\to\infty} A_\nu$,

διότι εάν ένα σημείο ανήκει σε όλα τα ενδεχόμενα της (A_ν) εκτός ενός πεπερασμένου αριθμού, τότε ανήκει σε άπειρα.

Εάν <u>επιπλέον</u> $\liminf_{\nu\to\infty} A_\nu = \limsup_{\nu\to\infty} A_\nu$, τότε λέμε ότι

(2.24) $\exists \lim_{\nu\to\infty} A_\nu := \liminf_{\nu\to\infty} A_\nu = \limsup_{\nu\to\infty} A_\nu$.

Μια σπουδαία ιδιότητα της συνάρτησης πιθανότητας είναι η συνέχειά της:

(2.25) <u>Θεώρημα:</u> Για κάθε ακολουθία ενδεχομένων (A_ν), τέτοια ώστε το όριο $\lim_{\nu\to\infty} A_\nu$ υπάρχει, έχουμε ότι:

$$P(\lim_{\nu\to\infty} A_\nu) = \lim_{\nu\to\infty} P(A_\nu).$$

<u>Απόδειξη:</u>

(a) Στην αρχή θα αποδείξουμε το θεώρημα για αύξουσες ακολουθίες, δηλαδή $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \cdots \subseteq A_n \subseteq \cdots$. Τότε $A_\nu = \bigcup_{i=1}^{\nu} A_i$.

Ορίζουμε: $B_1 = A_1$ και για $\nu>1$ $B_\nu = A_\nu \setminus A_{\nu-1} = A_\nu \cap A_{\nu-1}^c$,
ούτως ώστε τα ενδεχόμενα $(B_\nu)_{\nu=1}^\infty$ είναι <u>ασυμβίβαστα</u>;

και $\bigcup_{i=1}^{\nu} A_i = \bigcup_{i=1}^{\nu} B_i \quad \forall \nu \geq 1$,

και $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$.

Τότε,

$$P(\lim_{\nu\to\infty} A_\nu) = P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = P(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i)$$

$= \sum_{i=1}^{\infty} P(B_i)$ από το αξίωμα 2.6 (iii),

$= \lim_{\nu\to\infty} \sum_{i=1}^{\nu} P(B_i) = \lim_{\nu\to\infty} P(\bigcup_{i=1}^{\nu} B_i)$ από την (2.10),

$= \lim_{\nu\to\infty} P(\bigcup_{i=1}^{\nu} A_i) = \lim_{\nu\to\infty} P(A_\nu)$.

(β) Τώρα, στη περίπτωση που η (A_ν) είναι φθίνουσα,
δηλαδή $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \cdots \supseteq A_\nu \supseteq \cdots$, η (A_ν^c) είναι αύξουσα
και άρα από το πρώτο μέρος της αποδείξεως:

$1 - P(\lim_{\nu\to\infty} A_\nu) = 1 - P(\bigcap_{\nu=1}^{\infty} A_\nu) = P((\bigcap_{\nu=1}^{\infty} A_\nu)^c)$ από την (2.11),

$= P(\bigcup_{\nu=1}^{\infty} A_\nu^c) = P(\lim_{\nu\to\infty} A_\nu^c) = \lim_{\nu\to\infty} P(A_\nu^c)$ από μέρος (α),

$= 1 - \lim_{\nu\to\infty} P(A_\nu)$.

(γ) Στη γενική τώρα περίπτωση,

$\underbrace{\limsup_{\nu\to\infty} P(A_\nu)} \leq \limsup_{\nu\to\infty} P(\bigcup_{k=\nu}^{\infty} A_k) = \lim_{\nu\to\infty} P(\bigcup_{k=\nu}^{\infty} A_k) =$

$= P(\lim_{\nu\to\infty} \bigcup_{k=\nu}^{\infty} A_k)$ αϖο το μερος (β),

$= P(\bigcap_{\nu=1}^{\infty}\bigcup_{k=\nu}^{\infty} A_k) = P(\limsup_{\nu\to\infty} A_\nu) = \underbrace{P(\lim_{\nu\to\infty} A_\nu)} = P(\liminf_{\nu\to\infty} A_\nu)$ εξ υϖοθεσεως

$= P(\bigcup_{\nu=1}^{\infty}\bigcap_{k=\nu}^{\infty} A_k) = P(\lim_{\nu\to\infty}\bigcap_{k=\nu}^{\infty} A_k) = \lim_{\nu\to\infty} P(\bigcap_{k=\nu}^{\infty} A_k)$ αϖο μερος (α)

$= \liminf_{\nu\to\infty} P(\bigcap_{k=\nu}^{\infty} A_k) \leq \underbrace{\liminf_{\nu\to\infty} P(A_\nu)}$.

Αλλα παντοτε $\limsup \geq \liminf$ και αρα ολες οι ϖροηγουμενες εκφρασεις ειναι ισες. Συγκεκριμμενα:

$P(\lim_{\nu\to\infty} A_\nu) = \limsup_{\nu\to\infty} P(A_\nu) = \liminf_{\nu\to\infty} P(A_\nu) = \lim_{\nu\to\infty} P(A_\nu)$. ▯

(2.26) <u>Σημειωση</u>: Τα τρια αξιωματα του ορισμου (2.6) της πιθανοσυναρτησης ειναι ισοδυναμα με τα εξης τεσσαρα:

$0 \leq P(A) \leq 1 \quad \forall A \in \mathcal{A}$

$P(\Omega) = 1$

$A_1 \cap A_2 = \emptyset \Rightarrow P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2)$ (ασθενεστερο του 2.6 (iii))

και $\exists \lim_{\nu\to\infty} A_\nu \Rightarrow P(\lim_{\nu\to\infty} A_\nu) = \lim_{\nu\to\infty} P(A_\nu)$.

Για εξασκηση στον υϖολογισμο πιθανοτητων θα εργασθουμε με μια κατηγορια αϖλων και συγχρονως ενδιαφεροντων χωρων:

<u>Χωροι με ισοϖιθανα δυνατα αϖοτελεσματα (ΙΔΑ)</u>:

Εχει εννοια να θεωρησουμε μονο ϖεϖερασμενους δειγματικους χωρους (γιατι;), δηλαδη $\#\Omega < +\infty$, ας ϖουμε

$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N\}$. Θα θεωρησουμε $\mathcal{A} = \mathcal{P}_\Omega$ και θα ορισουμε την πιθανοσυναρτηση $P(\cdot)$ απο τη σχεση:

$P(\{\omega_1\}) = P(\{\omega_2\}) = \dots = P(\{\omega_N\})$,

δηλαδη θα υποθεσουμε οτι ολα τα δυνατα αποτελεσματα (στοιχειωδη ενδεχομενα) του πειραματος $(\Omega, \mathcal{P}_\Omega)$ ειναι ισοπιθανα. Τοτε απο τα αξιωματα 2.6 (ii) & (iii) της πιθανοτητος εχουμε οτι

$$P(\{\omega_i\}) = \frac{1}{\#\Omega} = \frac{1}{N} \quad \forall\, i = 1, \dots, N.$$

Παραδειγματα τετοιων πειραματων περιλαμβανουν:

(α) το ριξιμο αμεροληπτου νομισματος: $\Omega = \{K, \Gamma\}$, $P(\{K\}) = P(\{\Gamma\}) = 1/2$,

(β) το ριξιμο αμεροληπτου ζαριου: $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$, $P(\{1\}) = \dots = P(\{6\}) = 1/6$,

(γ) το ριξιμο δυο αμεροληπτων διακεκριμενων ζαριων: $\Omega = \{(i,j),\ i,j = 1,\dots,6\}$, με $\#\Omega = 6^2 = 36$ και αρα $P(\{(i,j)\}) = \frac{1}{36}$ $\forall (i,j)$,

και αλλα.

(2.27) <u>Παραδειγμα</u>: Στο ριξιμο δυο αμεροληπτων (μη διακριτων) ζαριων, ποια ειναι η πιθανοτητα να φερη κανεις:

(α) εναν ασσο και ενα εξι;

(β) ασσους;

(γ) αθροισμα 7;

Απαντηση: (α) $P(\{(1,6),(6,1)\}) = P(\{(1,6)\}) + P(\{(6,1)\}) = \frac{1}{36}+\frac{1}{36} = \frac{1}{18}$.

(β) $P(\{(1,1)\}) = \frac{1}{36}$

(γ) $P(\{(1,6),(6,1),(2,5),(5,2),(3,4),(4,3)\}) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

2.28) Παραδειγμα: Ενα δοχειο περιεχει 6 ασπρους και 5 μαυρους βωλους.

(α) (Δειγματοληψια χωρις επαναθεση) Εαν τραβηξουμε τυχαια δυο βωλους απ' το δοχειο, ποια ειναι η πιθανοτητα να ειναι:

(i) και οι δυο ασπροι; $\binom{6}{2}\binom{5}{0}/\binom{11}{2}$

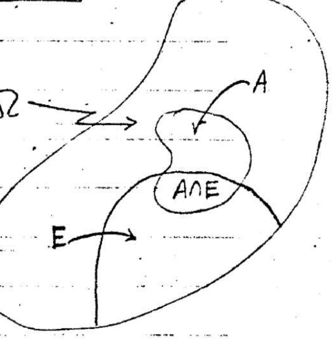
(ii) ενας ασπρος και ενας μαυρος; $\binom{6}{1}\binom{5}{1}/\binom{11}{2}$

(β) (Δειγματοληψια με επαναθεση) Εαν τραβηξουμε τυχαια ενα βωλο, σημειωσουμε το χρωμα του και τον επιστρεψουμε στο δοχειο, μετα δε τραβηξουμε δευτερο βωλο και σημειωσουμε το χρωμα του, ποια ειναι η πιθανοτητα να ειναι:

(i) και οι δυο ασπροι; $6^2/11^2$

(ii) ενας ασπρος και ενας μαυρος; $P(\{(A,M),(M,A)\}) = \frac{6\times5}{11^2} + \frac{5\times6}{11^2} = \frac{60}{11^2}$.

3. ΔΕΣΜΕΥΜΕΝΕΣ (Ή ΥΠΟ ΣΥΝΘΗΚΕΣ) ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ ΚΑΙ ΑΝΕΞΑΡΤΗΣΙΑ.



Ας υποτεθη οτι εχουμε προς εκτελεση καποιο πειραμα $(\Omega,\mathcal{A})$ με πιθανοσυναρτηση $P(\cdot)$, οταν μας ερχεται η επι πλεον πληροφορια οτι το αποτελεσμα $\omega \in \Omega$ του πειραματος — οποιο και αν ειναι τελικα — πρεπει (συνθηκη, δεσμευση) να ανηκη στο ενδεχομενο $E \in \mathcal{A}$. Διαισθητικα, εαν $P(E) \neq 1$ και εμεις αγνοησουμε την πληροφορια $\omega \in E$, τοτε η πιθανοθεωρητικη αναλυση του πειραματος θα "αδικηθη". Η ενδιαφερουσα ερωτηση εδω ειναι: πως ακριβως η πληροφορια $\omega \in E \in \mathcal{A}$ μεταβαλει τον αρμοδιο χώρο πιθανοτητος απο $(\Omega,\mathcal{A},P)$ στον $(\Omega_E,\mathcal{A}_E,P_E)$ (ας πουμε);

Εφοσον εχουμε την πληροφορια οτι $\omega \in E$, ο μονος τροπος που ένα ενδεχόμενο $A \in \mathcal{A}$ μπορει να συμβη ειναι να συμβη το ενδεχομενο $A \cap E \in \mathcal{A}$. Αρα μπορουμε να θεωρησουμε το $\Omega_E := E \cap \Omega = E$ σαν τον νεο δειγματικο χωρο (εφοσον κανενα απο τα σημεια του $\Omega \setminus E$ δεν ειναι πλεον δυνατα αποτελεσματα) και την $\mathcal{A}_E := \{A \cap E : A \in \mathcal{A}\} \subseteq \mathcal{A}$ σαν την νεα (σ-) αλγεβρα ενδεχομενων. Επισης εφοσον το $E^c \in \mathcal{A}$ δεν μπορει πλεον να συμβη, ολη η "μαζα" πιθανοτητος πρεπει να συγκεντρωνεται στο E, δηλαδη $P_E(E) = 1$. Επισης, εφοσον καποιο ενδεχομενο $A \in \mathcal{A}$ ή $B \in \mathcal{A}$ μπορει να συμβη εαν και μονον εαν το $A \cap E$ ή αντιστοιχα το $B \cap E$ συμβη, ειναι λογικο να υποθεσουμε οτι

$$\frac{P_E(A)}{P_E(B)} = \frac{P(A \cap E)}{P(B \cap E)} \quad \forall (A,B) \in \mathcal{A} \times \mathcal{A}.$$

Αρα για την ιδικη περιπτωση που $B = E$ παιρνουμε την ακολουθη σχεση αναμεσα στη νεα P_E και στη παλαια P πιθανοσυναρτηση:

$$P_E(A) = \frac{P(A \cap E)}{P(E)} \quad \forall A \in \mathcal{A}.$$

Εχει εδικρατησει να συμβολιζεται η $P_E(\cdot)$ ως $P(\cdot|E)$.

(3.1). Ορισμος: Εστω χωρος με πιθανοτητα $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Εαν $E \in \mathcal{A}$ ειναι τετοιο ωστε $P(E) \neq 0$, οριζουμε την δεσμευμενη (ή υπο συνθηκες) πιθανοτητα του $A \in \mathcal{A}$ δεδομενου του E με

$$P(A|E) := \frac{P(A \cap E)}{P(E)} \quad \forall A \in \mathcal{A}.$$

(3.2) Ασκηση: Να δειχθη οτι εαν ο $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ειναι χωρος με πιθανοτητα, τοτε $\forall E \in \mathcal{A} : P(E) > 0$, η τριαδα $(E, \mathcal{A}_E, P(\cdot|E))$ ειναι επισης χωρος με πιθανοτητα, οπου $\mathcal{A}_E := \{ A \cap E \mid A \in \mathcal{A} \}$.

Συνηθως ενας πειραματιστης (μηχανικος, γιατρος κ.τ.λ.), πριν εκτελεσει καποιο πειραμα $(\Omega, \mathcal{A})$, εχει "a priori" πληροφοριες – γνωσεις – βασισμενες στη θεωρια της επιστημης του ή σε προηγουμενη εμπειρια του (πειραματικη ή μη) σχετικα με τα ενδεχομενα του πειραματος του και την αρμοδια πιθανοσυναρτηση του. Οι δεσμευμενες πιθανοτητες αποτελουν ενα μαθηματικο πλαισιο το οποιο επιτρεπει την χρηση ποσοτικων – εστω και κατα προσεγγιση – ή ακομη και ποιοτικων "a priori" πληροφοριων στην πιθανοθεωρητικη αναλυση των πειραματων καθως επισης και στις στατιστικες προβλεψεις, εκτιμησεις κ.τ.λ.

Ενας αλλος σπουδαιος ρολος που παιζουν οι δεσμευμενες πιθανοτητες στη θεωρια και στην πραξη ειναι οτι επιτρεπουν την αναγωγη της λυσεως ενος συνθετου προβληματος στη λυση πολλων απλουστερων. Αυτο επιτυγχανεται μεσω του τυπου ολικης πιθανοτητος:

Εστω χωρος με πιθανοτητα $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ και ασυμβιβαστα ενδεχομενα $E_1, E_2, \ldots, E_\nu \in \mathcal{A}$ τετοια ωστε $\bigcup_{i=1}^{\nu} E_i = \Omega$. Τοτε

$$P(A) = \Sigma_{i=1}^{n} P(A|E_i)P(E_i) \quad \forall A \in \mathcal{A}. \tag{3.3}$$

Η αποδειξη ειναι πολυ απλη :

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A \cap \Omega) = P(A \cap (\textstyle\bigcup_{i=1}^{\nu} E_i)) = P(\textstyle\bigcup_{i=1}^{\nu}(A \cap E_i)) \\ &= \Sigma_{i=1}^{\nu} P(A \cap E_i) \quad , \text{ εφοσον τα } (A \cap E_i)_{i=1}^{\nu} \text{ ειναι ασυμβιβαστα,} \\ &= \Sigma_{i=1}^{\nu} P(A|E_i)P(E_i) \quad \text{απο τον ορισμο (3.1).} \end{aligned}$$

(3.4) <u>Παραδειγμα:</u> Ας υποθεσουμε οτι ενας φοιτητης ο οποιος ενδιαφερεται εξ ισου για Γεωλογια και Στατιστικη, δηλαδη $P(\Gamma) = P(\Sigma)$, ξερει οτι θα παρη Αριστα στη Γεωλογια με πιθανοτητα $1/2$, ενω στη Στατιστικη θα παρη Αριστα με πιθανοτητα $1/3$. Υποθετουμε οτι θα παρη ακριβως ενα απο τα δυο μαθηματα. Ποια ειναι η πιθανοτητα

(α) να παρη Γεωλογια και Αριστα σ' αυτην;

(β) να παρη Στατιστικη και Αριστα σ' αυτην;

<u>Απ.</u> Γνωριζουμε οτι $P(\Sigma) = P(\Gamma) = 1/2$, $P(A|\Sigma) = 1/3$ και $P(A|\Gamma) = 1/2$. Αρα:

(α) $P(A \cap \Gamma) = P(A|\Gamma)P(\Gamma) = 1/2 \cdot 1/2 = \frac{1}{4}$,

(β) $P(A \cap \Sigma) = P(A|\Sigma)P(\Sigma) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$.

(3.5) <u>Παραδειγμα:</u> Ενα δοχειο περιεχει 15 Λευκους, 10 Κιτρινους και 5 Μαυρους βωλους. Διαλεγουμε τυχαια ενα βωλο απο το δοχειο. Ποια η πιθανοτητα να ειναι κιτρινος αν ξερουμε οτι δεν ειναι μαυρος.

<u>Απ.</u> $$P(K|M^c) = \frac{P(K \cap M^c)}{P(M^c)} = \frac{P(K)}{1-P(M)} = \frac{\frac{10}{30}}{\frac{25}{30}} = 0{,}4.$$

(3.6) <u>Παραδειγμα:</u> Ενα αεροπλανο εχει συντριβη μεσα σε μια σχετικα μεγαλη περιοχη, η οποια χωριζεται σε Δασος, γυμνο Βουνο και Θαλασσα. Επειδη ακουστηκε εκρηξη και δεν παρατηρηθηκε φωτια, τα συνεργεια διασωσεως πιστευουν οτι $P(B) = 0{,}6$, $P(\Theta) = 0{,}3$, $P(\Delta) = 0{,}1$. Το αεροπλανο που στελλεται για να βρη τα συντριμμια – ενδεχομενο Ε – μπορει να τα βρη με πιθανοτητες: $P(E|B) = \frac{3}{4}$, $P(E|\Theta) = \frac{1}{5}$ και $P(E|\Delta) = \frac{1}{2}$. Ποια ειναι η πιθανοτητα να βρη το αεροπλανο τα συντριμμια;

Απ. Απο τον τυπο ολικης πιθανοτητος εχουμε:

$$P(E) = P(E|B)P(B) + P(E|\Theta)P(\Theta) + P(E|\Delta)P(\Delta)$$
$$= \frac{3}{4}\cdot\frac{6}{10} + \frac{1}{5}\cdot\frac{3}{10} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{10} = 0{,}56 .$$

(3.7) Παραδειγμα: Δυο Δοχεια περιεχουν, το πρωτο 2 Ασπρους και 4 Μαυρους βωλους και το δευτερο 1 Ασπρο και 1 Μαυρο βωλο. Ας υποτεθη οτι διαλεγουμε τυχαια ενα απο τα δυο δοχεια και απο αυτο, επισης τυχαια, διαλεγουμε ενα βωλο.

(α) Ποια η πιθανοτητα να ειναι ο βωλος Ασπρος;

(β) Δεδομενου οτι ο βωλος που διαλεξαμε ηταν τελικα Ασπρος ποια η πιθανοτητα να ειχαμε διαλεξει το δευτερο δοχειο;

Απ. (α) Απο τον τυπο ολικης πιθανοτητος εχουμε:

$$P(A) = P(A|\Delta_1)P(\Delta_1) + P(A|\Delta_2)P(\Delta_2)$$
$$= \frac{2}{6}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{5}{12}$$

(β) Απο το ορισμο της δεσμευμενης πιθανοτητος και τον τυπο της ολικης πιθανοτητος εχουμε:

$$P(\Delta_2|A) = \frac{P(\Delta_2 \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A|\Delta_2)P(\Delta_2)}{P(A|\Delta_1)P(\Delta_1)+P(A|\Delta_2)P(\Delta_2)} =$$
$$= \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}{\frac{5}{12}} = \frac{3}{5} = 0{,}6 .$$

Ο συνδιασμος του ορισμου της δεσμευμενης πιθανοτητος και του τυπου της ολικης πιθανοτητος, που χρησιμοποιηθηκε για τη λυση του (3.7(β)), μας διδει τον περιφημο <u>τυπο του Bayes</u> :

$$(3.8) \quad P(E_j \mid A) = \frac{P(A|E_j)P(E_j)}{\Sigma_{i=1}^{\nu} P(A|E_i)P(E_i)}, \quad i=1,\dots,\nu,$$

οπου τα ενδεχομενα $E_1,\dots,E_\nu$ ειναι ασυμβιβαστα <u>και</u> $\bigcup_{i=1}^{\nu} E_i = \Omega$.

(3.9) <u>Παραδειγμα:</u> Ειναι γνωστο οτι 5‰ του πληθυσμου εχει μια ασθενεια A, δηλαδη $P(A)=0{,}005$. Για τη διαγνωση της ασθενειας εχει εφευρεθη ενα ιατρικο τεστ, το οποιο βγαινει θετικο σωστα με πιθανοτητα 0,95 και λαθος με πιθανοτητα 0,01, δηλαδη $P(\Theta|A)=0{,}95$ και $P(\Theta|A^c)=0{,}01$. Δεδομενου οτι για ενα συγκεκριμενο ατομο το τεστ βγαινει θετικο, ποια η πιθανοτητα να εχη αυτο το ατομο την ασθενεια.

<u>Απ.</u> $$P(A|\Theta) = \frac{P(A\cap\Theta)}{P(\Theta)} = \frac{P(\Theta|A)P(A)}{P(\Theta|A)P(A)+P(\Theta|A^c)P(A^c)}$$

$$= \frac{(0{,}95)(0{,}005)}{(0{,}95)(0{,}005)+(0{,}01)(0{,}995)} = \frac{95}{294} \doteq 0{,}3231,$$

οχι και τοσο υψηλη.

(3.10) <u>Παραδειγμα:</u> Μια ασφαλιστικη εταιρεια οδηγων αυτοκινητων, χωριζει τους οδηγους σε Ασφαλεις, Μετριους και Κακους, και

ξερει οτι $P(A)=0,2$, $P(M)=0,5$ και $P(K)=0,3$.
Ας συμβολισουμε με E το ενδεχομενο να εχη κανεις ενα δυστυχημα κατα τη διαρκεια ενος ετους. Η εταιρεια ξερει οτι: $P(E|A)=0,05$, $P(E|M)=0,15$ και $P(E|K)=0,3$. Εαν ενας απο τους ασφαλισμενους της εταιρειας δεν εχει κανενα δυστυχημα καθ' ολη τη διαρκεια ενος χρονου, ποια ειναι η πιθανοτητα να ειναι Ασφαλης οδηγος;

Απ. $$P(A|E^c) = \frac{P(E^c|A)P(A)}{P(E^c|A)P(A)+P(E^c|M)P(M)+P(E^c|K)P(K)}$$

$$= \frac{(0,95)(0,2)}{(0,95)(0,2)+(0,85)(0,5)+(0,7)(0,3)} = \frac{38}{165} \doteq 0,23\overline{03},$$

οχι και τοσο μεγαλη.

Για να διευκρινησουμε τους ορισμους που ακολουθουν θα χρησιμοποιησουμε το ακολουθο παραδειγμα:

(3.11) Παραδειγμα: Ας θεωρησουμε δυο αμεροληπτα ζαρια. Εστω τα ενδεχομενα: A = το αθροισμα των δυο ζαριων ειναι 5,
B = το αθροισμα των δυο ζαριων ειναι 7,
E_1 = το πρωτο ζαρι ειναι 1,
E_2 = το πρωτο ζαρι ειναι 5.

Τοτε, $P(A)=P(\{(1,4),(4,1),(2,3),(3,2)\}) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$;
$P(B)=1/6$ – απ' το παραδ. (2.27) – και $P(E_1)=P(E_2)=1/6$.

Τωρα, $P(A|E_1) = \frac{P(A\cap E_1)}{P(E_1)} = \frac{P(\{(1,4)\})}{P(E_1)} = \frac{\frac{1}{36}}{\frac{1}{6}} = \frac{1}{6}$,

δηλαδη $P(A) < P(A|E_1) \Rightarrow P(E_1) < P(E_1|A)$

η $\underline{P(A\cap E_1) > P(A)P(E_1)}$.

Αλλα, $P(A|E_2) = 0 < P(A)$ και φυσικα $P(E_2|A) = 0 < P(E_2)$,

η $\underline{P(A\cap E_2) < P(A)P(E_2)}$.

Επισης, $P(B|E_1) = \frac{1}{6} = P(B)$ και $P(E_1|B) = \frac{1}{6} = P(E_1)$,

η $\underline{P(B\cap E_1) = P(B)P(E_1)}$.

(3.12) <u>Ορισμοι</u>: Τα ενδεχομενα A, B λεγονται:

<u>Θετικα Συσχετισμενα</u>, εαν $P(A\cap B) > P(A)P(B)$,

<u>Αρνητικα Συσχετισμενα</u>, εαν $P(A\cap B) < P(A)P(B)$,

και <u>Ανεξαρτητα</u>, εαν $P(A\cap B) = P(A)P(B)$.

Εαν τα ενδεχομενα A, B δεν ειναι ανεξαρτητα λεγονται <u>εξηρτημενα</u> (θετικα η αρνητικα).

Η ανεξαρτησια ειναι μια εξεραιτικα χρησιμη ιδιοτητα, απο μαθηματικη και υπολογιστικη αποψη. Επισης ειναι συνηθως δυνατον να ελεγχθη εαν ισχυη – τουλαχιστον κατα προσεγγιση – για συγκεκριμμενες ομαδες ενδεχομενων ενος πειραματος. Στα επομενα θα μελετησουμε την ανεξαρτησια ενδεχομενων καπως καλυτερα.

(3.13) <u>Παραδειγμα</u>: Απο μια κοινη τραπουλα διαλεγουμε μια καρτα στην τυχη. Εστω $A = \{$η καρτα ειναι Ασσος$\}$ και $B =$

$=\{$ η καρτα ειναι Καρρο $\}$. Ειναι τα ενδεχομενα A, B ανεξαρτητα;

<u>Απ.</u> Φυσικα ναι, μια και το να ξερη κανεις το χρωμα της καρτας δεν τον βοηθαει σε τιποτε ως προς το νουμερο της. Ας το δουμε προσεκτικα:

$$P(A \cap B) = P(\{\text{ασσος του καρρο}\}) = \frac{1}{52} = \frac{4}{52} \cdot \frac{13}{52} =$$
$$= P(A)\,P(B) .$$

(3.14) <u>Ασκηση</u>: Υποθετουμε οτι εχουμε δυο (η εν γενει Κ) αμεροληπτα ζαρια (η νομισματα). Το να υποθεσουμε οτι τα ζαρια (η νομισματα) ριχνονται <u>ανεξαρτητα</u> το ενα απο το αλλο ειναι ισοδυναμο με την υποθεση οτι ολα τα δυνατα αποτελεσματα του πειραματος ειναι ισοπιθανα.

(3.15) <u>Ασκηση</u>: Ριχνουμε δυο αμεροληπτα ανεξαρτητα ζαρια. Εστω, $A_i = \{$ το αθροισμα των ζαριων ειναι $i \}$, $i = 2, 3, \ldots, 12$ και, $\Pi_j = \{$ το πρωτο ζαρι ειναι $j \}$, $j = 1, 2, \ldots, 6$. Αποδειξτε την διαισθητικα προφανη προταση, οτι ολα τα ζευγαρια ενδεχομενων (A_i, Π_j) ειναι εξηρτημενα εκτος απο τα (A_7, Π_j), $j = 1, \ldots, 6$.

(3.16) <u>Παρατηρησεις</u>: Εστω δυο δυνατα ενδεχομενα A, B.

(α) Αν $A \cap B = \emptyset$ ειναι τα A, B ανεξαρτητα; Φυσικα οχι (αν ξερουμε οτι το A συνεβη, ξερουμε οτι το B δεν συνεβη!).
$P(A \cap B) = 0 \neq P(A)P(B)$.

(β) Αν τα A, B ειναι ανεξαρτητα, τοτε τα A, B^c ειναι επισης ανεξαρτητα.
$$P(A \cap B^c) = P(A) - P(A \cap B) = P(A) - P(A)P(B) = P(A)[1 - P(B)]$$
$$= P(A)\,P(B^c) .$$

(γ) Αν τα A, B είναι ανεξάρτητα, τότε τα A^c, B^c είναι επίσης ανεξάρτητα. (Εφαρμόστε το (β)).

Θα δούμε τώρα πως γενικεύεται η έννοια της ανεξαρτησίας δυο ενδεχομένων:
Ας υποθέσουμε ότι έχουμε τρία ενδεχόμενα A, B, Γ. Για να τα πούμε ανεξάρτητα πρέπει να είναι οπωσδήποτε ανά δυο ανεξάρτητα, δηλαδή:

(α) $P(A \cap B) = P(A)P(B)$,

(β) $P(A \cap \Gamma) = P(A)P(\Gamma)$,

(γ) $P(B \cap \Gamma) = P(B)P(\Gamma)$,

είναι όμως αυτό αρκετό, π.χ. για να ικανοποιεί ο στατιστικός ορισμός της ανεξαρτησίας την διαισθητική μας πείρα για την έννοια πού έχει η λέξη στη γλώσσα;
Για παράδειγμα, έστω $\Omega = \{1,2,3,4\}$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}_\Omega$, $P(\{i\}) = \frac{1}{4}$, $i = 1, \dots, 4$, και ας πάρουμε $A = \{1,2\}$, $B = \{1,3\}$, $\Gamma = \{1,4\}$, τα οποία πληρούν τις (α), (β), (γ). Αν ξέρουμε ότι συνέβη το A η πιθανότητα να συνέβη (και) το Γ παραμένει η ίδια (½), δηλαδή η γνώση ότι συνέβη το A δεν βοηθάει στην εκτίμηση μας για το αν συνέβη το Γ ή όχι. Παρόμοια η γνώση ότι συνέβη το B δεν βοηθάει στην εκτίμηση μας για το αν συνέβη το Γ ή όχι. Αλλα, αν γνωρίζουμε ότι το $A \cap B$ συνέβη τότε ξέρουμε με βεβαιότητα ότι και το Γ συνέβη. Άρα τα A, B, Γ δεν μπορούν να θεωρηθούν "ανεξάρτητα".

Τα ενδεχόμενα A, B, Γ λέγονται ανεξάρτητα εάν πληρούν τις (α), (β), (γ) και επί πλέον:

(δ) $P(A \cap B \cap \Gamma) = P(A)P(B)P(\Gamma)$.

(3.17) <u>Ορισμός</u>: Τα ενδεχόμενα $E_1, E_2, \ldots, E_\nu$ λέγονται <u>ανεξάρτητα</u> εάν για κάθε υποομάδα $E_{i_1}, \ldots, E_{i_k}$, $k \leq \nu$,

$$P\left(\bigcap_{j=1}^{k} E_{i_j}\right) = \prod_{j=1}^{k} P(E_{i_j}).$$

Επίσης,

(3.18) <u>Ορισμός</u>: Μια άπειρη ακολουθία γεγονότων $E_1, E_2, \ldots$, λέγεται ακολουθία <u>ανεξάρτητων</u> γεγονότων εάν τα γεγονότα κάθε πεπερασμένης υποομάδας της είναι ανεξάρτητα.

Είμαστε τώρα έτοιμοι να λύσουμε το πρόβλημα που ο Chevalier de Meré έδωσε στους Pascal και Fermat.

(3.19) <u>Παράδειγμα</u>: Ρίχνουμε ένα αμερόληπτο ζάρι 4 ανεξάρτητες φορές και έστω $E_i = \{$το i ζάρι είναι άσσος$\}$, $i = 1, \ldots, 4$. Επίσης, ρίχνουμε δύο αμερόληπτα ζάρια 24 ανεξάρτητες φορές και έστω $A_i = \{$η i ζαριά έφερε διπλό άσσο$\}$, $i = 1, \ldots, 24$. Ισχύει ότι $p := P\left(\bigcup_{i=1}^{4} E_i\right) = P\left(\bigcup_{i=1}^{24} A_i\right) =: q$;

<u>Απ.</u> $$p = 1 - P\left(\left(\bigcup_{i=1}^{4} E_i\right)^c\right) = 1 - P\left(\bigcap_{i=1}^{4} E_i^c\right) = 1 - \prod_{i=1}^{4} P(E_i^c)$$
$$= 1 - \prod_{i=1}^{4}\left[1 - P(E_i)\right] = 1 - \left(1 - \frac{1}{6}\right)^4 = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4 \approx 0,517747.$$

$$q = 1 - P\left(\bigcap_{i=1}^{24} A_i^c\right) = 1 - \prod_{i=1}^{24} P(A_i^c) = 1 - \prod_{i=1}^{24}\left(1 - P(A_i)\right) =$$
$$= 1 - \left(1 - \frac{1}{36}\right)^{24} = 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{24} \approx 0,491404.$$

Άρα $p \neq q$, αλλά δεν διαφέρουν πολύ.

Δοκιμές:

(3.20) Ορισμός: Εστω ακολουθία πειραμάτων $(\Omega_1,\mathcal{A}_1)$, $(\Omega_2,\mathcal{A}_2)$, ..., με αντίστοιχες πιθανοσυναρτήσεις P_1, P_2, ... Εάν, $\Omega_1=\Omega_2=\dots=\Omega$, $\mathcal{A}_1=\mathcal{A}_2=\dots=\mathcal{A}$ και $P_1=P_2=\dots=P$, τότε λέμε ότι έχουμε μια ακολουθία δοκιμών του πειράματος $(\Omega,\mathcal{A})$ με πιθανοσυνάρτηση P.

(3.21) Ορισμός: Μια ακολουθία δοκιμών λέγεται ακολουθία ανεξάρτητων δοκιμών αν κάθε ακολουθία ενδεχομένων $E_1, E_2, \dots$, όπου $E_i\in\mathcal{A}_i$ $\forall i=1,2,\dots$, είναι ακολουθία ανεξάρτητων ενδεχομένων (ορισμός 3.18).

(3.21) Ορισμός: Μια ακολουθία ανεξάρτητων δοκιμών, τέτοια ώστε $\Omega=\{0,1\}$, λέγεται ακολουθία δοκιμών Bernoulli. (Συνήθως το 0 ταυτίζεται με αποτυχία και το 1 με επιτυχία στη δοκιμή.).

(3.22) Παράδειγμα: Εστω μια ακολουθία δοκιμών Bernoulli, με $p=P(\{1\})=P(\text{επιτυχίας})$. Ποια είναι η πιθανότητα:

(α) του λάχιστον μιας επιτυχίας στις πρώτες ν δοκιμές;

(β) ακριβώς k επιτυχιών στις πρώτες ν δοκιμές;

(γ) όλες οι δοκιμές να λήγουν σε επιτυχία;

Απ. Εστω $E_i=\{\text{η } i \text{ δοκιμή λήγει σε επιτυχία}\}$, $i=1,2,\dots,\nu,\dots$.
Τότε $P(E_i)=p$ και άρα $P(E_i^c)=1-p$ $\forall i=1,2,\dots$.

(α) $P(\bigcup_{i=1}^{\nu} E_i) = 1-P(\bigcap_{i=1}^{\nu} E_i^c) = 1-\prod_{i=1}^{\nu} P(E_i^c) = 1-(1-p)^{\nu}$.

(β) $P\Big(\bigcup_{i_1<i_2<\dots<i_k} (E_{i_1}\cap E_{i_2}\cap\dots\cap E_{i_k}\cap E_{i_{k+1}}^c\cap\dots\cap E_{i_\nu}^c)\Big) =$

$$= \sum_{i_1<i_2<\dots<i_k} P(E_{i_1}\cap\dots\cap E_{i_k}\cap E^c_{i_{k+1}}\cap\dots\cap E^c_{i_\nu})$$

$$= \sum_{i_1<\dots<i_k} P(E_{i_1})\cdots P(E_{i_k})\cdot P(E^c_{i_{k+1}})\cdots P(E^c_{i_\nu})$$

$$= \sum_{i_1<\dots<i_k} p^k(1-p)^{\nu-k} = \binom{\nu}{k} p^k (1-p)^{\nu-k}.$$

(γ) $P(\bigcap_{i=1}^{\nu} E_i) = \prod_{i=1}^{\nu} P(E_i) = p^\nu$ και $(\bigcap_{i=1}^{\nu} E_i)\downarrow_\nu$ · αρα

$$P(\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i) = P(\lim_{\nu\to\infty} \bigcap_{i=1}^{\nu} E_i) = \lim_{\nu\to\infty} P(\bigcap_{i=1}^{\nu} E_i) =$$

Θεωρημα (2.25)

$$= \lim_{\nu\to\infty} p^\nu = \begin{cases} 0 & \text{εαν } p<1 \\ 1 & \text{εαν } p=1 \end{cases}.$$

(3.23) <u>Παραδειγμα</u>: Ριχνουμε ενα αμεροληπτο ζαρι ανεξαρτητα ν φορες. Ποια η πιθανοτητα να φερουμε εξι ακριβως k φορες.

<u>Απ.</u> Ας ονομασουμε επιτυχια το να φερουμε εξι και αποτυχια καθε τι αλλο. Τοτε η πιθανοτητα που ζητάμε διδεται απο την (3.22(β)) με $p=\frac{1}{6}$, ειναι δηλαδη

$$\binom{\nu}{k}p^k(1-p)^{\nu-k} = \binom{\nu}{k}\left(\frac{1}{6}\right)^k\left(1-\frac{1}{6}\right)^{\nu-k} = \binom{\nu}{k}\frac{5^{\nu-k}}{6^\nu}.$$

(3.24) <u>Παραδειγμα</u>: Ριχνουμε δυο αμεροληπτα ζαρια συνεχως και ανεξαρτητα, και σημειωνουμε το αθροισμα τους. Ποια ειναι η πιθανοτητα του ενδεχομενου $E=\{$το 5 εμφανιζεται πριν εμφανισθη το 7$\}$.

<u>Απ.</u> $P(\{5\}) = P(\{(1,4),(4,1),(2,3),(3,2)\}) = \frac{4}{36}$

και $P(\{7\}) = P(\{(1,6),(6,1),(2,5),(5,2),(3,4),(4,3)\}) = \frac{6}{36}$.

Τωρα, εστω $E_\nu = \{$στις πρωτες ν-1 δοκιμες ουτε 5 ουτε 7 εμφανιζεται και η ν δοκιμη διδει 5$\}$, $\nu=1,2,\dots$. Τοτε τα $(E_\nu)_{\nu=1}^{\infty}$ ειναι ασυμβιβαστα και $\bigcup_{\nu=1}^{\infty} E_\nu = E$. Αρα,

$$P(E)=P\left(\bigcup_{\nu=1}^{\infty}E_\nu\right)=\sum_{\nu=1}^{\infty}P(E_\nu)=\sum_{\nu=1}^{\infty}\left\{[1-P(\{5\})-P(\{7\})]^{\nu-1}P(\{5\})\right\}$$

$$=\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(1-\frac{10}{36}\right)^{\nu-1}\frac{4}{36}=\frac{4}{36}\sum_{\nu=0}^{\infty}\left(\frac{26}{36}\right)^{\nu}=\frac{4}{36}\,\frac{1}{1-\frac{26}{36}}=$$

$$=\frac{4}{36}\,\frac{36}{10}=0{,}4\,.$$

Μια άλλη ενδιαφέρουσα λύση του προβλήματος αυτού είναι η εξής:

έστω $A_i=\{$η πρώτη δοκιμή δίδει $i\}$, $i=5,7$. Τότε, τα ενδεχόμενα $A_5, A_7, (A_5\cup A_7)^c$ είναι ασυμβίβαστα και συμπληρωματικά και άρα από τον τύπο ολικής πιθανότητος έχουμε ότι:

$$P(E)=P(E|A_5)P(A_5)+P(E|A_7)P(A_7)+P(E|(A_5\cup A_7)^c)\,P((A_5\cup A_7)^c)$$

$$=1\times\frac{4}{36}+0\times\frac{6}{36}+P(E)\times\left(1-\frac{4}{36}-\frac{6}{36}\right)$$

$$\Leftrightarrow P(E)=\frac{1}{9}+\frac{13}{18}P(E)\Leftrightarrow\left(1-\frac{13}{18}\right)P(E)=\frac{1}{9}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P(E)=\frac{1/9}{5/18}=0{,}4\,.$$

(3.25) <u>Ορισμός</u>: Έστω χώρος πιθανότητος $(\Omega,\mathcal{A},P)$ και ενδεχόμενο $E\in\mathcal{A}$ με $P(E)\neq 0$. Τα ενδεχόμενα $A,B\in\mathcal{A}$ λέγονται <u>δεσμευμένως ανεξάρτητα δεδομένου του E</u>, εάν

$$P(A\cap B|E)=P(A|E)\,P(B|E)\,.$$

Οι ορισμοί (3.17) και (3.18) επεκτείνονται ανάλογα στην περίπτωση της ανεξαρτησίας υπό συνθήκες, χρησιμοποιώντας την πιθανοσυνάρτηση (βλ. 3.2) $P(\cdot|E)$. Ανάλογα επίσης επεκτείνεται και ο νόμος του Bayes (3.8).

(3.26) Παραδειγμα: Ριχνουμε δυο αμεροληπτα ζαρια ανεξαρτητα το ενα απο το αλλο. Εστω $A = \{$το αθροισμα των ζαριων ειναι 8$\}$, $B = \{$το αθροισμα των ζαριων ειναι 7$\}$, $\Gamma = \{$το πρωτο ζαρι ειναι 3$\}$, $E = \{$το πρωτο ζαρι δεν ειναι 1$\}$.

Απο το παραδειγμα (3.11) και την ασκηση (3.15), ξερουμε οτι το B ειναι ανεξαρτητο του E καθως επισης και του Γ, ενω το A και το Γ – για παραδειγμα – δεν ειναι ανεξαρτητα, δηλαδη $P(A \cap \Gamma) = \frac{1}{36} \neq \frac{5}{36} \cdot \frac{1}{6} = P(A)P(\Gamma)$.

Αλλα, $P(A \cap \Gamma \mid E) = \dfrac{P(A \cap \Gamma \cap E)}{P(E)} = \dfrac{P(A \cap \Gamma)}{P(E)} = \dfrac{1/6^2}{1-1/6} = \dfrac{1}{30}$

$$P(A \mid E) = \frac{P(A \cap E)}{P(E)} = \frac{P(A)}{P(E)} = \frac{5/36}{5/6} = \frac{1}{6},$$

$$P(\Gamma \mid E) = \frac{P(\Gamma \cap E)}{P(E)} = \frac{P(\Gamma)}{P(E)} = \frac{1/6}{5/6} = \frac{1}{5},$$

και αρα $P(A \cap \Gamma \mid E) = P(A \mid E)\, P(\Gamma \mid E)$,

δηλαδη τα A, Γ ειναι δεσμευμενως ανεξαρτητα δεδομενου του E.

4. ΤΥΧΑΙΕΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΕΣ ΚΑΙ ΚΑΤΑΝΟΜΕΣ.

Συχνα, οταν εκτελουμε ενα πειραμα ή σειρα πειραματων, δεν ενδιαφερομεθα τοσο για το αποτελεσμα ω του πειραματος οσο για καποια συναρτηση $X(\omega)$ του αποτελεσματος. Για παραδειγμα οταν ριχνουμε δυο ζαρια, συνηθως ενδιαφερομεθα για το αθροισμα $X(i,j)=i+j$ και οχι για το ιδιο το αποτελεσμα (i,j), $i,j=1,\dots,6$. Επισης οταν επαναλαμβανουμε τη ριψη ενος νομισματος ν φορες, δεν μας ενδιαφερει τοσο η ακολουθια απο Κ & Γ που παιρνουμε οσο ο συνολικος αριθμος των Κ, ας πουμε, στις ν ριψεις. Παρομοια οταν μετραμε τους χρονους που χρειαζεται καποιο σωματιδιο για να διανυσει διαφορες αποστασεις ισως αυτο που μας ενδιαφερει να ειναι η ταχυτητα του σωματιδιου. Τετοιες συναρτησεις των αποτελεσματων ενος πειραματος λεγονται τυχαιες μεταβλητες:

(4.1) <u>Ορισμος:</u> Εστω πειραμα $(\Omega,\mathcal{A})$, μια συναρτηση $X:\Omega\ni\omega\longmapsto X(\omega)\in\mathbb{R}$, λεγεται <u>τυχαια μεταβλητη (τ.μ.)</u> εαν και μονον εαν τα συνολα

$(X\le x):=\{\omega\in\Omega : X(\omega)\le x\}\in\mathcal{A}\ \forall x\in\mathbb{R}$. (ειναι δηλαδη ενδεχομενα).

(4.2) Γενικοτερα, για $B\subseteq\mathbb{R}$, το συνολο $(X\in B):=\{\omega\in\Omega : X(\omega)\in B\}$ ειναι ενδεχομενο $(\in\mathcal{A})$ εαν και μονο εαν $B\in\mathcal{B}$, οπου $\mathcal{B}$ ειναι εξ ορισμου το συνολο

των υποσυνολων του $\mathbb{R}$ που μπορουν να εκφρασθουν σαν ενωσεις, τομες ή συμπληρωματα των ημιευθειων $\{(-\infty, x], x \in \mathbb{R}\}$.
Για παραδειγμα, εαν η X ειναι τ.μ., τα παρακατω συνολα ειναι ενδεχομενα:

$$(X = x) := \{\omega \in \Omega : X(\omega) = x\} \in \mathcal{A},$$
$$(X \leq x) := \{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\} \in \mathcal{A},$$
$$(X < x) := \{\omega \in \Omega : X(\omega) < x\} \in \mathcal{A},$$
$$(X \geq x) := \{\omega \in \Omega : X(\omega) \geq x\} \in \mathcal{A},$$
$$(X > x) := \{\omega \in \Omega : X(\omega) > x\} \in \mathcal{A},$$
$$(x < X \leq y) := \{\omega \in \Omega : x < X(\omega) \leq y\} \in \mathcal{A}, \quad \text{κ.τ.λ.}.$$

Η "συμπεριφορα" ή κατανομη μιας τ.μ. X χαρακτηριζεται πληρως απο τη συναρτηση κατανομης της:

(4.3) <u>Ορισμος</u>: Εστω τ.μ. X στον $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Η συναρτηση

$$F_X(x) := P(X \leq x), \quad x \in \mathbb{R},$$

λεγεται <u>συναρτηση</u> <u>κατανομης</u> (σ.κ.) της τ.μ. X.

<u>Σημ.</u> Αν $A_x = X^{-1}((-\infty, x])$ τοτε $F_X(x) = P(A_x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Το μικροτερο συνολο $S_X \in \mathcal{B}$ τετοιο ωστε

$$P(X \in S_X) = P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in S_X\}) = 1,$$

λεγεται <u>φορεας</u> της τ.μ. X και της σ.κ. της F_X.

Εαν ο φορεας της τ.μ. X ειναι αριθμησιμο συνολο, δηλαδη, $S_X = \{x_1, x_2, \dots\}$ τοτε η τ.μ. X και η κατανομη της ονομαζονται διακριτες. Μια διακριτη κατανομη περιγραφεται πληρως απο τη συναρτηση μαζης πιθανοτητος (σ.μ.π.) :

(4.4) $p_X(x) = P(X=x) \quad , \ x \in \mathbb{R}$.

Εκ του ορισμου του S_X , $p_X(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus S_X$.
Σ' αυτη τη περιπτωση :

$$F_X(x) = P(X \leq x) = P\Big(\bigcup_{x_k \leq x} \{X = x_k\}\Big) = \sum_{x_k \leq x} P(X = x_k)$$

$$= \sum_{x_k \leq x} p_X(x_k) \quad , \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Επισης, μπορουμε να παρουμε τη σ.μ.π. p_X απο τη σ.κ. F_X :

$$p_X(x_k) = F_X(x_k) - F_X(x_{k-1}) \quad \forall x_k \in S_X = \{x_1 < x_2 < \cdots\} \ .$$

(4.5) Μια σ.μ.π. $p(\cdot)$ με φορεα S χαρακτηριζεται απο τις ιδιοτητες :

$$p(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \ ,$$

και $$\sum_{x \in S} p(x) = 1 \ .$$

(4.6) Εστω τ.μ. X στον $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ με σ.κ. F_X ,
εαν υπαρχει πραγματικη συναρτηση

$$f_X(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \ ,$$

τετοια ωστε

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(z)\,dz \quad , \ \forall x \in \mathbb{R} \ ,$$

τοτε η τ.μ. X και η σ.κ. της F_X ονομαζονται <u>απολυτα</u> <u>συνεχεις</u> (α.σ.). Η συναρτηση $f_X(\cdot)$ λεγεται <u>πυκνοτητα</u> <u>κατανομης</u> (π.κ.) της τ.μ. X.
<u>Σημ.</u> Αν $X(A)=B\in\mathcal{B}$, $A\in\mathcal{A}$, τοτε $P(A)=\int_B f(x)dx = P(X^{-1}(B))$

(4.7) Αν μια τ.μ. X ειναι α.σ., τοτε υπαρχει $F_X'(x)$ $\forall x\in\mathbb{R}\setminus N$, οπου το N ειναι αριθμησιμο και $f_X(x)=F_X'(x)$ $\forall x\in\mathbb{R}\setminus N$.

(4.8) Μια συναρτηση π.κ. $f(\cdot)$, χαρακτηριζεται απο τις εξης ιδιοτητες:

$$f(x)\geq 0 \quad \forall x\in\mathbb{R},$$

και $$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1 .$$

Εαν ο φορεας S_X μιας τ.μ. X στον $(\Omega,\mathcal{A},P)$, εχει μηκος $\lambda(S_X)=0$, τοτε η τ.μ. X και η κατανομη της F_X καλουνται <u>ιδιαζουσες</u>. Ολες οι διακριτες τ.μ. ειναι ιδιαζουσες. Το περιεργο (ισως) ειναι οτι υπαρχουν και συνεχεις (αλλ' οχι φυσικα, α.σ.) κατανομες F_X οι οποιες ειναι ιδιαζουσες, δηλαδη συγκεντρωνονται σε φορεα μηδενικου μηκους (π.χ., κατανομη Cantor).

Για καθε σ.κ. F εχουμε οτι (Θεωρημα Lebesgue):

(4.9) $$F=\lambda F_{\delta} + (1-\lambda)F_{\alpha.\sigma.}, \quad \lambda\in[0,1],$$

οπου η F_{δ} ειναι ιδιαζουσα και η $F_{\alpha.\sigma.}$ απολυτα συνεχης.

Εχει επικρατησει να καλουνται οι απολυτα συνεχεις τ.μ. απλως <u>συνεχεις</u>. Επισης αν η F_X ειναι συνεχης αλλα οχι α.σ. τοτε μονο, εχει επικρατησει να λεγεται η τ.μ. X <u>ιδιαζουσα</u>. Απο την (4.9) βλεπουμε οτι γενικα μια τ.μ. X μπορει να ειναι κατα τμηματα συνεχης, διακριτη ή ιδιαζουσα.

(4.10) <u>Παραδειγμα:</u> <u>Ομοιομορφη Διακριτη Κατανομη $\mathcal{U}_\Delta(N)$</u>.

Εστω χωρος $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ με ισοπιθανα δυνατα αποτελεσματα $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N\}$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}_\Omega$, $P(\{\omega_i\}) = \frac{1}{N}$ $\forall\, i=1,\dots,N$.

Εστω τ.μ. $X : \Omega \ni \omega_k \longmapsto X(\omega_k) = x_k \in \mathbb{R}$, $k=1,2,\dots,N$. Δηλαδη,

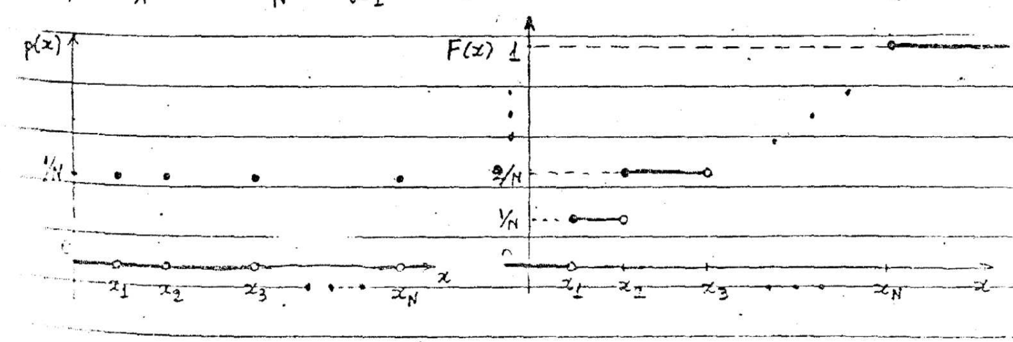
$S_X = \{x_1, \dots, x_N\}$,

$p(x) = P(X=x) = \frac{1}{N}\, 1(x \in S_X)$,

τοτε η τ.μ. X καλειται <u>ομοιομορφη διακριτη</u> στο συνολο $S_X = \{x_1, \dots, x_N\}$ και συμβολιζεται με $\mathcal{U}_\Delta(N)$, $N \in \mathbb{Z}_+ = \{1,2,\dots\}$.

Παρατηρηστε οτι,

$$F_X(x) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} 1(x_i \le x) = \#\{x_i \le x,\ i=1,\dots,N\}/N .$$



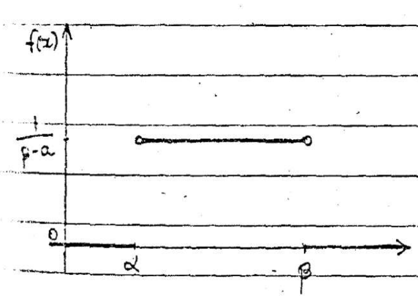
(4.11) Παραδειγμα: Ομοιομορφη Συνεχης Κατανομη $\mathcal{U}(\alpha,\beta)$.

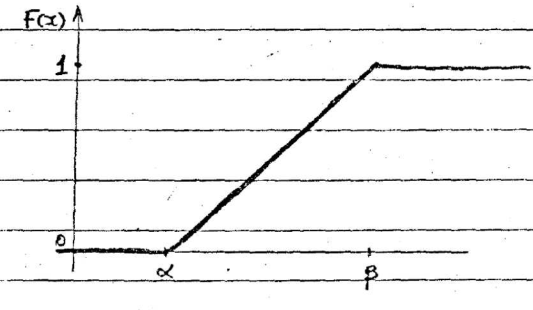
Εστω $-\infty<\alpha<\beta<+\infty$ · η ομοιομορφη κατανομη στο διαστημα (α,β), την οποια θα συμβολιζουμε με $\mathcal{U}(\alpha,\beta)$, εχει πυκνοτητα:

$$f(x)=\frac{1}{\beta-\alpha}\,1(\alpha<x<\beta),$$

και σ.κ.: $F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(z)\,dz$, δηλαδη,

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{αν} \quad x\leq\alpha,\\ \dfrac{x-\alpha}{\beta-\alpha} & \text{αν} \quad \alpha<x<\beta,\\ 1 & \text{αν} \quad x\geqslant\beta.\end{cases}$$





Στη Στατιστικη ιδιαιτερα χρησιμη ειναι η $\mathcal{U}(0,1)$, με $f(x)=1(0<x<1)$, και

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{αν} \quad x\leq 0,\\ x & \text{αν} \quad 0<x<1,\\ 1 & \text{αν} \quad x\geqslant 1,\end{cases}$$

διοτι για καθε τ.μ. X με σ.κ. F_X συνεχη, η τ.μ. $Y:=F_X(X)$ ακολουθει την $\mathcal{U}(0,1)$ (βλ. 4.68).

Βασικές ιδιότητες των συναρτήσεων κατανομής.

Έστω χώρος με πιθανότητα $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ και τ.μ. X ορισμένη σ' αυτόν, με σ.κ. $F(x) = P(X \le x)$, $x \in \mathbb{R}$.

(4.12) Πρόταση: Οι ακόλουθες ιδιότητες χαρακτηρίζουν μια σ.κ. F:

(α) $F \uparrow_x$, δηλαδή, $x < y \Rightarrow F(x) \le F(y)$,

(β) $\lim_{x \to \infty} F(x) = 1$

(γ) $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$

(δ) $F(x_0 + 0) := \lim_{x \downarrow x_0} F(x) = F(x_0) \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}$, δηλαδή, η F είναι απ' τα δεξιά συνεχής (αλλ' όχι κατ' ανάγκην απ' τα αριστερά).

Απόδ. (α) $x < y \Rightarrow \{\omega \in \Omega : X(\omega) \le x\} \subseteq \{\omega \in \Omega : X(\omega) \le y\} \Rightarrow$
$\Rightarrow F(x) = P(X \le x) \le P(X \le y) = F(y)$.

(β) $\lim_{x \to \infty} F(x) = \lim_{x \to \infty} P(X \le x) =$ (απ' τη συνέχεια της $P(\cdot)$)
$= P(\lim_{x \to +\infty} \{\omega \in \Omega : X(\omega) \le x\}) = P(\Omega) = 1$.

(γ) $\lim_{x \to -\infty} F(x) = \lim_{x \to -\infty} P(X \le x) =$ (από 2.25(β))
$= P(\lim_{x \to -\infty} \{\omega \in \Omega : X(\omega) \le x\}) = P(\emptyset) = 0$.

(δ) Για κάθε ακολουθία $(x_\nu)_{\nu \ge 1} \downarrow x_0$ έχουμε $\left(\bigcap_{\nu=1}^{n} (X \le x_\nu)\right)_{n \ge 1} \downarrow_{(n)}$ και υπάρχει το όριο

$$\lim_{n \to \infty} \bigcap_{\nu=1}^{n} (X \le x_\nu) = (X \le x_0).$$

Τότε από το Θεώρημα 2.25(β) έχουμε ότι,

$$F(x_0) = P(X \le x_0) = P\left(\lim_{n \to \infty} \bigcap_{\nu=1}^{n} (X \le x_\nu)\right) =$$

$$= \lim_{n \to \infty} P\left(\bigcap_{\nu=1}^{n} (X \le x_\nu)\right) = \lim_{n \to \infty} P(X \le x_n) =$$
$$= \lim_{n \to \infty} F(x_n).$$

Επίσης $\forall F$ που ικανοποιεί τις (α), (β), (γ) και (δ), υπάρχει τ.μ. X η οποία έχει την F για σ.κ.. Για παράδειγμα έστω η τ.μ. $U \sim \mathcal{U}(0,1)$ και ας θέσουμε $X := F^{-1}(U)$, τότε

$$F_X(x) = P(X \le x) = P(F^{-1}(U) \le x) = P(U \le F(x)) = F(x),$$

δηλαδή η $X \sim F$ (τουλάχιστον όταν η F είναι συνεχής).

Εάν το $(X \in A) \in \mathcal{A}$, η $P(X \in A)$ μπορεί να εκφραστή δια μέσου της σ.κ. F της τ.μ. X. Ακολουθούν μερικά χαρακτηριστικά παραδείγματα:

(4.13) $P(x < X \le y) = F_X(y) - F_X(x)$

Παρατηρείστε ότι $(X \le x) \cap (x < X \le y) = \phi$, και $(X \le y) = (X \le x) \cup (x < X \le y)$ και άρα $P(X \le y) = P(X \le x) + P(x < X \le y)$ το οποίο δίδει την (4.13).

(4.14) $P(X > x) = P((X \le x)^c) = 1 - P(X \le x) = 1 - F(x)$

(4.15) $P(X < x) = P\left(\lim\limits_{n\to\infty}\left(X \le x - \frac{1}{n}\right)\right) = \lim\limits_{n\to\infty} P\left(X \le x - \frac{1}{n}\right) =$

$$= \lim_{n\to\infty} F\left(x - \frac{1}{n}\right) =: F(x-0) = F(x) - [F(x) - F(x-0)],$$

το πήδημα $F(x) - F(x-0) = 0$ εάν η X είναι συνεχής,
και $= p(x)$ εάν η X είναι διακριτή.

Παρατήρηση:

(4.16) $P(X \geq x) = 1 - P(X < x) = 1 - F(x-0) =$

$= [1 - F(x)] + [F(x) - F(x-0)]$.

(4.17) Παράδειγμα: Έστω X η τ.μ. που καταγράφει το αποτέλεσμα της ρίψης ενός αμερόληπτου ζαριού, δηλαδή,

$S_X = \{1, 2, \dots, 6\}$,

$p(x) = P(X = x) = \frac{1}{6} 1(x \in S_X)$,

$F(x) = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^{6} 1(i \leq x)$.

Να ευρεθούν οι πιθανότητες:

(α) $P(X \geq 3)$,

(β) $P(X > 3)$,

(γ) $P(2 < X \leq 5)$,

(δ) $P(2 \leq X \leq 5)$,

(ε) $P(2 \leq X < 5)$.

Απάντηση: (α) $P(X \geq 3) = 1 - P(X < 3) = 1 - P(X \leq 2) =$
$= 1 - F(2) = 1 - \frac{2}{6} = \frac{2}{3}$.

(β) $P(X > 3) = 1 - P(X \leq 3) = 1 - F(3) =$
$= 1 - \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

(γ) $P(2 < X \leq 5) = F(5) - F(2) = \frac{5}{6} - \frac{2}{6} = \frac{1}{2}$.

(δ) $P(2 \leq X \leq 5) = P(X \leq 5) - P(X < 2)$
$= P(X \leq 5) - P(X \leq 1) = \frac{5}{6} - \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$.

(ε) $P(2 \leq X < 5) = P(X < 5) - P(X < 2)$
$= P(X \leq 4) - P(X \leq 1) = F(4) - F(1) = \frac{4}{6} - \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$.

(4.18) Παραδειγμα: Ας υποτεθη οτι η ωρα αφιξεως X ενος αυτοκινητου σε μια συγκεκριμενη σταση, ακολουθει μια ομοιομορφη κατανομη στο χρονικο διαστημα $8\frac{3}{4}$ με $9\frac{1}{4}$ το πρωι. Αν φθασεται σ'αυτη τη σταση στις 9 π.μ. ακριβως, ποια ειναι η πιθανοτητα:

(α) να χασεται το λεωφοριο;
(β) να περιμενεται ακριβως 5 λεπτα;
(γ) να περιμενεται το πολυ 5 λεπτα;
(δ) να περιμενεται τουλαχιστον 5 λεπτα;

Απαντηση: (α) $P(X<9) = P(X \leq 9) =$

$$= F(9) = \frac{9 - 8\frac{3}{4}}{9\frac{1}{4} - 8\frac{3}{4}} = \frac{1/4}{1/2} = 1/2 .$$

(β) $P(X = 9\frac{1}{12}) = F(9\frac{1}{12}) - F(9\frac{1}{12} - 0) = 0$

(γ) $P(9 \leq X \leq 9\frac{1}{12}) = P(X \leq 9\frac{1}{12}) - P(X<9)$

$$= P(X \leq 9\frac{1}{12}) - P(X \leq 9) =$$

$$= F(9\frac{1}{12}) - F(9) = \frac{9\frac{1}{12} - 8\frac{3}{4}}{1/2} - \frac{9 - 8\frac{3}{4}}{1/2}$$

$$= \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6} .$$

(δ) $P(X \geq 9\frac{1}{12}) = 1 - P(X < 9\frac{1}{12}) =$

$$= 1 - P(X \leq 9\frac{1}{12}) = 1 - F(9\frac{1}{12}) =$$

$$= 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

Παραδείγματα Μονοδιαστάτων Κατανομών.

ΔΙΑΚΡΙΤΕΣ.

Στο παράδειγμα (4.10) παρουσιάσαμε την Ομοιόμορφη Διακριτή Κατανομή $\mathcal{U}_\Delta(N)$, $N \in \mathbb{Z}_+$, με $p(x) = P(X=x) = \frac{1}{N} 1(x \in S_X)$, $S_X = \{x_1, x_2, \ldots, x_N\}$, και σ.κ.: $F(x) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} 1(x_i \leq x) = \#\{x_i \leq x, i=1,\ldots,N\}/N$.

Άλλα παραδείγματα περιλαμβάνουν τις εξής κατανομές:

(4.19) Bernoulli(p), $p \in [0,1]$.

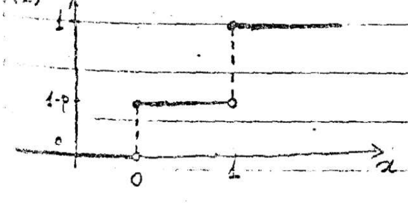
Ας θεωρήσουμε το πείραμα της ρίψεως ενός όχι κατ' ανάγκην αμερολήπτου νομίσματος, δηλαδή, $\Omega = \{K, \Gamma\}$, $\mathcal{A} = \{\emptyset, \Omega, \{K\}, \{\Gamma\}\}$, $P(\{\Gamma\}) =: p \in (0,1)$. Ορίζουμε μια τ.μ. $X: \Omega \to \mathbb{R}$ ως εξής: $X(K) = 0$ και $X(\Gamma) = 1$.

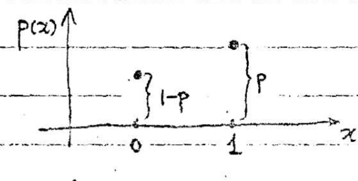
Άρα η τ.μ. X είναι διακριτή με $X(\Omega) = \{0,1\}$ και σ.μ.π.:

$$p(x) = P(X=x) = \begin{Bmatrix} P(\{K\}) & \text{εαν } x=0 \\ P(\{\Gamma\}) & \text{εαν } x=1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1-p & \text{εαν } x=0 \\ p & \text{εαν } x=1 \end{Bmatrix} =$$

$$= p^x (1-p)^{1-x}, \quad x \in \{0,1\} \text{ και } p \in [0,1].$$

Άρα, $F(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0 & \text{εαν } x<0 \\ 1-p & \text{εαν } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{εαν } x \geq 1 \end{cases}$.





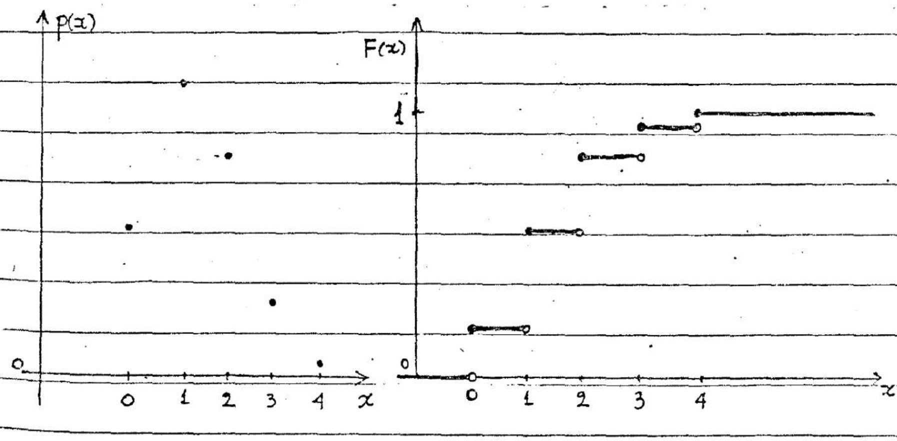
(4.20) Διωνυμική $\mathcal{D}(\nu, p)$, $\nu \in \mathbb{Z}_+$, $p \in [0,1]$.

Ας θεωρήσουμε ότι επαναλαμβάνουμε το πείραμα του παραδείγματος (4.19) ν ανεξάρτητες φορές, δηλαδή έχουμε μια ακολουθία δοκιμών Bernoulli και ενδιαφερόμεθα για τις πρώτες ν επαναλήψεις του πειράματος (Παραδ. 3.22 (β)).
Έστω $X((K,\Gamma,\Gamma,\dots,K)) :=$ αριθμός των Γ στις ν πρώτες επαναλήψεις.
Τότε $X(\Omega) = \{0,1,2,\dots,\nu\}$ και $\forall\, x \in X(\Omega)$ έχουμε:

$$p(x) = P(X=x) = \binom{\nu}{x} p^x (1-p)^{\nu-x}, \quad p \in [0,1] \quad (\text{όπου } p = P(\{\Gamma\})),$$

επειδή υπάρχουν $\binom{\nu}{x}$ διαφορετικές ν-άδες με x Γ μέσα τους και κάθε τέτοια έχει πιθανότητα $p^x(1-p)^{\nu-x}$ να εμφανισθεί (βλ. επίσης 3.22). Η αντίστοιχη σ.κ. F δίδεται από τη σχέση:

$$F(x) = P(X \le x) = \sum_{i \le x} p(i) = \sum_{i \le x} \binom{\nu}{x} p^x (1-p)^{\nu-x}.$$



σ.μ.π. και σ.κ. της $\mathcal{D}(4, \frac{1}{3})$.

(4.21) Παραδειγμα: Μια πολη εχει 1000 σπιτια. Κατα τη διαρκεια ενος χρονου, η πιθανοτητα να διαρρηχθη οποιοδηποτε απ' αυτα ειναι 1‰. Βρητε την πιθανοτητα να γινουν κατα την διαρκεια ενος ετους σ' αυτη τη πολη:

(α) ακριβως 2 διαρρηξεις.

(β) τουλαχιστον 2 διαρρηξεις.

Απ. Εστω X = αριθμος διαρρηξεων στην πολη κατα τη διαρκεια 1 ετους. Η τ.μ. X ακολουθει την $\mathcal{B}(1000, \frac{1}{1000})$. Αρα:

(α) $P(X=2) = \binom{1000}{2}\left(\frac{1}{1000}\right)^2\left(1-\frac{1}{1000}\right)^{998}$

(β) $P(X\geq 2) = 1-P(X\leq 1) = 1-P(X=0)-P(X=1)$
$= 1-\left(1-\frac{1}{1000}\right)^{1000} - 1000\,\frac{1}{1000}\left(1-\frac{1}{1000}\right)^{999}.$

(4.22) Γεωμετρικη (p), $p\in[0,1]$.

Εστω μια ακολουθια δοκιμων Bernoulli και εστω $X :=$ αριθμος των δοκιμων εως την 1η επιτυχια. Τοτε,

$P(X=x) = P(\underbrace{A\wedge A\wedge\cdots\wedge A}_{x-1}\wedge E) = [1-P(E)]^{x-1}P(E).$

Δηλαδη, θετοντας $p=P(E)$, η τ.μ. X εχει σ.μ.π.

$p(x) = P(X=x) = p(1-p)^{x-1}$, $x=1,2,\dots$ και $p\in[0,1]$,

και λεγεται Γεωμετρικη.

Παρατηρηστε οτι $P(X>x) = P(X\geq x+1) =$

$$= p \sum_{n=x+1}^{\infty} (1-p)^{n-1} = p \sum_{n=x}^{\infty} (1-p)^{n} = p(1-p)^{x} \sum_{n=x}^{\infty} (1-p)^{n-x}$$

$$= p(1-p)^{x} \sum_{n=0}^{\infty} (1-p)^{n} = p(1-p)^{x} \frac{1}{1-(1-p)} = (1-p)^{x}.$$

Αρα,

$$F(x) = 1-(1-p)^{x} \quad , x = 1, 2, \ldots \quad , p \in [0,1].$$

Επισης, παρατηρησε οτι η Γεωμετρικη δεν εχει "μνημη", δηλαδη,

$$P(X > k+x \mid X > k) = \frac{P(X > k+x \text{ και } X > k)}{P(X > k)} =$$

$$= \frac{P(X > k+x)}{P(X > k)} = \frac{(1-p)^{k+x}}{(1-p)^{k}} = (1-p)^{x} = P(X > x).$$

Αυτη η ιδιοτητα χαρακτηριζει την Γεωμετρικη μεταξυ των διακριτων κατανομων.

(4.23) Παραδειγμα: Μια μηχανη ενος εργοστασιου τιθεται σε λειτουργια καθημερινα στις 8 π.μ. Απο τις προδιαγραφες της ξερουμε οτι η πιθανοτητα να μη δουλεψη — σε καθε αποπειρα να μπει σε λειτουργια — ειναι $p = 0{,}02$. Ποια η πιθανοτητα να μη δουλεψη για πρωτη φορα την 50η ημερα απο τωρα; Πριν την 50η ημερα;

Απ. Εχουμε δοκιμες Bernoulli με πιθανοτητα "επιτυχιας" $p = 0{,}02$, και $X :=$ αριθμος δοκιμων εως την 1η "επιτυχια". Αρα:

$$P(X = 50) = p(1-p)^{50-1} = (0{,}02)(0{,}98)^{49} \doteq 0{,}0074.$$

$$P(X < 50) = P(X \leq 49) = 1 - P(X > 49) = 1-(1-p)^{49} \doteq 0{,}63.$$

(4.24) <u>Αρνητική Διωνυμική</u> $\mathcal{AD}(\kappa, p)$, $\kappa = 1, 2, 3, \ldots$, $p \in [0,1]$.

Εστω μια ακολουθία δοκιμών Bernoulli με πιθανότητα "επιτυχίας" p, και εστω

$X :=$ αριθμος των δοκιμων εως την κ-στη επιτυχια.

Τοτε, θετοντας

$A := \{$η x-στη δοκιμη ειναι επιτυχια$\}$ και

$B := \{$τις προηγουμενες $x-1$ δοκιμες εχουμε $\kappa-1$ επιτυχιες$\}$),

εχουμε:

$$P(X=x) = P(A \cap B) = P(A)P(B) = p \cdot \binom{x-1}{\kappa-1} p^{\kappa-1} (1-p)^{(x-1)-(\kappa-1)}$$

$$= \binom{x-1}{\kappa-1} p^{\kappa} (1-p)^{x-\kappa} , \quad x = \kappa, \kappa+1, \ldots .$$

Μια τ.μ. X με σ.μ.π.:

$$p(x) = P(X=x) = \binom{x-1}{\kappa-1} p^{\kappa} (1-p)^{x-\kappa} , \quad x = \kappa, \kappa+1, \kappa+2, \ldots,$$

λεγεται αρνητικη διωνυμικη, $\mathcal{AD}(\kappa, p)$, $p \in [0,1]$, $\kappa = 1, 2, \ldots$.

Η ονομασια της οφειλεται στους συντελεστες του διωνυμου:

$$(1-q)^{-\kappa} = 1 + \kappa q + \frac{\kappa(\kappa+1)}{2!} q^2 + \frac{\kappa(\kappa+1)(\kappa+2)}{3!} q^3 + \ldots$$

$$= \sum_{x=\kappa}^{\infty} \binom{x-1}{\kappa-1} q^{x-\kappa} , \quad q \in [0,1].$$

Η Γεωμετρικη (p) ειναι μερικη περιπτωση της $\mathcal{AD}(\kappa,p)$ για $\kappa=1$. Επισης οπως θα δουμε αργοτερα η $\mathcal{AD}(\kappa,p)$ μπορει να παρασταθη σαν το αθροισμα κ ανεξαρτητων Γεωμετρικων (p) τ.μ..

(4.25) <u>Παραδειγμα:</u> Ας υποθεσουμε οτι εχουμε την περιπτωση της μηχανης του εργοστασιου του παραδειγματος (4.23), και οτι η πολιτικη των μηχανικων του εργοστασιου ειναι να σταματουν μια μηχανη για γενικη επισκευη οταν χαλαση για τριτη φορα. Ποια ειναι η πιθανοτητα να χρειασθη γενικη επισκευη της εν λογω μηχανης της 50ή ημερα της λειτουργιας της;

Απ. Εστω η τ.μ. $X :=$ αριθμος δοκιμων εως την 3η αποτυχια λειτουργιας της μηχανης. Τοτε:

$$P(X=50) = \binom{50-1}{3-1} p^3 (1-p)^{50-3} = \frac{49!}{2!\,47!} (0{,}02)^3 (0{,}98)^{47}$$
$$\approx 0{,}0036 .$$

(4.26) Παραδειγμα: Εστω μια ακολουθια δοκιμων Bernoulli με πιθανοτητα επιτυχιας $p \in [0,1]$. Ποια ειναι η πιθανοτητα $P_{\kappa,\nu}$ να συμβουν κ "επιτυχιες" πριν απο την ν-στη "αποτυχια";

Απ. Εστω η τ.μ. $X :=$ αριθμος δοκιμων εως την κ-στη "επιτυχια". Τοτε η $X \sim \mathcal{AD}(\kappa, p)$. Επισης παρατηρειται οτι ο μονος τροπος να συμβουν κ "επιτυχιες" πριν απο την ν-στη "αποτυχια", ειναι να ελθη η κ-στη "επιτυχια" οχι αργοτερα απο την $(\kappa+\nu-1)$ δοκιμη, δηλαδη,

$$P_{\kappa,\nu} = P(X \le \kappa+\nu-1) = \sum_{x=\kappa}^{\kappa+\nu-1} \binom{x-1}{\kappa-1} p^{\kappa} (1-p)^{x-\kappa} .$$

(4.27) Σημειωση: Η δειγματοληψια με επαναθεση, βλ. Παραδ. (2.28), οδηγει σε δοκιμες Bernoulli και εαν μεν η τ.μ. που μας ενδιαφερει ειναι ο αριθμος X των "επιτυχιων" σε ν-σταθερα-δοκιμες, τοτε οδηγουμεθα στην Διωνυμικη (ν,p) κατανομη ή την ιδιαιτερη περιπτωση της (για $\nu=1$) την Bernoulli (p). Εαν ομως η τ.μ. που μας ενδιαφερει ειναι ο αριθμος X των δοκιμων που απαιτουνται για να παρατηρησουμε την κ - σταθερα - "επιτυχια", τοτε οδηγουμεθα στην Αρνητικη Διωνυμικη (κ,p) ή την ιδιαιτερη περιπτωση της (για κ=1) την Γεωμετρικη (p). Με δειγματοληψια ομως <u>χωρις επανατεση</u> (προφανως <u>δεν</u> οδηγει σε δοκιμες Bernoulli) οδηγουμεθα στην Υπεργεωμετρικη κατανομη την οποια οριζουμε αμεσως:

(4.28) <u>Υπεργεωμετρικη</u> $(K,M,\nu)\in\mathbb{Z}_+^3$, $0\le\nu\le K\wedge M$.

Εστω ενα δοχειο με K ασπρους και M μαυρους βωλους απο το οποιο παιρνουμε τυχαια χωρις επανατεση $\nu=0,1,\dots,K\wedge M$ βωλους. Εστω η τ.μ. $X:=$αριθμος των ασπρων βωλων στο δειγμα των ν. Τοτε, η τ.μ. X ακολουθει την Υπεργεωμετρικη κατανομη με σ.μ.π.:

$$p(x)=P(X=x)=\frac{\binom{K}{x}\binom{M}{\nu-x}}{\binom{K+M}{\nu}}\ ,\quad x=0,1,\dots,\nu\ .$$

(4.29) <u>Ασκηση</u>: Αποδειξτε οτι:

$$\binom{K+M}{\nu}=\sum_{x=0}^{\nu}\binom{K}{x}\binom{M}{\nu-x}\quad,\text{ οπου }\ 0\le\nu\le K\wedge M\ ,$$

ν,K,M ακεραιοι μη αρνητικοι αριθμοι.

(4.30) <u>Παραδειγμα</u>: Σε μια περιοδο που δεν γεννουν τα ζαρκαδια και απαγορευεται το κυνηγι τους, η υπηρεσια δασων συλλαμβανει K=100 ζαρκαδια απο ενα δασος και τα σημαδευει στο δεξι αυτι τους. Μετα τα αφηνει παλι ελευθερα να αναμιχθουν με τα αλλα ζαρκαδια αυτου του δασους, και δυο μερες αργοτερα συλλαμβανει τυχαια 50 ζαρκαδια. Αν ο πληθυσμος των ζαρκαδιων στο εν λογω δασος ειναι $N=1000$, ποια η πιθανοτητα 6 απ' τα 50 να ειναι απ' τα σημαδεμενα;

<u>Απ.</u>

Η τ.μ. X = αριθμος των σημαδεμενων ζαρκαδιων στο δειγμα των 50,

ακολουθει την Υπεργ. $(100, 900, 50)$. Αρα, η

$$P(X=6) = \frac{\binom{100}{6}\binom{900}{44}}{\binom{1000}{50}} .$$

Σ' αυτου του ειδους τα πειραματα το N ειναι συνηθως αγνωστο και θελουμε να το εκτιμησουμε. Μια διαισθητικα ικανοποιητικη εκτιμηση του N μπορει να γινη απο τη σχεση: $\frac{100}{N} \approx \frac{6}{50}$ και αρα $N \approx 833$. Συχνα, γινονται επανειλημμενες δειγματοληψιες και τα συλλεχθεντα στατιστικα στοιχεια μπορουν να συνεδουν κατα τροπο "βελτιστο" (για την Υπεργεωμετρικη) και να οδηγησουν σε πιο "ακριβεις" εκτιμητριες του N.

Μια απο τις πιο ενδιαφερουσες και χρησιμες διακριτες κατανομες ειναι η Poisson την οποια αναπτυσουμε αμεσως:

(4.31) <u>Poisson(λ)</u>, $\lambda>0$.

Ας υποθεσουμε οτι παρατηρουμε ενα ραδιενεργο υλικο και μας ενδιαφερει να μετρησουμε τον (τυχαιο) αριθμο:

$X :=$ αριθμος εκπεμπομενων σωματιδιων κατα τη διαρκεια 1 ωρας, απο το ραδιενεργο υλικο.

Ποια ειναι η κατανομη της τ.μ. X;

Θα χωρισουμε το διαστημα της 1 ωρας σε ν ισομηκα υποδιαστηματα: $0 \quad 1/\nu \quad 2/\nu \quad 3/\nu \quad \dots \quad \frac{\nu-1}{\nu} \quad 1$,

και για ευκολια θα υποθεσουμε — για τη φυσικη του προβληματος — τα εξης: <u>για ν αρκετα μεγαλο</u>

(α) <u>το πολυ ενα</u> σωματιδιο μπορει να εκπεμφθη απο την πηγη σε καθε υποδιαστημα: $I_i := \left(\frac{i-1}{\nu}, \frac{i}{\nu}\right]$; $i=1,2,\dots,\nu$.

(β) $E_1, E_2, \dots, E_\nu$ ειναι <u>ανεξαρτητα</u>, οπου για $i=1,2,\dots,\nu$, $E_i := \{$ακριβως ενα σωματιδιο εκπεμφθηκε στο διαστημα $I_i\}$.

(γ) $P(E_i) = \lambda \times$μηκος$(I_i) = \frac{\lambda}{\nu}$, $i=1,2,\dots,\nu$, $\lambda>0$.

Με αυτες τις υποθεσεις (οι οποιες μπορουν να εξασθενηθουν αισθητα και να εχουμε το ιδιο τελικο αποτελεσμα με περισσοτερο κοπο), εχουμε ν δοκιμες Bernoulli με πιθανοτητα επιτυχιας (εκπομπη σωματιδιου στο I_i) $p = \lambda/\nu$. Αρα, $X \dot\sim \mathcal{D}(\nu, \frac{\lambda}{\nu})$, δηλαδη

$$P(X=x) \doteq \binom{\nu}{x}\left(\frac{\lambda}{\nu}\right)^x\left(1-\frac{\lambda}{\nu}\right)^{\nu-x} =: p_\nu(x) \quad , x=0,1,2,\dots,\nu.$$

Προφανως, η προσεγγιση της πραγματικοτητας που εξασφαλιζεται απο τις υποθεσεις (α), (β) και (γ), βελτιωνεται οσο το ν αυξανει. Επισης η παραμετρος ν εχει εισαχθη απο εμας και οχι τη φυση. Για να βρουμε λοιπον με καλυτερη προσεγγιση την κατανομη της X θα βρουμε το οριο της $p_\nu(x)$.

Εχουμε:

$$p_\nu(x) = \frac{\nu!}{x!\,(\nu-x)!}\left(\frac{\lambda}{\nu}\right)^{x}\left(1-\frac{\lambda}{\nu}\right)^{\nu-x} = \left(1-\frac{\lambda}{\nu}\right)^{\nu}\frac{\lambda^{x}}{x!}\,A_\nu ,$$

οπου, $A_\nu := \dfrac{\nu!}{(\nu-x)!}\,\nu^{-x}\left(1-\dfrac{\lambda}{\nu}\right)^{-x} = \left(1-\dfrac{\lambda}{\nu}\right)^{-x}\cdot$

$$\cdot\frac{\nu!}{e^{-\nu}\,\nu^{\nu+1/2}\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{e^{-(\nu-x)}(\nu-x)^{\nu-x+1/2}\sqrt{2\pi}}{(\nu-x)!}\cdot e^{-x}\cdot\left(1-\frac{x}{\nu}\right)^{-\nu+(x-1/2)}$$

$$\xrightarrow[\nu\to\infty]{} 1\cdot 1\cdot 1\cdot e^{-x}\,(e^{-x})^{-1} = 1 ,$$

οπου χρησιμοποιησαμε τον τυπο του Stirling (1.21) και το οτι $\lim\limits_{\nu\to\infty}\left(1+\frac{a}{\nu}\right)^{\nu} = e^{a}$, $a\in\mathbb{R}$.

Αρα,

$$P(X=x) = \lim_{\nu\to\infty} p_\nu(x) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^{x}}{x!} \quad , \quad x=0,1,2,\dots .$$

Λεμε, οτι μια τ.μ. X ακολουθει την κατανομη Poisson (λ), $\lambda>0$, εαν

$$p(x) = P(X=x) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^{x}}{x!} \quad , \quad x=0,1,2,\dots .$$

Θα δειξουμε αργοτερα (βλ. 5.35), το γενικοτερο αποτελεσμα:

(4.32) <u>Προταση</u>: Αν $X_\nu \sim \mathcal{B}(\nu, p_\nu)$ και $\nu p_\nu \xrightarrow[\nu\to\infty]{} \lambda < +\infty$, τοτε,

$$\lim_{\nu\to\infty} P(X_\nu = x) = \lim_{\nu\to\infty}\binom{\nu}{x} p_\nu^{x}(1-p_\nu)^{\nu-x} = e^{-\lambda}\frac{\lambda^{x}}{x!} = P(Y=x),$$

οπου $Y \sim$ Poisson (λ).

(4.33) Σημ. Αυτη η προσεγγιση της $\mathcal{D}(\nu, p_\nu)$ απο την Poisson(νp_ν), ειναι εξαιρετικα χρησιμη, διοτι οι πιθανοτητες της Poisson ειναι πολυ πιο ευκολο να υπολογισθουν, καθως επισης και εξαιρετικα καλη οταν το ν ειναι "πολυ μεγαλο" και το p_ν "πολυ μικρο", ουτως ωστε το $\nu p_\nu \doteq \lambda$ να ειναι "μετριου" μεγεθους.

Οταν το ν ειναι "σχετικα μεγαλο" και το $\nu p_\nu (1-p_\nu) \geqslant 10$, τοτε η προσεγγιση της $\mathcal{D}(\nu, p_\nu)$ απο την $N(\nu p_\nu, \nu p_\nu(1-p_\nu))$ ειναι πιο επιτυχης (βλ. Κ.Ο.Θ., και (4.55)).

Η προταση (4.32) ειναι πολυ ενδιαφερουσα για τις εφαρμογες, διοτι πολλων φαινομενων οι πιθανοθεωρητικες δομες ειναι κατα προσεγγιση τουλαχιστον Διωνυμικης φυσεως, με ν "πολυ μεγαλο" και νp_ν "μετριου" μεγεθους, και αρα μπορουν να ερμηνευθουν και μελετηθουν μεσω της κατανομης Poisson. Μερικα παραδειγματα ειναι τα εξης:

(i) Τυπογραφικα λαθη: Εαν μια σελιδα εχει 1000 γραμματα και με πιθανοτητα $5/10^4$ το καθενα, ανεξαρτητα των αλλων, εκτυπωνεται λαθος, τοτε η τ.μ. $X :=$ αριθμος τυπογραφικων λαθων σε μια σελιδα $\sim \mathcal{D}(1000, 5/10^4)$ η οποια μπορει να προσεγγισθη πολυ καλα απο την Poisson $(0,5)$.

(ii) Σπανιες Ασθενειες και Επιδημιες: Εαν καθε ενας απο τους 150.000 (μονιμους) κατοικους του Ηρακλειου εχει πιθανοτητα $3/10^5$ να προσβληθη απο μια συγκεκριμενη ασθενεια A, τοτε η τ.μ. $X :=$ αριθμος Ηρακλειωτων που υποφερουν απο την A $\sim \mathcal{D}(15.10^4, 3.10^{-5})$ η οποια μπορει να προσεγγισθη αριστα από την Poisson(4,5).

(iii) Αριθμος Δυστυχηματων (φυσικες καταστροφες, ατυχηματα, κ.τ.λ.),

(iv) Γεννετικες ασθενειες,

(v) Λαθη σε κρυσταλλικες δομες,

(vi) Κατανομη στο χωρο των αστερων ενος γαλαξια,

(vii) Εκπομπες σωματιδιων ραδιενεργων υλικων,

(viii) Τηλεφωνηματα τα οποια εξυπηρετουνται (ας πουμε) απο καποιο υποσταθμο του ΟΤΕ,

(ix) Αριθμος πελατων που προσερχονται σε καποιο καταστημα,

και αλλα.

(4.34) <u>Παραδειγμα</u>. Εστω οτι η τ.μ. $X :=$ αριθμος ελαφρων σεισμων στην Ελλαδα ανα εβδομαδα $\sim$ Poisson (3). Ποια η πιθανοτητα να εχουμε τουλαχιστον 2 ελαφρους σεισμους στην Ελλαδα αυτη την εβδομαδα;

<u>Απ.</u> $P(X \geq 2) = 1 - P(X<2) = 1 - P(X \leq 1) =$
$= 1 - P(X=0) - P(X=1) = 1 - e^{-3}\dfrac{3^0}{0!} - e^{-3}\dfrac{3^1}{1!} =$
$= 1 - 4e^{-3} \approx 0,8$.

(4.35) <u>Ασκηση</u>: Αποδειξτε οτι:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{\lambda} .$$

(4.36) <u>Ασκηση</u>: Αποδειξτε οτι οι σ.μ.π. των τ.μ. 4.10, 20, 24, 28, 31 ικανοποιουν τις (4.5).

(4.37) ΠΙΝΑΚΑΣ ΒΑΣΙΚΩΝ ΔΙΑΚΡΙΤΩΝ ΜΟΝΟΔΙΑΣΤΑΤΩΝ ΚΑΤΑΝΟΜΩΝ.

ΟΝΟΜΑ και ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΙ	Σ.Μ.Π. & ΦΟΡΕΑΣ $P(X=x)=$	ΜΕΣΗ ΤΙΜΗ & ΔΙΑΣΠΟΡΑ	ΡΟΠΟΓΕΝΝΗΤΡΙΑ $M(t)=E\left(e^{-tX}\right),\ t>0$
$u_\Delta(N)$ $N=1,2,\dots$	$1/N$ $x=1,2,\dots,N$	$(N+1)/2$ $(N^2-1)/12$	$e^{-t}(e^{-Nt}-1)/(e^{-t}-1)$
$\mathcal{YG}(K,M,\nu)$ $K,M=0,1,2,\dots$ $\nu=0,1,\dots,K\wedge M$	$\dfrac{\binom{K}{x}\binom{M}{\nu-x}}{\binom{K+M}{\nu}}$ $x=0,1,2,\dots,\nu$	$\nu K/(K+M)$ $\dfrac{\nu KM(K+M-\nu)}{(K+M-1)(K+M)^2}$	$\sum_{k=0}^{\nu} e^{-tk}\dfrac{\binom{K}{k}\binom{M}{\nu-k}}{\binom{M+K}{\nu}}$
$\mathcal{D}(\nu,p)$ $\nu=1,2,\dots$ $0\le p\le 1$	$\binom{\nu}{x}p^x(1-p)^{\nu-x}$ $x=0,1,2,\dots,\nu$	νp $\nu p(1-p)$	$(pe^{-t}+1-p)^{\nu}$
$\mathcal{AD}(\kappa,p)$ $\kappa=1,2,\dots$ $0\le p\le 1$	$\binom{x-1}{\kappa-1}p^{\kappa}(1-p)^{x-\kappa}$ $x=\kappa,\kappa+1,\kappa+2,\dots$	κ/p $\kappa(1-p)/p^2$	$\left[\dfrac{pe^{-t}}{1-(1-p)e^{-t}}\right]^{\kappa}$ $t>\log(1-p)$
$\mathcal{P}oisson(\lambda)$ $\lambda>0$	$e^{-\lambda}\lambda^x/x!$ $x=0,1,2,\dots$	λ λ	$\exp\{\lambda(e^{-t}-1)\}$

Σημειωσεις: 1) Η Bernoulli (p) ειναι η ιδια με $\mathcal{D}(\nu,p)$.

2) Η Γεωμέτρικη(p) ειναι η ιδια με $\mathcal{AD}(1,p)$.

3) $\mathcal{D}(X)=E[X-EX]^2=EX^2-(EX)^2$.

Παραδειγματα Μονοδιαστατων Κατανομων (συνεχεια).

ΑΠΟΛΥΤΑ ΣΥΝΕΧΕΙΣ.

Στο παραδειγμα (4.11) παρουσιασαμε την απλουστερη ισως συνεχη κατανομη, την

Ομοιομορφη στο (α, β), $\mathcal{U}(\alpha,\beta)$, $-\infty<\alpha<\beta<+\infty$,

με πυκνοτητα :

$$f(x) = (\beta-\alpha)^{-1}\, 1(\alpha<x<\beta) ,$$

και σ.κ. :

$$F(x) = \frac{x-\alpha}{\beta-\alpha}\, 1(\alpha<x<\beta) + 1(x\geq\beta) .$$

Αλλα παραδειγματα περιλαμβανουν τις εξης κατανομες:

(4.38) Εκθετικη $\mathcal{E}(\lambda)$, $\lambda>0$.

Εχει παρατηρηθη οτι το ποσοστο των ηλεκτρικων λυχνιων που συνεχιζουν να φωτιζουν (πριν χαλασουν) συνεχως για χρονο μεγαλυτερο του t πεφτει εκθετικα. Ετσι, συνηθως, για την τ.μ. T = διαρκεια ζωης ηλεκτρικης λυχνιας, χρησιμοποιειται το παραμετρικο μοντελο πιθανοτητος :

$$P(T>t) = e^{-\lambda t} \quad , \; t>0 ,$$

με παραμετρο $\lambda>0$.

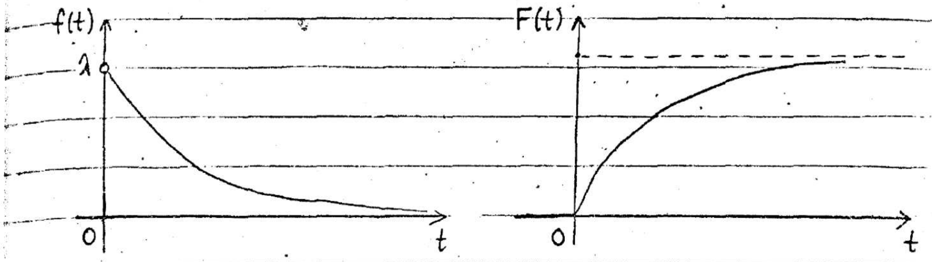
Δηλαδη εχουμε,

$$F(t) = [1-e^{-\lambda t}]\, 1(t>0)$$

και

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}\, 1(t>0) \quad , \; \lambda>0 .$$

Μια τετοια τ.μ. T ονομαζεται εκθετικη.



Η $\mathcal{E}(\lambda)$ χαρακτηρίζεται μεταξύ των συνεχών κατανομών από την εξής ενδιαφέρουσα ιδιότητα:

(4.39) $$P(T>\tau+t \mid T>\tau) = P(T>t),$$

δηλαδή δεν έχει "μνήμη":

$$P(T>\tau+t \mid T>\tau) = \frac{P(T>\tau+t \text{ και } T>t)}{P(T>\tau)} = \frac{P(T>\tau+t)}{P(T>\tau)} =$$

$$= \frac{e^{-\lambda(\tau+t)}}{e^{-\lambda\tau}} = e^{-\lambda t} = P(T>t).$$

(4.40) Παράδειγμα: Ας υποτεθεί ότι ο χρόνος ζωής ενός ανθρώπου ακολουθεί την $\mathcal{E}\left(\lambda = \frac{1}{75}\right)$. Βρείτε την πιθανότητα ο άνθρωπος αυτός να ζήσει:

(α) το πολύ 70 χρόνια,
(β) ακριβώς 70 χρόνια,
(γ) τουλάχιστον 70 χρόνια,
(δ) πάνω από 70 χρόνια αν είναι τώρα 30 χρονών.

Απ. Έστω X = τα χρόνια ζωής του εν λόγω ανθρώπου:

(α) $P(X \le 70) = F(70) = 1 - e^{-70/75} \approx 0{,}61$

(β) $P(X = 70) = 0$.

(γ) $P(X \ge 70) = P(X > 70) = e^{-70/75} \approx 0{,}39$

(δ) $P(X>70 \mid X>30) = P(X>40) = e^{-40/75} \approx 0{,}59$.

Η $\mathcal{E}(\lambda)$ ειναι ειδικη περιπτωση των κατανομων Γαμμα:

(4.41) <u>Γαμμα</u>, $\mathcal{G}(\alpha,\lambda)$, $\alpha,\lambda>0$.

Η κατανομη Γαμμα εχει πυκνοτητα:

$$f(x)=\frac{\lambda^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\,x^{\alpha-1}e^{-\lambda x}\,1(x>0),\quad \alpha,\lambda>0,$$

οπου $\Gamma(\alpha):=\int_0^{\infty}x^{\alpha-1}e^{-x}dx$.

(4.42) <u>Σημ.</u>: $\Gamma(\alpha+1)=\alpha\Gamma(\alpha)\quad\forall\,\alpha>0$ (ολοκληρωση κατα μερη).

Αρα, $\Gamma(\nu+1)=\nu!\quad\forall\,\nu=0,1,2,\ldots$.

Επισης, $\Gamma(1/2)=\pi^{1/2}$.

Αλλες χρησιμες ιδιοτητες της συναρτησεως $\Gamma(\cdot)$ περιλαμβανουν:

τυπος διπλασιασμου: $\pi^{-1/2}2^{2\alpha-1}\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha+\frac{1}{2})=\Gamma(2\alpha)$,

τυπος Stirling (γενικευση): $\lim_{\alpha\to\infty}\Gamma(\alpha)/[e^{-\alpha}\alpha^{\alpha-1/2}\sqrt{2\pi}]=1$

κατοπτρικη ιδιοτητα: $\Gamma(\frac{1}{2}+\alpha)\Gamma(\frac{1}{2}-\alpha)=\frac{\pi}{\text{συν}(\alpha\pi)}$, $0<\alpha<\frac{1}{2}$.

Επισης, σαν αζο: $\int_0^{\infty}(\log x)e^{-x}dx=-\gamma$,

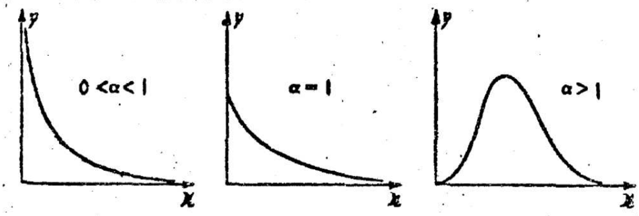
οπου $\gamma=\lim_{\nu\to\infty}\left\{\sum_{k=1}^{\nu}\frac{1}{k}-\log\nu\right\}=0{,}5772156649\ldots$,

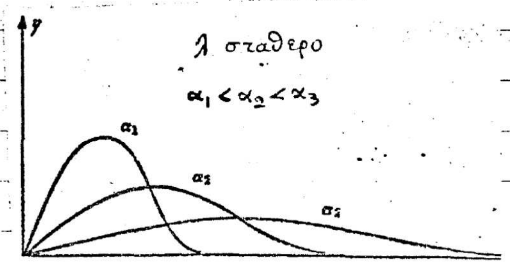
η γνωστη σταθερα του Euler.

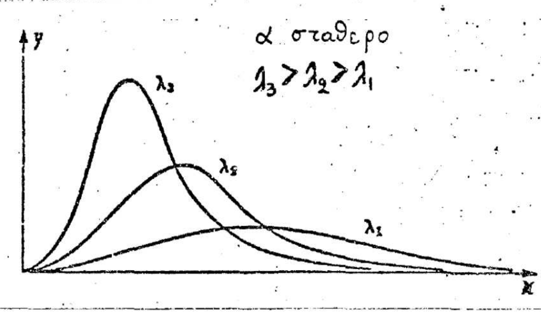
(4.43) <u>χ^2_{ν}</u>, $\nu=1,2,3,\ldots$.

Αυτη η κατανομη χρησιμοποιειται συχνα στη στατιστικη αναλυση κανονικων (βλ. 4.49) δειγματων, ειναι δε ειδικη περιπτωση της κατανομης Γαμμα, με $\alpha=\nu/2$ και $\lambda=1/2$. Η παραμετρος ν ονομαζεται <u>βαθμος ελευθεριας</u> της κατανομης.

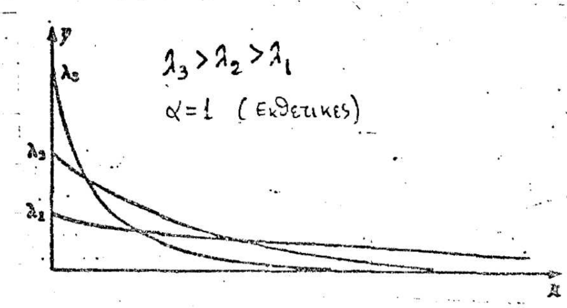
Μορφες πυκνοτητων κατανομης $\Gamma(\alpha,\lambda)$







Παρατηρηστε οτι η $E(\lambda)$ ειναι ιδια με την $\Gamma(1,\lambda)$.



Η εκθετική είναι επίσης ειδική περίπτωση των κατανομών:

(4.44) <u>Weibull</u>, $W(\alpha, \lambda)$, $\alpha, \lambda > 0$,
με πυκνότητα κατανομής:

$$f(t) = \lambda \alpha t^{\alpha-1} e^{-\lambda t^{\alpha}} 1(t>0) \quad , \alpha, \lambda > 0 ,$$

και σ.κ. $F(t) = [1 - e^{-\lambda t^{\alpha}}] 1(t>0)$.

Παρατηρήστε ότι, γενικά, η

$$P(T \leq t+\Delta t \mid T>t) = \frac{P(T \leq t+\Delta t \text{ και } T>t)}{P(T>t)} =$$

$$= \frac{P(t<T \leq t+\Delta t)}{P(T>t)} = \frac{F(t+\Delta t) - F(t)}{1-F(t)} \doteq$$

$$\doteq \frac{f(t)\Delta t}{1-F(t)} = h(t)\Delta t \quad , \text{ για } \Delta t \text{ "μικρό", όπου}$$

(4.45) $$h(t) := \frac{f(t)}{1-F(t)} = -\frac{d}{dt} \log P(T>t) .$$

Δηλαδή η πιθανότητα κάποιος που επέζησε ως το χρόνο t, να πεθάνει αμέσως μετά (δηλαδή στο διάστημα $(t, t+\Delta t]$) είναι $P(T \leq t+\Delta t \mid T>t) \doteq h(t)\Delta t$,
έτσι η συνάρτηση $h(t)$ είναι γνωστή σαν <u>συνάρτηση ή ρυθμός κινδύνου</u> (hazard rate). Η συνάρτηση $S(t) := P(T>t) = 1-F(t)$ είναι γνωστή σαν <u>συνάρτηση επιβιώσεως</u> (survival function), και $h(t) = -\frac{d}{dt}\log S(t)$, και άρα:

(4.46) $$F(t) = 1 - S(t) = \left\{1 - e^{-\int_0^t h(\tau)d\tau}\right\} 1(t>0) .$$

Αν $h(t) = \lambda 1(t>0)$, $\lambda>0$, σταθερα, η (4.46) μας διδει οτι η τ.μ. $T \sim \mathcal{E}(\lambda)$.

Αν $h(t) = \lambda \alpha t^{\alpha-1} 1(t>0)$, η (4.46) μας διδει οτι η τ.μ. $T \sim W(\alpha, \lambda)$.

<u>Παρατηρηστε</u> οτι στην περιπτωση της Weibull,
αν το $\alpha > 1$, τοτε $h(t) \uparrow_{t>0}$ — <u>αυξων ρυθμος κινδυνου</u>,
αν το $\alpha = 1$, τοτε $h(t) =$ σταθερα — περιπτωση $\mathcal{E}(\lambda)$, με <u>ελλειψη "μνημης"</u>,
αν το $\alpha < 1$, τοτε $h(t) \downarrow_{t>0}$ — <u>φθινων ρυθμος κινδυνου</u>.

Η $W(\alpha, \lambda)$ με $\alpha > 1$, χρησιμοποιειται συχνα σαν μοντελο για τη διαρκεια ζωης μηχανηματων, συστηματων, αυτοκινητων, αεροπλανων, ηλεκτρικων συσκευων, κτ.τ.
Η $W(\alpha, \lambda)$ με $\alpha < 1$, χρησιμοποιειται συχνα σαν μοντελο για τη μετεγχειρητικη διαρκεια ζωης ασθενων.
Επισης, στις εφαρμογες, εχει κανεις συναρτησεις ρυθμου κινδυνου $h(t)$ που ειναι κατα τμηματα αυξουσες, σταθερες ή φθινουσες: η αντιστοιχη σ.κ. διδεται τοτε απο την (4.46).
Η εκτιμηση της $h(t)$ ειναι ενδιαφερον <u>στατιστικο προβλημα</u>.

(4.47) <u>Παραδειγμα</u>. Εστω $T :=$ διαρκεια ζωης μιας ηλεκτρικης συσκευης σε χρονια, και εστω οτι $T \sim W(2, 0{,}01)$

(α) Ποια η πιθανοτητα η συσκευη να λειτουργη:
- (i) για τουλαχιστον 10 χρονια;
- (ii) το πολυ για 12 χρονια;
- (iii) για τουλαχιστον 12 χρονια δεδομενου οτι λειτουργει για 10 χρονια;

(β) Υπολογιστε το ρυθμο κινδυνου της συσκευης, στο

$10^{\underline{o}}$ χρονο λειτουργιας της.

<u>Απ.</u> (α) (i) $P(T>10) = e^{-(0,01).10^2} = e^{-1} \approx 0,37$.

(ii) $P(T\leq 12) = F(12) = 1-e^{-(0,01)12^2} \approx 0,76$

(iii) $P(T\geq 12 \mid T>10) = \dfrac{P(T\geq 12 \,\&\, T>10)}{P(T>10)} =$

$$= \frac{P(T\geq 12)}{P(T>10)} = \frac{P(T>12)}{P(T>10)} = \frac{\exp\{-(0,01)12^2\}}{\exp\{-(0,01).10^2\}} \approx 0,64.$$

(β) $h(t) = \dfrac{f(t)}{1-F(t)} = \lambda\alpha\, t^{\alpha-1}\, 1(t>0) = (0,02)\, t\, 1(t>0)$,

αρα $h(10) = (0,02)\,10 = 0,2$.

Η Ομοιομορφη συνεχης κατανομη $\mathcal{U}(0,1)$, την οποια συναντησαμε στο Παραδ. (4.11), ειναι ειδικη περιπτωση της οικογενειας κατανομων :

(4.48) <u>Βητα</u>, $\mathcal{B}(\alpha,\beta)$; $\alpha,\beta>0$,
με πυκνοτητα κατανομης :

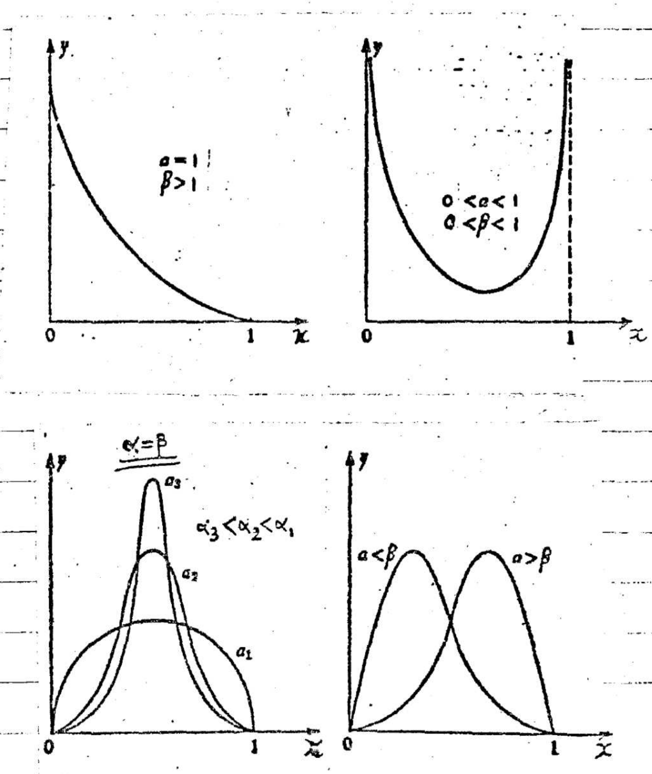
$$f(x) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\, x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\, 1(0<x<1).$$

<u>Σημ.</u> Η συναρτηση βητα οριζεται σαν :

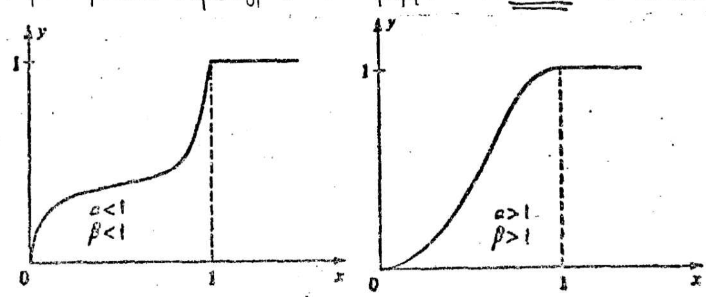
$$B(\alpha,\beta) = \int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}.$$

<u>Σημ.</u> Η $\mathcal{U}(0,1)$ ειναι η ιδια με την $\mathcal{B}(1,1)$.

Η κατανομη Βητα, μετασχηματισμενη στο τυχον διαστημα (c,d), δηλαδη, $Y = dX + c$, ειναι σε ευρυτατη χρηση σαν μοντελο τ.μ. με φορεα πεπερασμενο διαστημα, κυριως λογω της ευλυγισιας της μορφης της:



Δυο χαρακτηριστικα παραδειγματα των μορφων των <u>σ.κ.</u> της ειναι:



Κεντρικης σημασιας στη θεωρια πιθανοτητων (Κ.Ο.Θ.) και στη στατιστικη αναλυση δειγματων, ειναι ο ρολος της ακολουθης κατανομης :

(4.49) <u>Κανονικη</u> κατανομη , $N(\mu,\sigma^2)$, $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma>0$, επισης γνωστη σαν κατανομη Gauss, εχει πυκνοτητα :

$$f(x) = (2\pi\sigma^2)^{-1/2} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\} \quad , x \in \mathbb{R}.$$

Η χρηση αυτης της κατανομης σαν πιθανοθεωρητικου μοντελου διαφορων φαινομενων και μετρησεων ειναι ευρυτατη στη στατιστικη πραξη.

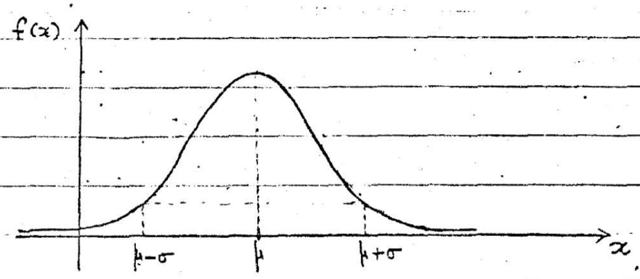
Η σ.κ. της $N(\mu,\sigma^2)$ δεν μπορει να υπολογισθη σε κλειστη μορφη :

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(z)\,dz = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right),$$

οπου Φ και ϕ συμβολιζουν την σ.κ. και π.κ. της <u>τυπικης κανονικης</u> $N(0,1)$, δηλαδη,

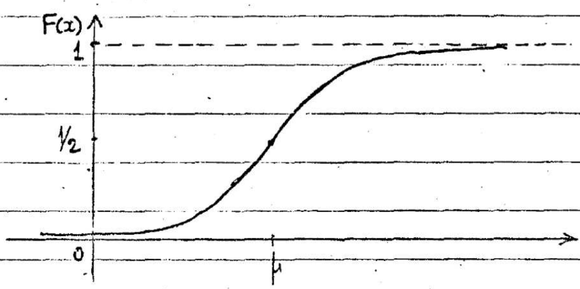
$$\phi(x) = (2\pi)^{-1/2} e^{-x^2/2} \quad , x \in \mathbb{R},$$

και $\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \phi(z)\,dz$, $x \in \mathbb{R}$. Η Φ μπορει να υπολογισθη απο την συναρτηση erf της FORTRAN ή απο πινακες που εχουν κατασκευασθη ακριβως επειδη η $N(\mu,\sigma^2)$ χρησιμοποιειται ευρυτατα.



$f'(x) = -\frac{(x-\mu)}{\sigma^2} f(x) = 0$ στο $x = \mu$

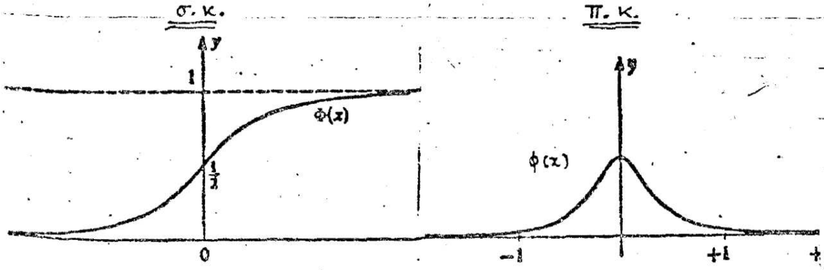
και $f''(x) = \frac{1}{\sigma^2}\left[\left(\frac{x-\sigma}{\sigma}\right)^2 - 1\right] f(x) = 0$ στα $x = \mu \pm \sigma$.

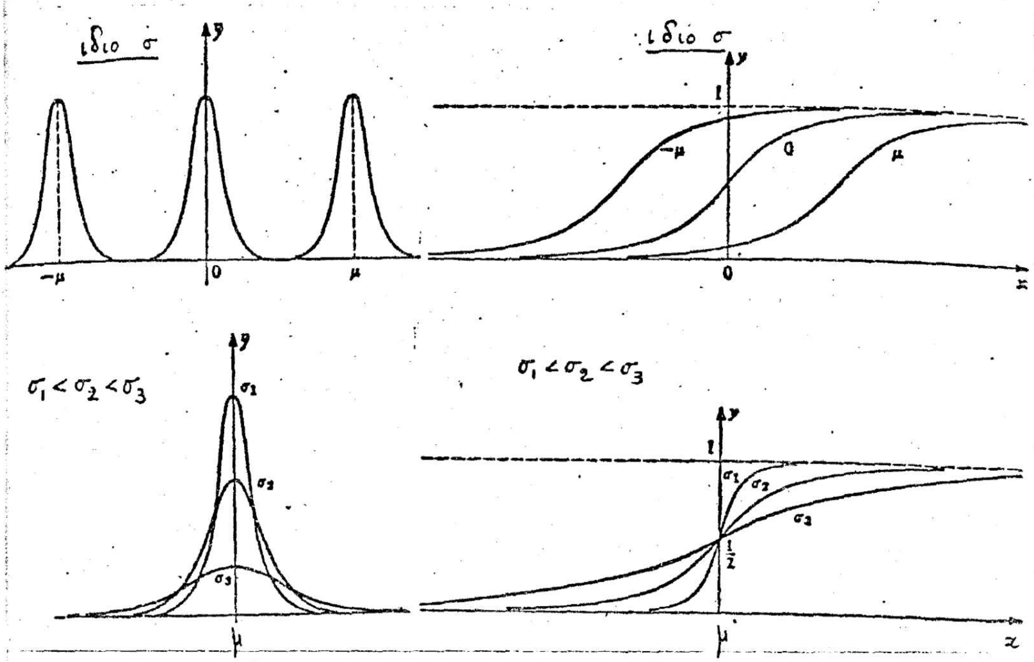


Το πως επηρεαζουν οι παραμετροι μ (τοποθεσιας) και σ (κλιμακας) τη μορφη της Κανονικης κατανομης δειχνεται χαρακτηριστικα στα ακολουθα σχηματα :

Τυπικη Κανονικη, N(0,1) :

σ.κ. π.κ.





(4.50) Παράδειγμα: $X \sim N(\mu,\sigma^2) \iff Z := \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$.

Άρα, $X=\mu+\sigma Z$ και $F_X(x)=\Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$ και $f_X(x)=\frac{1}{\sigma}\phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$:

$$
\begin{aligned}
P(Z\le z) &= P\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\le z\right) = P(X-\mu\le\sigma z) = \\
&= P(X\le\mu+\sigma z) = F_X(\mu+\sigma z) = \int_{-\infty}^{\mu+\sigma z} f_X(x)\,dx \\
&= \int_{-\infty}^{\mu+\sigma z} (2\pi\sigma^2)^{-1/2}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right\}dx \quad \left(\text{με } y=\frac{x-\mu}{\sigma}\right) \\
&= \int_{-\infty}^{z}(2\pi)^{-1/2}\exp\left\{-\frac{1}{2}y^2\right\}dy = \int_{-\infty}^{z}\phi(y)\,dy = \Phi(z).
\end{aligned}
$$

Επίσης, $F_X(x) = P(X\le x) = P(\mu+\sigma Z\le x) = P\left(Z\le\frac{x-\mu}{\sigma}\right) =$
$= \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$,

και άρα,

$$f_X(x) = F_X'(x) = \frac{d}{dx}\Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma}\phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) .$$

(4.51) <u>Ορισμος</u>: Μια τ.μ. X και η κατανομη της F_X, λεγεται <u>συμμετρικη γυρω απο τη σταθερα c</u>, εαν
$$F_X(c-x) = 1 - F_X(c+x) \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Για διακριτες κατανομες αυτο ισοδυναμει με: $p(c-x) = p(c+x)$ $\forall x$ και για συνεχεις ισοδυναμει με: $f_X(c-x) = f_X(c+x)$ $\forall x$.

(4.52) <u>Ασκηση</u>: Αποδειξτε οτι:

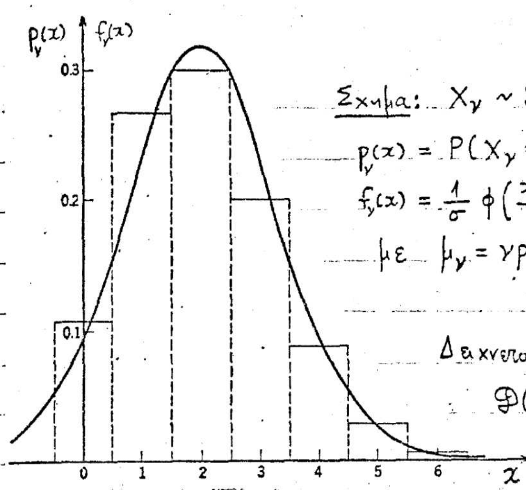
(α) η $\mathcal{B}i(n,\frac{1}{2})$ ειναι συμμετρικη γυρω απο το $n/2$, και

(β) η $N(\mu,\sigma^2)$ ειναι συμμετρικη γυρω απο το μ.

(4.53) <u>Παραδειγμα</u>: Αν $X \sim N(\mu,\sigma^2)$, τοτε
$$P(\mu-\sigma \le X \le \mu+\sigma) = \Phi(1) - \Phi(-1) = 2\Phi(1) - 1 \approx 0{,}6826,$$
δηλαδη, στην περιπτωση της $N(\mu,\sigma^2)$, το 70% της μαζας πιθανοτητος συγκεντρωνεται στο διαστημα $[\mu-\sigma, \mu+\sigma]$.

Θετουμε $Z := \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$ απο Παραδ. (4.18):
$$P(\mu-\sigma \le X \le \mu+\sigma) = P(-1 \le Z \le 1) = P(-1 < Z \le 1)$$
$$= \Phi(1) - \Phi(-1) = \Phi(1) - [1-\Phi(1)] = 2\Phi(1) - 1 \approx 0{,}6826,$$
οπου το $\Phi(1) \approx 0{,}8413$ το βρηκαμε απο πινακες της $N(0,1)$.

(4.54) <u>Ασκηση</u>: Αν η τ.μ. $X \sim N(\mu,\sigma^2)$, τοτε
$$P(\mu-(1{,}5)\sigma \le X \le \mu+(1{,}5)\sigma) = P(|Z| \le 1{,}5) \approx 0{,}8664,$$
οπου $Z := \frac{X-\mu}{\sigma}$.



Σχημα: $X_\nu \sim \mathcal{B}(\nu,p)$, με $\nu=10$, $p=0{,}2$.

$p_\nu(x) = P(X_\nu = x) = \binom{\nu}{x} p^x (1-p)^{\nu-x}$.

$f_\nu(x) = \frac{1}{\sigma}\,\phi\!\left(\frac{x-\mu_\nu}{\sigma_\nu}\right)$,

με $\mu_\nu = \nu p$ και $\sigma_\nu = \sqrt{\nu p(1-p)}$.

Δειχνεται εδω η προσεγγιση της $\mathcal{B}(\nu,p)$ απο την $N(\mu_\nu,\sigma_\nu^2)$, για "μεγαλα" ν. Η προσεγγιση αυτη ειναι "καλη" (καλυτερη της Poisson $(\lambda=\nu p)$) οταν το $\nu p(1-p) \geq 10$ (βλ. και 4.33).

Ενας προαγγελλος του Κεντρικου Οριακου Θεωρηματος (Κ.Ο.Θ., βλ. (8.10)) και μερικη περιπτωση του ειναι η ακολουθη προσεγγιση, την οποια διδουμε χωρις αποδειξη:

(4.55) Θεωρημα. (De Moivre - Laplace) Εστω $X_\nu \sim \mathcal{B}(\nu,p)$, τοτε

$$\lim_{\nu\to\infty} P\left(\frac{X_\nu - \nu p}{\sqrt{\nu p(1-p)}} \leq x\right) = \Phi(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

(4.56) Παραδειγμα: 50 ασθενεις ενος νοσοκομειου υφιστανται μια νεα διαιτα που υποτιθεται οτι μειωνει την χοληστερολη. Ο διαιτολογος που διευθυνει το πειραμα εχει αποφασισει οτι εαν στο τελος του πειραματος τουλαχιστον 70% των ασθενων εχουν λιγοτερη χοληστερολη, τοτε και μονον τοτε θα δεχθη να ανακοινωση οτι η νεα διαιτα ειναι πραγματι καλη. Ποια ειναι (εστω κατα προσεγγιση) η πιθανοτητα να δεχθη ο διαιτολογος οτι η νεα διαιτα ειναι καλη δεδομενου οτι η διαιτα δεν εχει καμμια επιδραση στη χοληστερολη;

Απ. Μια και η δίαιτα δεν έχει καμμία επίδραση στη χοληστερόλη, η πιθανότητα ενός ασθενούς που την υφίσταται να παρουσιάσει μειωμένη χοληστερόλη είναι $p=1/2$ (αγνοούμε εδώ, για απλούστευση, τυχόν ψυχολογικές επιδράσεις στο αποτέλεσμα του πειράματος). Τότε, ο αριθμός X των ασθενών με μειωμένη χοληστερόλη στο τέλος του πειράματος, μπορεί να θεωρηθεί ότι ακολουθεί την $\mathcal{B}(50,1/2)$.

Άρα, η πιθανότητα που ζητάμε είναι:

$$P(X \geq 35) = \sum_{x=35}^{50} \binom{50}{x} \left(\frac{1}{2}\right)^{x} \left(1-\frac{1}{2}\right)^{50-x} =$$

$= \sum_{x=35}^{50} \binom{50}{x} 2^{-50}$, η οποία είναι σχετικά δύσκολο να υπολογισθή. Όμως, από το Θεώρημα (4.55) έχουμε ότι:

$$P(X \geq 35) = P(X-\nu p \geq 10) = P\left(\frac{X-\nu p}{\sqrt{\nu p(1-p)}} \geq 2{,}83\right) \approx$$

$$\approx P(Z \geq 2{,}83) = 1-\Phi(2{,}83) \approx 1-0{,}9977 = 0{,}0023,$$

όπου $Z \sim N(0,1)$.

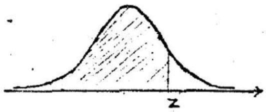
(4.57) Σημ. Έστω $X \sim \mathcal{B}(\nu,p)$,

(α) αν νp είναι "μικρός" αριθμός (<10 ας πούμε) τότε μόνο η Poisson ($\lambda=\nu p$) είναι καλή προσέγγιση στην $\mathcal{B}(\nu,p)$ (βλ. και Σημ. 4.33).

(β) αν $\nu p(1-p)$ είναι "μεγάλος" αριθμός (≥ 10 ας πούμε) τότε η $N(\nu p, \nu p(1-p))$ είναι προτιμότερη προσέγγιση στη $\mathcal{B}(\nu,p)$.

(γ) αν νp είναι "μεγάλος" αριθμός τότε οποιαδήποτε από τις δύο προσεγγίσεις στη $\mathcal{B}(\nu,p)$ είναι καλή.

(4.58) <u>ΠΙΝΑΚΑΣ της σ.κ. Φ της $N(0,1)$</u>.



z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5363	.5675	.5714	.5753
.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7703	.7734	.7764	.7974	.7823	.7852
.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9278	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9430	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9648	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9700	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9762	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9874	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.	.9987	.9990	.9993	.9995	.9997	.9998	.9998	.9999	.9999	1.0000

- $\phi(z) = e^{-z^2/2} / \sqrt{2\pi}$, $z \in \mathbb{R}$

- $\Phi(z) = \int_{-\infty}^{z} \phi(y)\,dy$

- $\Phi(-z) = 1 - \Phi(z)$

Αν $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, τοτε,

- $Z := \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$.

Αρα,

- $F_X(x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$.

(4.59) <u>t_ν, $\nu = 1, 2, \ldots$</u> η Student t με ν βαθμους ελευθεριας. (κεντρικη).

Εχει πικνοτητα,

$$f(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\sqrt{\nu\pi}\,\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \left(1 + \frac{x^2}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Η t_1 ειναι η ιδια με τη $C(0,1)$ (βλ. 4.58). Η t_ν χρησιμοποιειται ευρυτατα στους ελεγχους στατιστικων υποθεσεων (βλ. και (6.52)).

Εχει "βαρειες ουρες", "βαρυτερες" της Κανονικης, δηλαδη βαζει πολυ (σχετικα με την Κανονικη) μαζα πιθανοτητος σε περιοχες μακρυα απο το κεντρο της (βλ. σχημα). Οι "ουρες" της κατανομης "ελαφρυνουν" οπως το ν αυξανει και μαλιστα οταν το $\nu \to \infty$ η πυκνοτητα της t_ν τεινει στην πυκνοτητα της $N(0,1)$:

(4.60) <u>Προταση</u>: $\lim\limits_{\nu\to\infty} f_{t_\nu}(x) = \phi(x)$.

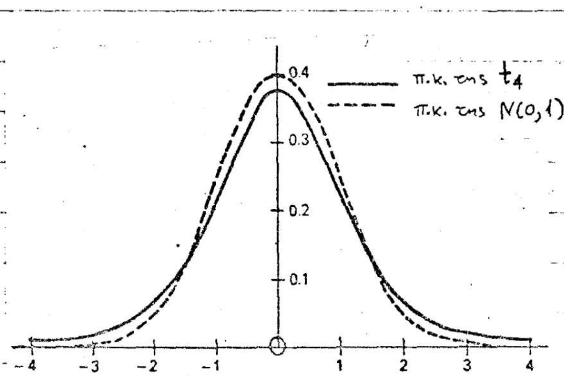
<u>Αποδ.</u> $f_{t_\nu}(x) = A_\nu \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\left(1+\dfrac{x^2}{\nu}\right)^{\nu}\right]^{-1/2}$,

οπου $A_\nu := \dfrac{2^{1/2}\,\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\nu^{1/2}\,\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \left(1+\dfrac{x^2}{\nu}\right)^{-1/2}$.

Δεδομενου οτι $\left(1+\dfrac{x^2}{\nu}\right)^{\nu} \xrightarrow[\nu\to\infty]{} e^{x^2}$, αρκει να δειξουμε οτι $A_\nu \xrightarrow[\nu\to\infty]{} 1$. Απο το γενικευμενο τυπο του Stirling (4.42),

$$A_\nu = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{e^{-(\nu+1)/2}\left(\frac{\nu+1}{2}\right)^{\nu/2}\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{e^{-\nu/2}\,(\nu/2)^{\nu/2-1/2}\sqrt{2\pi}}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \cdot e^{-1/2}\cdot\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^{\nu/2}$$

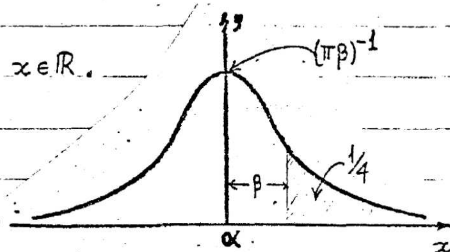
$$\cdot\left(1+\frac{x^2}{\nu}\right)^{-1/2} \xrightarrow[\nu\to\infty]{} 1\cdot 1\cdot e^{-1/2}\cdot e^{1/2}\cdot 1 = 1.$$



(4.61) <u>Κατανομη Cauchy</u>, $\mathcal{C}(\alpha,\beta)$, $\alpha\in\mathbb{R}$, $\beta>0$,

με πυκνοτητα:

$$f(x) = \frac{\beta}{\pi}\,\frac{1}{\beta^2+(x-\alpha)^2}\,,\quad x\in\mathbb{R}.$$



Αυτη η κατανομη εχει "βαρειες ουρες" και μαλιστα η $\mathcal{C}(0,1)$ ειναι η ιδια με την t_1.

Στη στατιστικη, η κατανομη αυτη χρησιμοποιειται σαν οριακη, συντηρητικα κακη, περιπτωση, για τον ελεγχο της ευσταθειας διαφορων εκτιμητριων. Η σ.κ. της δινεται απο την:

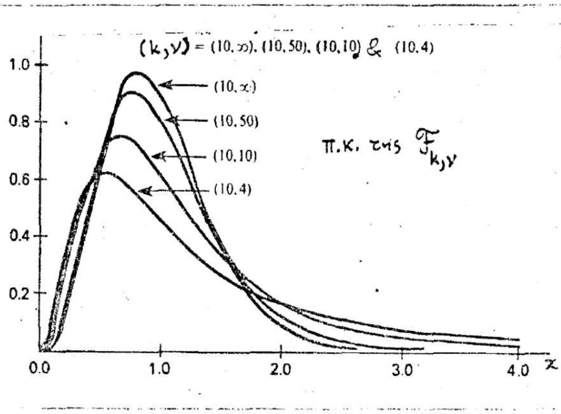
$$F(x) = \frac{1}{\pi}\left\{ \text{τοξ.εφ.}\left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right) + \frac{\pi}{2}\right\},\quad x\in\mathbb{R}.$$

(4.62) <u>Κατανομη Fisher</u>, $\mathcal{F}_{k,\nu}$, $k,\nu = 1,2,\dots$ (βαθμοι ελευθεριας),

με πυκνοτητα:

$$f(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{k+\nu}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}\cdot\left(\frac{k}{\nu}\right)^{k/2} x^{\frac{k}{2}-1}\left(1+\frac{k}{\nu}x\right)^{-\frac{k+\nu}{2}},\quad x>0.$$

Η $\mathcal{F}_{k,\nu}$ χρησιμοποιειται ευρυτατα στους ελεγχους στατιστικων δεδομενων (βλ. σχετικα (6.53)). Επισης, εαν η $Y\sim\mathcal{B}\left(\frac{k}{2},\frac{\nu}{2}\right)$, τοτε η $X := \frac{\nu}{k}\,\frac{Y}{1-Y} \sim \mathcal{F}_{k,\nu}$ (βλ. (4.75)).



Επισης οι $\mathcal{F}_{1,\nu}$ ειναι ιδιες με τις t_ν^2, και αρα η $\mathcal{F}_{1,1}$ ειναι η ιδια με την $\mathcal{C}(0,1)^2$ (παρολο τον τετραγωνισμο εχει ακομη "βαρεια" δεξια ουρα).

(4.63) ΠΙΝΑΚΑΣ ΒΑΣΙΚΩΝ (Α.) ΣΥΝΕΧΩΝ ΜΟΝΟΔΙΑΣΤΑΤΩΝ ΚΑΤΑΝΟΜΩΝ.

ΟΝΟΜΑ & ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΙ	ΠΥΚΝΟΤΗΤΑ και ΦΟΡΕΑΣ $f(x) =$	$E(X)$	$\mathcal{D}(X)$	$M(t)=E(e^{-tX})$
$\mathcal{U}(\alpha,\beta)$ $-\infty<\alpha<\beta<+\infty$	$(\beta-\alpha)^{-1}$ $\alpha<x<\beta$	$\frac{\alpha+\beta}{2}$	$\frac{(\beta-\alpha)^2}{12}$	$\frac{e^{-\alpha t}-e^{-\beta t}}{(\beta-\alpha)t}$
$N(\mu,\sigma^2)$ $\mu\in\mathbb{R},\sigma>0$	$(2\pi\sigma^2)^{-1/2}e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}$ $x\in\mathbb{R}$	μ	σ^2	$e^{-\mu t+\frac{1}{2}\sigma^2t^2}$
$\mathcal{G}(\alpha,\lambda)$ $\alpha,\lambda>0$	$\frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-\lambda x}$ $x>0$	$\frac{\alpha}{\lambda}$	$\frac{\alpha}{\lambda^2}$	$\left(1+\frac{t}{\lambda}\right)^{-\alpha}$ $t>-\lambda$
$\mathcal{B}(\alpha,\beta)$ $\alpha,\beta>0$	$\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}$ $0<x<1$	$\frac{\alpha}{\alpha+\beta}$	$\frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}$	$\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\alpha+j)}{\Gamma(\alpha+\beta+j)}\frac{(-t)^j}{j!}$
$W(\alpha,\lambda)$ $\alpha,\lambda>0$	$\lambda\alpha x^{\alpha-1}e^{-\lambda x^\alpha}$ $x>0$	$\frac{\alpha^{-1}\Gamma(\alpha^{-1})}{\lambda^{\alpha^{-1}}}$	$\frac{2\Gamma(\frac{2}{\alpha})-\frac{1}{\alpha}\Gamma(\frac{1}{\alpha})^2}{\alpha\lambda^{2/\alpha}}$	πολυπλοκη
$\mathcal{C}(\alpha,\beta)$ $\alpha\in\mathbb{R},\beta>0$	$\frac{\beta}{\pi}\{\beta^2+(x-\alpha)^2\}^{-1}$ $x\in\mathbb{R}$	$\nexists$	$\nexists$	$e^{-\alpha t-\beta\|t\|}$
t_ν (κεντρ.) β.ε. $\nu=1,2,\dots$	$\frac{\Gamma(\frac{\nu+1}{2})}{\sqrt{\nu\pi}\,\Gamma(\frac{\nu}{2})}\left(1+\frac{x^2}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}}$ $x\in\mathbb{R}$	$\nexists$ $(\nu=1)$ 0 $(\nu\geq2)$	$\nexists$ $(\nu\leq2)$ $\frac{\nu}{\nu-2}$ $(\nu\geq3)$	πολυπλοκη
$\mathcal{F}_{k,\nu}$ β.ε. $k,\nu=1,2,\dots$	$\frac{\Gamma(\frac{k+\nu}{2})}{\Gamma(\frac{k}{2})\Gamma(\frac{\nu}{2})}\left(\frac{k}{\nu}\right)^{k/2}\frac{x^{k/2-1}}{(1+\frac{k}{\nu}x)^{\frac{k+\nu}{2}}}$ $x>0$	$\nexists$ $(\nu\leq2)$ $\frac{\nu}{\nu-2}$ $(\nu\geq3)$	$\nexists$ $(\nu\leq4)$ $\frac{2\nu^2(k+\nu-2)}{k(\nu-2)^2(\nu-4)}$ $\nu\geq5$	πολυπλοκη

Σημ.: 1. $\mathcal{E}(\lambda)\overset{\mathcal{D}}{=}\mathcal{G}(1,\lambda)$, $\chi^2_\nu\overset{\mathcal{D}}{=}\mathcal{G}(\frac{\nu}{2},\frac{1}{2})$, $t_1\overset{\mathcal{D}}{=}\mathcal{C}(0,1)$, $\mathcal{U}(0,1)\overset{\mathcal{D}}{=}\mathcal{B}(1,1)$, $\mathcal{F}_{1,\nu}\overset{\mathcal{D}}{=}t^2_\nu$.

2. $\Gamma(\alpha+1)=\alpha\Gamma(\alpha)$, $\Gamma(\nu+1)=\nu!$, $\Gamma(1/2)=\sqrt{\pi}$, $\Gamma(\alpha)\sim e^{-\alpha}\alpha^{\alpha-1/2}\sqrt{2\pi}$ με $\alpha\to\infty$.

3. Αν $X\sim\mathcal{G}(\alpha,\lambda)$ τοτε $EX^\beta=\Gamma(\alpha+\beta)/\lambda^\beta\Gamma(\alpha)$ για $\beta>-\alpha$.

4. Αν $X\sim N(0,1)$ τοτε $EX^k=k!/2^{k/2}(k/2)!$ αν k αρτιος & $=0$ αν k περιττος.

5. Αν $X\sim t_\nu$ τοτε $EX^k=\sqrt{\nu^k/\pi}\,\Gamma(\frac{k+1}{2})\Gamma(\frac{\nu-k}{2})/\Gamma(\nu/2)$, αρτιο $k<\nu$.

6. Αν $X\sim\mathcal{F}_{k,\nu}$ τοτε $EX^\beta=(\nu/k)^\beta\,\Gamma(\frac{1}{2}k+\beta)\Gamma(\frac{1}{2}\nu-\beta)/\Gamma(\frac{k}{2})\Gamma(\frac{\nu}{2})$, $-\frac{k}{2}<\beta<\frac{\nu}{2}$.

7. $t_\nu\overset{\mathcal{D}}{=}N(0,1)/(\chi^2_\nu/\nu)^{1/2}$ & N, χ^2 ανεξαρτητες.

8. $\mathcal{F}_{k,\nu}\overset{\mathcal{D}}{=}(\chi^2_k/k)/(\chi^2_\nu/\nu)$ & χ^2_k, χ^2_ν ανεξαρτητες.

9. Αν $X\sim W(\alpha,\lambda)$ τοτε $EX^\beta=(\beta/\alpha)\Gamma(\beta/\alpha)/\lambda^{\beta/\alpha}$, $\beta>0$.

Σχεδον ολες οι κατανομες, διακριτες και (α.σ) συνεχεις, που αναφεραμε εως τωρα μπορουν να τεθουν υπο κοινη μορφη, η οποια περιεχει και αλλες πολλες κατανομες:

(4.64) <u>Εκθετικη Οικογενεια Κατανομων</u> (Koopman-Pitman-Darmois):

$$f(x|\theta) = \exp\{c(\theta)^T T(x) + d(\theta) + S(x)\}\, 1(x\in A),$$
$$x \in \mathbb{R}, \quad \theta \in \Theta \subseteq \mathbb{R}^k,$$

οπου οι c, d ειναι συναρτησεις μονον του $\theta \in \Theta$,
οι T, S ειναι συναρτησεις μονον του $x \in \mathbb{R}$,
και το συνολο A δεν εξαρταται απο το θ.

<u>Για παραδειγμα</u>:

(i) <u>$\mathcal{B}(\nu, p)$ με ν γνωστο δοσμενο αριθμο</u>:
$\theta \equiv p \in \Theta \equiv [0,1]$, $A = \{0,1,2,\dots,\nu\}$,
$c(\theta) = \log\left(\frac{\theta}{1-\theta}\right)$, $d(\theta) = \nu \log(1-\theta)$,
$T(x) = x$, $S(x) = \log\binom{\nu}{x}$.

(ii) <u>$\mathcal{AB}(\kappa, p)$ με κ γνωστο δοσμενο αριθμο</u>:
$\theta \equiv p \in \Theta \equiv [0,1]$, $A = \{\kappa, \kappa+1, \kappa+2, \dots\}$,
$c(\theta) = \log(1-\theta)$, $d(\theta) = \log\left(\frac{\theta}{1-\theta}\right)$,
$T(x) = x$, $S(x) = \log\binom{x-1}{\kappa-1}$

(iii) <u>$\mathcal{P}oisson(\lambda)$</u>: $\theta \equiv \lambda \in \Theta = (0,+\infty)$, $A = \{0,1,2,\dots\}$,
$c(\theta) = \log\theta$, $d(\theta) = -\theta$, $T(x) = x$, $S(x) = -\log(x!)$.

(iv) <u>$W(\alpha, \lambda)$ με α γνωστο</u>: $\theta \equiv \lambda \in \Theta = (0,+\infty)$, $A = (0,+\infty)$,
$c(\theta) = -\theta$, $d(\theta) = \log(\alpha\theta)$, $T(x) = x^\alpha$, $S(x) = (\alpha-1)\log x$.

(v) <u>$N(\mu,\sigma^2)$ με σ^2 γνωστό</u> : $\theta\equiv\mu\in\Theta\equiv\mathbb{R}$, $A=\mathbb{R}$, $c(\theta)=\theta/\sigma^2$,
$d(\theta)=-\theta^2/2\sigma^2-\frac{1}{2}\log(2\pi\sigma^2)$, $T(x)=x$, $S(x)=-x^2/2\sigma^2$.

(vi) <u>$N(\mu,\sigma^2)$ με μ γνωστό</u> : $\theta\equiv\sigma^2\in\Theta\equiv(0,+\infty)$, $A=\mathbb{R}$, $c(\theta)=-1/\theta$,
$d(\theta)=-\mu^2/(2\theta)-\frac{1}{2}\log(2\pi\theta)$, $T(x)=-\frac{x^2}{2}+\mu x$, $S(x)=0$.

(vii) <u>$N(\mu,\sigma^2)$</u> : $\theta\equiv(\mu,\sigma^2)\in\Theta\equiv\mathbb{R}\times(0,+\infty)$, $A=\mathbb{R}$,
$c_1(\theta)=\mu/\sigma^2$, $c_2(\theta)=-1/(2\sigma^2)$, $d(\theta)=-\mu^2/(2\sigma^2)-\frac{1}{2}\log(2\pi\sigma^2)$,
$T_1(x)=x$, $T_2(x)=x^2$, $S(x)=0$.

(viii) <u>$\mathcal{G}(\alpha,\lambda)$</u> : $\theta\equiv(\alpha,\lambda)\in\Theta\equiv(0,+\infty)\times(0,+\infty)$, $A=(0,+\infty)$,
$c_1(\theta)=-\lambda$, $c_2(\theta)=\alpha-1$, $d(\theta)=\alpha\log\lambda-\log\Gamma(\alpha)$,
$T_1(x)=x$, $T_2(x)=\log x$, $S(x)=0$.

(ix) <u>$\mathcal{B}(\alpha,\beta)$</u> : $\theta\equiv(\alpha,\beta)\in\Theta\equiv(0,+\infty)\times(0,+\infty)$, $A=(0,1)$,
$c_1(\theta)=\alpha-1$, $c_2(\theta)=\beta-1$, $d(\theta)=\log\left\{\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\right\}$,
$T_1(x)=\log x$, $T_2(x)=\log(1-x)$, $S(x)=0$.

<u>ΚΑΤΑΝΟΜΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΣ ΜΙΑΣ ΤΥΧΑΙΑΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ.</u>

Εαν η X ειναι τ.μ. και η $g:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ μια συναρτηση <u>δεν</u> επεται εν γενει οτι η $g(X)$ ειναι και αυτη τ.μ. . Δινουμε χωρις αποδειξη την ακολουθη χρησιμη προταση:

(1:65) <u>Προταση</u>. Εστω τ.μ. X στον $(\Omega,\mathcal{A},P)$ και συναρτηση $g:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ κατα τμηματα συνεχης. Τοτε η $Y:=g(X)$ ειναι επισης τ.μ. στον $(\Omega,\mathcal{A},P)$.

(4.66) <u>Προταση</u>: Εστω τ.μ. $X \sim f_X(x)$, $x \in \mathbb{R}$, τοτε:

1) $Y := |X| \sim f_Y(y) = f_X(y) + f_X(-y)$, $y > 0$.

2) Αν $P(X \geq 0) = 1$, $Y := X^2 \sim f_Y(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}} f_X(\sqrt{y})$, $y > 0$.

3) $Y = X^2 \sim f_Y(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}} \left\{ f_X(\sqrt{y}) + f_X(-\sqrt{y}) \right\}$, $y > 0$.

<u>Αποδ.</u> 1) $F_Y(y) = P(|X| \leq y) = P(-y \leq X \leq y) = F_X(y) - F_X(-y)$
$\Rightarrow f_Y(y) = f_X(y) - f_X(-y)(-1)$.

2) $F_Y(y) = P(X^2 \leq y) = P(|X| \leq \sqrt{y}) = P(X \leq \sqrt{y}) = F_X(\sqrt{y})$
$\Rightarrow f_Y(y) = f_X(\sqrt{y}) \frac{1}{2\sqrt{y}}$.

3) Εστω $Z = |X|$ · τοτε $Y = Z^2$ και εφαρμοστε τα (1) κ (2).

(4.67) <u>Παραδειγμα</u>: Αν $X \sim N(0,1)$, τοτε η $Y := X^2 \sim \chi^2_1$.
Απο την 4.66 (3) εχουμε οτι:
$$f_Y(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y/2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y/2} \right\} = \frac{(1/2)^{1/2}}{\Gamma(\frac{1}{2})} y^{1/2 - 1} e^{-y/2} ,$$

δηλαδη $Y \sim \mathcal{G}(1, \frac{1}{2}) \overset{\mathcal{D}}{\equiv} \chi^2_1$.

Η ακολουθη απλη προταση εχει πολλες εφαρμογες στην Απαραμετρικη Στατιστικη:

(4.68) <u>Προταση</u>. Αν η τ.μ. $X \sim F$ και η σ.κ. F ειναι συνεχης, τοτε η τ.μ. $Y := F(X) \sim \mathcal{U}(0,1)$.

<u>Αποδ.</u> $F_Y(y) = P(F(X) \leq y) = P(X \leq F^{-1}(y)) = F(F^{-1}(y)) = y$.

Ενα γενικοτερο, χρησιμο αποτελεσμα για τη κατανομη ενος διαφορησιμου μετασχηματισμου μιας α. συνεχους τ.μ. ειναι:

(4.69) <u>Θεωρημα</u>. Εστω τ.μ. X με πυκνοτητα $f_X(\cdot)$, και εστω <u>διαφορησιμη</u> <u>μονοτονη</u> συναρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Τοτε, η τ.μ. $Y:=g(X)$ εχει πυκνοτητα:

$$f_Y(y) = f_X(g^{-1}(y))\left|\frac{d}{dy}g^{-1}(y)\right|$$

$$= f_X(g^{-1}(y))/|g'(g^{-1}(y))| .$$

<u>Αποδ.</u> α) <u>Εστω $g\uparrow_x$</u> : $F_Y(y) = P(g(X)\le y) = P(X\le g^{-1}(y)) =$

$$= F_X(g^{-1}(y)) \Rightarrow f_Y(y) = f_X(g^{-1}(y))\frac{d}{dy}g^{-1}(y) .$$

β) <u>Εστω $g\downarrow_x$</u> : $F_Y(y) = P(g(x)\le y) = P(X\ge g^{-1}(y)) =$

$$= 1-F_X(g^{-1}(y)) \Rightarrow f_Y(y) = -f_X(g^{-1}(y))\frac{d}{dy}g^{-1}(y) = f_X(g^{-1}(y))\left|\frac{d}{dy}g^{-1}(y)\right| .$$

Σημειωστε επισης οτι για καθε διαφορησιμη αντιστρεψιμη συναρτηση g,
$$\frac{d}{dy}g^{-1}(y) = \{g'(g^{-1}(y))\}^{-1} .$$

(4.70) <u>Παραδειγμα</u>: Εστω $X\sim\mathcal{G}(\alpha,\lambda)$, τοτε η $Y:=cX\sim\mathcal{G}(\alpha,\frac{\lambda}{c})$, $c>0$, και αρα ειδικοτερα, αν $\alpha=\nu\in\mathbb{Z}_+$ η $Y=2\lambda X\sim\chi^2_{2\nu}$.

<u>Αποδ.</u> Απο το Θεωρημα (4.69) εχουμε οτι η πυκνοτητα,

$$f_Y(y) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\left(\frac{y}{c}\right)^{\alpha-1}e^{-\lambda y/c} = \frac{(\lambda/c)^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\,y^{\alpha-1}\,e^{-(\lambda/c)y} .$$

(4.71) <u>Ασκηση</u>: Εστω τ.μ. $X \sim W(\alpha, \lambda)$. Δείξτε ότι $X^{\alpha} \sim \mathcal{E}(\lambda)$.

(4.72) <u>Ασκηση</u>: Δείξτε ότι αν $X \sim \mathcal{U}(0,1)$, $\lambda > 0$, τότε $-\frac{1}{\lambda}\log(1-X) \sim \mathcal{E}(\lambda)$.

(4.73) <u>Ασκηση</u>: Δείξτε ότι αν $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, τότε η $\Phi\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right) \sim \mathcal{U}(0,1)$.

(4.74) <u>Ασκηση</u>: Δείξτε ότι αν $X \sim \chi^2_2$, τότε η $Y = X/2 \sim \mathcal{E}(1)$.

(4.75) <u>Παράδειγμα</u>: Εστω, $c > 0$ και $X \sim \mathcal{B}(\alpha, \beta)$, τότε η τ.μ.

$$Y := c\,\frac{X}{1-X} \sim \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} c^{-\alpha} y^{\alpha-1}(1+c^{-1}y)^{-(\alpha+\beta)}, \quad y>0.$$

Αρα, για $\alpha = k/2$, $\beta = \nu/2$ και $c = \nu/k$, η $Y \sim \mathcal{F}_{k,\nu}$.

<u>Αποδ.</u> $g(x) = c\,\frac{x}{1-x} \Rightarrow g^{-1}(y) = \left(1+\frac{c}{y}\right)^{-1} = c^{-1}y(1+c^{-1}y)^{-1}$,

$$\frac{d}{dy} g^{-1}(y) = c\,y^{-2}\left(1+\frac{c}{y}\right)^{-2} = c\,(c+y)^{-2} = c^{-1}(1+c^{-1}y)^{-2}.$$

Αρα, από το Θεώρημα (4.69), έχουμε ότι:

$$f_Y(y) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \left[g^{-1}(y)\right]^{\alpha-1}\left[1-g^{-1}(y)\right]^{\beta-1} c^{-1}(1+c^{-1}y)^{-2},$$

και μετά από λίγες αλγεβρικές πράξεις παίρνουμε το αποτέλεσμα.

5. ΡΟΠΕΣ ΚΑΙ ΡΟΠΟΓΕΝΝΗΤΡΙΕΣ ΜΙΑΣ Τ.Μ.

Η σ.κ. $F_X(\cdot)$ μιας τ.μ. X στον $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ πάντα ορίζεται και περιγράφει πλήρως την πιθανοθεωρητική συμπεριφορά της τ.μ.. Συχνά όμως είναι χρήσιμο να μπορούμε να περιγράψουμε την περίπου συμπεριφορά μιας τ.μ. πιο απλά, χωρίς την αναπόφευκτη σύγχυση που προκαλεί το μέγεθος της πληροφορίας που περιέχεται στην σ.κ. $F_X(\cdot)$. Ο κλασικός τρόπος που γίνεται αυτή η απλουστευμένη περιγραφή είναι μέσω των ροπών της κατανομής. – υπάρχουν, φυσικά και άλλοι τρόποι (και μάλιστα πιο "ευσταθείς") τους οποίους θα δείξουμε αργότερα.

(5.1) Ορισμός. Έστω μη αρνητική τ.μ. X, δηλαδή $P(X\geq 0)=1$. Η μέση τιμή ή μαθηματική ελπίδα EX της τ.μ. X ή της κατανομής της F_X, ορίζεται ως εξής:

$$EX = \int_0^{\infty} x\, dF_X(x) = \begin{cases} \int_0^{\infty} x f_X(x)\, dx & \text{αν η } X \text{ είναι α.συνεχής,} \\ \sum_{x\in S_X} x\, p_X(x) & \text{αν η } X \text{ είναι διακριτή.} \end{cases}$$

Παρατηρήστε ότι αν η X είναι τ.μ. στον $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, τότε, από την Πρόταση (4.65), η $Y := |X|$ είναι επίσης τ.μ.. Τότε:

(5.2) Ορισμός. Έστω τ.μ. X, τέτοια ώστε $E|X| < +\infty$. Τότε, η μέση τιμή ή μαθηματική ελπίδα EX της τ.μ. X ή της κατανομής της, ορίζεται ως εξής:

$$EX = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, dF_X(x) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)\, dx & \text{αν η } X \text{ είναι α.συνεχής,} \\ \sum_{x\in S_X} x\, p_X(x) & \text{αν η } X \text{ είναι διακριτή.} \end{cases}$$

(5.3) <u>Παραδειγμα:</u> (α) $X \sim \mathcal{D}(\nu, p) \Rightarrow \exists EX = \nu p$,
(β) $X \sim N(\mu, \sigma) \Rightarrow \exists EX = \mu$,
(γ) $X \sim \mathcal{U}(\alpha, \beta) \Rightarrow \exists EX = \frac{\alpha+\beta}{2}$.

<u>Λυση:</u> (α) $\Sigma_{k=0}^{\nu} |k| P(X=k) \leq \nu \Sigma_{k=0}^{\nu} P(X=k) = \nu < +\infty$,
αρα η μεση τιμη υπαρχει, ειναι δε ιση με:

$$EX = \Sigma_{k=0}^{\nu} k\, P(X=k) = \Sigma_{k=0}^{\nu} k \binom{\nu}{k} p^k (1-p)^{\nu-k}$$

$$= \Sigma_{k=1}^{\nu} k \binom{\nu}{k} p^k (1-p)^{\nu-k} = \Sigma_{k=1}^{\nu} \frac{\nu!}{(\nu-k)!\,(k-1)!} p^k (1-p)^{\nu-k}$$

$$= \nu p\, \Sigma_{k=1}^{\nu} \frac{(\nu-1)!}{(k-1)!\,[(\nu-1)-(k-1)]!} p^{k-1} (1-p)^{(\nu-1)-(k-1)}$$

$$\overset{(x:=k-1)}{=} \nu p \cdot \Sigma_{x=0}^{\nu-1} \binom{\nu-1}{x} p^x (1-p)^{(\nu-1)-x} = \nu p\,(p+(1-p))^{\nu-1}$$

$$= \nu p .$$

(β) $\int_{-\infty}^{+\infty} |x| \frac{1}{\sigma} \phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) dx \overset{(z \equiv \frac{x-\mu}{\sigma})}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} |\mu + \sigma z|\, \phi(z) dz \leq$

$$\leq |\mu| + \sigma \int_{-\infty}^{+\infty} |z| \phi(z) dz = |\mu| + 2\sigma \int_0^{\infty} z\,\phi(z) dz =$$

$$= |\mu| - 2\sigma \int_0^{\infty} \phi'(z) dz \qquad (\text{διοτι } \phi'(z) = -z\phi(z))$$

$$= |\mu| - 2\sigma\, [\phi(+\infty) - \phi(0)] = |\mu| + \sigma < +\infty .$$

$\scriptstyle 1/\sqrt{2\pi}$

Αρα,

$$EX = \int_{-\infty}^{+\infty} x \frac{1}{\sigma} \phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} (\mu + \sigma z)\, \phi(z) dz =$$

$$= \mu + \sigma \int_{-\infty}^{+\infty} z\,\phi(z) dz = \mu .$$

(γ) $\int_{\alpha}^{\beta} |x|/(\beta-\alpha) . dx \leq |\beta| \vee |\alpha| < +\infty$ και αρα υπαρχει η EX

$$EX = \int_{\alpha}^{\beta} x \frac{1}{\beta-\alpha} dx = \frac{1}{2(\beta-\alpha)} \left[x^2 \Big|_{\alpha}^{\beta} \right] = \frac{(\beta+\alpha)(\beta-\alpha)}{2(\beta-\alpha)} = \frac{\alpha+\beta}{2} .$$

Οπως βλεπεται οι θαραμετροι των κατανομων στους πινακες (4.37) και (4.63) συνδεονται συχνα με τη μεση τιμη (και οπως θα δουμε αργοτερα, τη διασπορα) των τ.μ..

(5.4) <u>Ασκηση</u>: Επαληθευστε τις εκφρασεις για τη μεση τιμη των διαφορων κατανομων που διδονται στους πινακες (4.37) και (4.63) και <u>δειξτε</u> τη EX στα σχηματα των κατανομων.

(5.5) <u>Παραδειγμα</u>: Δειξτε οτι η Cauchy δεν εχει μεση τιμη.

<u>Αποδ.</u> Αρκει να δειχθη για την τυπικη Cauchy $\mathcal{C}(0,1)$:

$$E|X| = \cdots = \int_{-\infty}^{+\infty} |x| \frac{1}{\pi} \{1+x^2\}^{-1} dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{x}{1+x^2} dx =$$

$$= \frac{1}{\pi} \log(1+x^2) \Big|_0^{+\infty} = +\infty.$$

(5.6) <u>Προταση</u>: Εστω X τ.μ., τοτε: $E\{\alpha X+\beta\} = \alpha EX + \beta$, δηλαδη η μεση τιμη ειναι γραμμικη.

<u>Αποδ.</u> Αφινεται σαν αθλη ασκηση. (βρητε την κατανομη της $Y=\alpha X+\beta$)

Θελουμε τωρα να αποδειξουμε την πολυ χρησιμη προταση (5.9), αλλα θα χρειασθη να αποδειξουμε πρωτα τα Λημματα (5.7) και (5.8) τα οποια εχουν ανεξαρτητο επισης ενδιαφερον:

(5.7) <u>Λημμα.</u> Εστω διακριτη τ.μ. X με φορεα $S_X = \mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$, τετοια ωστε $E|X| < +\infty$. Τοτε,

$$EX = \sum_{k=0}^{\infty} \{P(X>k) - P(X<-k)\} = \sum_{k=0}^{\infty} \{1 - F_X(k) - F_X(-(k+1))\}.$$

<u>Αποδ.</u> $EX = \Sigma_{k=1}^{\infty} kP(X=k) - \Sigma_{k=1}^{\infty} k\,P(X=-k) =: A_1 - A_2$, όπου :

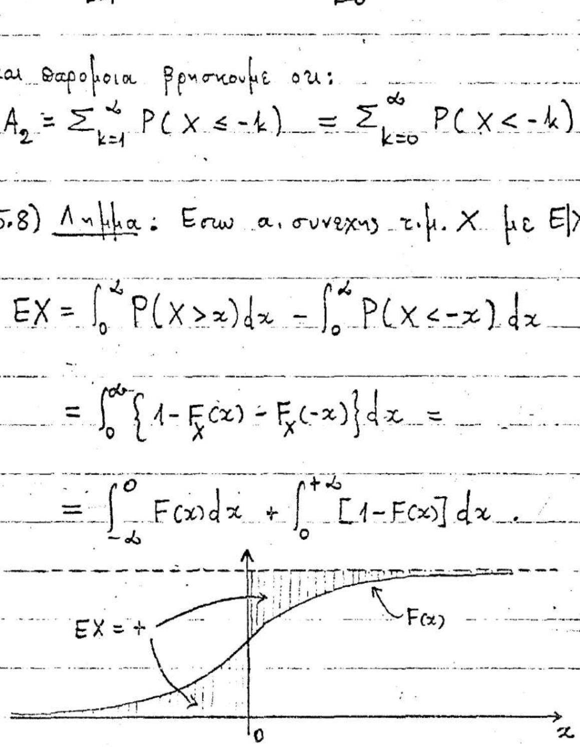
$$
\begin{aligned}
A_1 = {} & P(X=1) + \\
& + P(X=2) + P(X=2) + \\
& \;\vdots \\
& + P(X=k) + P(X=k) + \cdots + P(X=k) \quad , k \text{ φορές}, \\
& \;\vdots \\
= {} & P(X \geq 1) + P(X \geq 2) + \cdots + P(X \geq k) + \cdots = \\
= {} & \Sigma_{k=1}^{\infty} P(X \geq k) = \Sigma_{k=0}^{\infty} P(X > k),
\end{aligned}
$$

και παρόμοια βρίσκουμε ότι:

$$A_2 = \Sigma_{k=1}^{\infty} P(X \leq -k) = \Sigma_{k=0}^{\infty} P(X < -k).$$

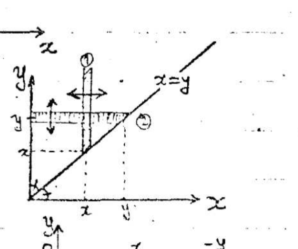
(5.8) <u>Λήμμα</u>: Έστω α. συνεχής τ.μ. X με $E|X| < +\infty$. Τότε,

$$
\begin{aligned}
EX &= \int_0^{\infty} P(X > x)\,dx - \int_0^{\infty} P(X < -x)\,dx \\
&= \int_0^{\infty} \{1 - F_X(x) - F_X(-x)\}\,dx = \\
&= \int_{-\infty}^{0} F(x)\,dx + \int_0^{+\infty} [1 - F(x)]\,dx .
\end{aligned}
$$



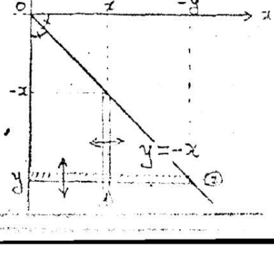
<u>Αποδ.</u> $\int_0^{\infty} P(X > x)\,dx = \int_0^{\infty} \left\{ \int_x^{\infty} f_X(y)\,dy \right\} dx =$

$= \int_0^{\infty} \left\{ \int_0^{y} dx \right\} f_X(y)\,dy = \int_0^{\infty} y\, f_X(y)\,dy .$



Επίσης, $\int_0^{\infty} P(X < -x)\,dx = \int_0^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{-x} f_X(y)\,dy \right\} dx =$

$= \int_{-\infty}^{0} \left\{ \int_0^{-y} dx \right\} f_X(y)\,dy = - \int_{-\infty}^{0} y\, f_X(y)\,dy .$



Είμαστε τώρα έτοιμοι να αποδείξουμε τον τύπο του "απρόσεκτου στατιστικού" (λέγεται έτσι γιατί ήταν σε ευρύτατη χρήση πριν συνειδητοποιηθεί ότι χρειαζόταν απόδειξη):

(5.9) <u>Πρόταση</u>. Έστω τ.μ. X στον $(\Omega,\mathcal{A},P)$ και $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ τέτοια ώστε $Y:=g(X)$ είναι επίσης τ.μ. στον $(\Omega,\mathcal{A},P)$, και $E|Y|<+\infty$. Τότε,

$$E\{g(X)\}=EY=\int_{-\infty}^{+\infty} y\,dF_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\,dF_X(x)=$$

$$=\begin{cases}\sum\limits_{x\in S_X} g(x)P(X=x) & \text{αν η } X \text{ είναι διακριτή,}\\ \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f_X(x)dx & \text{αν η } X \text{ είναι α. συνεχής.}\end{cases}$$

<u>Αποδ.</u> (α) Έστω X <u>διακριτή</u> τ.μ.: $Eg(X)=EY=$

$$=\sum_{y\in S_Y} yP(Y=y)=\sum_{y\in S_Y} y\,P(g(X)=y)=$$

$$=\sum_{y\in S_Y} y\sum_{\{x:g(x)=y\}} P(X=x)=\sum_{y\in S_Y}\sum_{\{x:g(x)=y\}} g(x)P(X=x)=$$

$$=\sum_{x\in S_X} g(x)P(X=x).$$

(β) Έστω X <u>α. συνεχής</u> τ.μ.: $Eg(X)=EY=$ (από (5.8))

$$=\int_0^\infty P(g(X)>y)\,dy-\int_0^\infty P(g(X)<-y)\,dy=$$

$$=\int_0^\infty\Big\{\int_{\{x:g(x)>y\}} f_X(x)dx\Big\}dy-\int_0^\infty\Big\{\int_{\{x:g(x)<-y\}} f_X(x)dx\Big\}dy=$$

$$=\int_{\{x:g(x)>0\}}\Big\{\int_0^{g(x)} dy\Big\}f_X(x)dx-\int_{\{x:g(x)<0\}}\Big\{\int_0^{-g(x)} dy\Big\}f_X(x)dx=$$

$$= \int_{\{x: g(x)>0\}} g(x) f_X(x)\,dx + \int_{\{x: g(x)<0\}} g(x) f_X(x)\,dx =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} g(x) f_X(x)\,dx.$$

Σημ. Τωρα, η αποδειξη της (5.6) ειναι αμεση.

(5.10) Παραδειγμα: Εστω $z :=$ η ποσοτητα (σε κιλα) προϊοντος Π που αγοραζει χονδρικα στην αρχη καθε μηνα καποιο καταστημα. Καθε κιλο του προϊοντος που πουλιεται αφινει στο τελος του μηνος καθαρο κερδος K δρχ., ενω καθε κιλο που μενει απουλητο στο τελος του μηνος αφινει καθαρη απωλεια (λογω εξοδων αποθηκευσης, τελους εποχης, κ.τ.λ.) A δρχ. Εστω $X :=$ η ποσοτητα (σε κιλα) του προϊοντος Π που πουλα το καταστημα κατα τη διαρκεια του μηνα, και εστω οτι η τ.μ. X ειναι α.συνεχης με σ.κ. F και π.κ. f.

Το καταστημα θελει να αγοραζει στην αρχη καθε μηνος ποσοτητα z απο το προϊον Π, ουτως ωστε να μεγιστοποιη το μεσο ολικο καθαρο κερδος του $P(z)$ στο τελος του μηνα. Βρητε αυτο το βελτιστο z.

Απ.
$$Y := \begin{cases} KX - (z-X)A & \text{αν } X \le z \\ Kz & \text{αν } X > z \end{cases} =: g(X),$$

ειναι η τ.μ. του ολικου καθαρου κερδους του καταστηματος.

Αρα,

$$P(z) = EY = E\{g(X)\} = \int_0^z \{Kx - (z-x)A\} f(x)\,dx +$$

$$+ \int_z^{+\infty} Kz\, f(x)\,dx = -zA\,F(z) + (K+A)\int_0^z x f(x)\,dx +$$

$$+ Kz\,[1-F(z)] = -z\cancel{AF(z)} + Kz[1-F(z)] + (K+A)\{z\cancel{F(z)} - \int_0^z F(x)\,dx\}$$

$$= Kz - (K+A)\int_0^z F(x)\,dx.$$

$P'(z) = K - (K+A)F(z)$ και $P''(z) = -(K+A)f(z) < 0$,

άρα το $P(z)$ μεγιστοποιείται για z_0 τέτοιο ώστε:

$F(z_0) = \frac{K}{K+A}$ ή $z_0 = F^{-1}\left(\frac{K}{K+A}\right)$.

Για παράδειγμα αν η $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$, δηλαδή $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$ ή $x = F^{-1}(t) = -\frac{1}{\lambda}\log(1-t)$ τότε $z_0 = -\frac{1}{\lambda}\log\left(\frac{A}{K+A}\right)$.

(5.11) Πρόταση. Έστω τ.μ. X τέτοια ώστε $E|X| < +\infty$.

(α) Αν c σταθερά και $P(X=c) = 1$, τότε $EX = c$.

(β) $E\{\alpha X + \beta\} = \alpha EX + \beta$

(γ) Αν $P(X \geq 0) = 1$, τότε $EX \geq 0$.

(δ) $|EX| \leq E|X|$

(ε) Αν $P(X \geq 0) = 1$ και $EX = 0$ $\Rightarrow P(X=0) = 1$.

Απόδ. Τα (α),(β)&(γ) είναι άμεσα και αφήνονται σαν άσκηση.

(δ) $-|X| \leq X \leq |X| \Rightarrow |X| - X \,,\; X + |X| \geq 0$

και άρα από το μέρος (γ) :

$$\left.\begin{array}{l} E\{|X| - X\} \geq 0 \\ E\{X + |X|\} \geq 0 \end{array}\right\} \overset{(5.9)}{\Rightarrow} \left\{\begin{array}{l} E|X| - EX \geq 0 \\ EX + E|X| \geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -E|X| \leq EX \leq E|X| \Rightarrow |EX| \leq E|X| .$$

(ε) Εφόσον $P(X \geq 0) = 1$,

$$\int_0^\infty x f(x)dx = 0 \Leftrightarrow x f(x) = 0 \;\forall x \geq 0 \Leftrightarrow f(x) = 0 \;\forall x > 0 ,$$

άρα $P(X=0) = 1$. Παρόμοια,

$$\sum_{x \geq 0} x\, p(x) = 0 \Leftrightarrow p(x) = 0 \;\forall x > 0 \text{ και άρα } P(X=0) = 1.$$

Σχόλ. Προφανώς, μπορούμε να έχουμε $P(X < 0) > 0$ και $EX = 0$.

Ροπες Καταvομων

Εστω τ.μ. X στην ειδικη περιπτωση της (5.9) με $g(x)=x^k$, $k=1,2,\dots$, εχουμε την τ.μ. $Y=g(X)=X^k$ (βλ. 4.65), με

$$EX^k=\int_{-\infty}^{+\infty}x^k\,dF_X(x)=\begin{cases}\int_{-\infty}^{+\infty}x^k f(x)\,dx & \text{αν } X \text{ συνεχης},\\ \sum_{x\in S_X}x^k P(X=x) & \text{αν } X \text{ διακριτη},\end{cases}$$

καλα ορισμενη αν $E|Y|=E|X|^k<+\infty$.

(5.12) Ορισμος. Αν $E|X|^k<+\infty$, $k=1,2,\dots$, η $\mu_k := EX^k$, καλειται ροπη k ταξεως της τ.μ. X ή της καταvομης της.

(5.12) Ορισμος. Αν $E|X^k|<+\infty$, $k=1,2,\dots$ η $\mu'_k := E[X-EX]^k$, λεγεται κεντρικη ροπη k ταξεως της τ.μ. X ή της καταvομης της.

Ο ορος "ροπη" ερχεται απο τη φυσικη – ειδικα για τη ροπη δευτερας ταξεως — οπου εδω η μαζα m_x στη θεση x εχει αντικατασταθη απο τη μαζα πιθανοτητος $p(x)$ ή $f(x)dx$ στο σημειο x.

Ειδικα, η κεντρικη ροπη δευτερας ταξεως,

$\sigma^2\equiv \mathcal{D}(X):=E(X-EX)^2$, λεγεται διασπορα της X ή της καταvομης της. Το $\sigma:=\sqrt{\mathcal{D}(X)}$ λεγεται τυπικη αποκλιση της X ή της καταvομης της και διδει ενα μετρο της συγκέντρωσης (μικρό σ) ή διάχυσης (μεγάλο σ) της μάζης πιθανότητος της κατανομής της τ.μ. X γύρω από τη μέση της τιμή $\mu \equiv \mu_1 = EX$, π.χ. βλ. τα σχήματα πυκνότητας της $N(\mu,\sigma^2)$ για $\sigma_1 < \sigma_2 < \sigma_3$ της (4.49).

(5.13) <u>Παράδειγμα</u>. Έστω $X \sim N(\mu,\sigma^2)$, τότε $\sigma^2 = \mathfrak{D}(X)$.

Από το (5.3β), έχουμε ότι $\mu = EX$. Άρα,

$$\mathfrak{D}(X) = E(X-\mu)^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2 \frac{1}{\sigma}\phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) dx = \left(\text{με } z = \left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\right)$$

$$= \sigma^2 \int_{-\infty}^{+\infty} z^2 \phi(z)\, dz \quad ,$$

αλλά $\phi'(z) = -z\phi(z)$ και άρα,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} z^2\phi(z)\,dz = -\int_{-\infty}^{+\infty} z\,\phi'(z)\,dz = -z\phi(z)\Big|_{-\infty}^{+\infty} + \int_{-\infty}^{+\infty}\phi(z)\,dz = 1.$$

(5.14) <u>Λήμμα</u> Έστω τ.μ. X και $g(x) = \sum_{i=-m}^{n} a_i x^i$, όπου m, n ακέραιοι θετικοί αριθμοί, και έστω ότι $E|g(X)| < +\infty$. Τότε,

$$E\left\{\sum_{i=-m}^{n} a_i X^i\right\} = \sum_{i=-m}^{n} a_i E\{X^i\}.$$

<u>Αποδ.</u> Από τη (5.9) έχουμε ότι:

$$E\{g(X)\} = \int_{\mathbb{R}} \left(\sum_{i=-m}^{n} a_i x^i\right) f(x)\,dx = \sum_{i=-m}^{n} a_i \int_{\mathbb{R}} x^i f(x)\,dx =$$

$$= \sum_{i=-m}^{n} a_i \mu_i \quad .$$

Για διακριτές τ.μ. η απόδειξη είναι παρόμοια.

(5.15) Προταση (Ανισοτητα Liapounov). Η ακολουθια $\left\{\left[E|X|^k\right]^{1/k}\right\}_{k=1}^{\infty}$ ειναι αυξουσα, εφοσον οι οροι της υπαρχουν.

Αποδ. $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda^2 E|X|^{k-1} + 2\lambda E|X|^k + E|X|^{k+1} =$
$= E\{\lambda |X|^{(k-1)/2} + |X|^{(k+1)/2}\}^2 \geq 0$ και αρα
$(E|X|^k)^2 \leq E|X|^{k-1} E|X|^{k+1}$, $k=1,2,\dots$;
Τοτε, $E|X| \leq (E|X|^2)^{1/2}$ (παιρνω $k=1$). Εστω τωρα οτι ισχυει $(E|X|^k)^{1/k} \leq (E|X|^{k+1})^{\frac{1}{k+1}}$, τοτε

$$\left(E|X|^{k+1}\right)^2 \leq E|X|^k \, E|X|^{k+2} \leq \left(E|X|^{k+1}\right)^{\frac{k}{k+1}} E|X|^{k+2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(E|X|^{k+1}\right)^{\frac{k+2}{k+1}} \leq E|X|^{k+2} \Rightarrow \left(E|X|^{k+1}\right)^{\frac{1}{k+1}} \leq \left(E|X|^{k+2}\right)^{\frac{1}{k+2}}.$$

(5.16) Πορισμα. Εστω τ.μ. X τετοια ωστε $E|X|^k < +\infty$, τοτε $E|X|^\beta < +\infty$ $\forall \beta = 1,2,\dots,k$.

(5.17) Πορισμα. Εστω τ.μ. X τετοια ωστε $E|X|^k < +\infty$, τοτε η ακολουθια $\left\{\left(E|X-EX|^\nu\right)^{1/\nu}\right\}_{\nu=1}^{k}$ ειναι αυξουσα.

(5.18) Προταση. $\sigma^2 = \mathcal{D}(X) = EX^2 - (EX)^2 = \mu_2 - \mu_1^2$.

Αποδ. $\sigma^2 = \mu_2' = \mathcal{D}(X) = E(X-\mu)^2 = E\{X^2 + \mu^2 - 2\mu X\} =$
(απο το 5.14) $EX^2 + \mu^2 - 2\mu EX = EX^2 - (EX)^2$.

(5.19) Παραδειγμα. Εστω $X \sim$ Bernoulli(p), $p \in [0,1]$, τοτε $\mathcal{D}(X) = p(1-p)$.
Αποδ. Απο την (5.4) εχουμε $EX = p$. Επισης,
$EX^2 = 1p + 0(1-p) = p$. Αρα, $\mathcal{D}(X) = EX^2 - (EX)^2 = p - p^2 = p(1-p)$.

(5.20) <u>Παράδειγμα</u>. Έστω $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, τότε $\mathcal{D}(X) = \lambda \; (= EX)$.

Απο την Άσκηση (5.4) έχουμε ότι $EX = \lambda$. Επίσης, $E\{X(X-1)\} = EX^2 - EX$ (απο το 5.14). Άρα,

$$EX^2 = E\{X(X-1)\} + EX = \lambda + \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} =$$

$$= \lambda + \sum_{k=2}^{\infty}\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{(k-2)!} \overset{n=k-2}{=\!=\!=} \lambda + \lambda^2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!} = \lambda+\lambda^2.$$

Τότε, απο την Πρόταση (5.18) έχουμε,

$$\mathcal{D}(X) = EX^2 - (EX)^2 = \lambda+\lambda^2-\lambda^2 = \lambda.$$

(5.21) <u>Παράδειγμα</u>. Αν $X \sim \Gamma(\alpha,\lambda)$, τότε $EX^{\beta} = \dfrac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\lambda^{\beta}\Gamma(\beta)}$ $\forall \beta > -\alpha$.

<u>Αποδ.</u> $EX^{\beta} = \int_0^{\infty} x^{\beta} f(x)\,dx = \dfrac{\lambda^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{\infty} x^{\alpha+\beta-1}e^{-\lambda x}\,dx =$

$$\overset{z=\lambda x}{=\!=\!=} \frac{1}{\lambda^{\beta}\Gamma(\alpha)}\int_0^{\infty} z^{\alpha+\beta-1}e^{-z}\,dz = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\lambda^{\beta}\Gamma(\alpha)}$$

Σαν ειδική λοιπόν περίπτωση,

$$E\{(\chi^2_{\nu})^{\beta}\} = \frac{\Gamma(\frac{\nu}{2}+\beta)}{\Gamma(\frac{\nu}{2})}2^{\beta},$$

και

$$E\{(\mathcal{E}(\lambda))^{\beta}\} = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\lambda^{\beta}}.$$

(5.22) <u>Άσκηση</u>. Έστω $X \sim N(0,1)$, δείξτε ότι $EX^k = \begin{cases} 0 & \text{αν } k \text{ περιττός} \\ \dfrac{k!}{2^{k/2}(k/2)!} & \text{αν } k \text{ άρτιος.} \end{cases}$

(5.23) <u>Ασκηση</u>. Επαληθευστε τον πινακα των διασπορων στους (4.37) και (4.63).

(5.24) <u>Ασκηση</u>. Εστω τ.μ. X και σταθερες α, β. Δειξτε οτι,

$$\mathcal{D}(\alpha X+\beta) = \alpha^2 \mathcal{D}(X).$$

<u>Ροπογεννητριες</u>.

Εστω τ.μ. X : στη ειδικη περιπτωση της (5.9) με $g(x) = e^{-tx}$, $t\in\mathbb{R}$, εχουμε τις τ.μ. $Y_t = e^{-tX}$, $t\in\mathbb{R}$ (βλ. 4.65), με,

$$(5.25)\quad M_X(t) := E\{e^{-tX}\} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-tx}\, dF_X(x) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-tx} f(x)\,dx & \text{αν } X \text{ συνεχης}, \\ \sum_{x\in S_X} e^{-tx} P(X=x) & \text{αν } X \text{ διακριτη}, \end{cases}$$

καλα ορισμενη για $t\in T\subseteq\mathbb{R}$, για καποιο T.

Ο ορος "ροπογεννητρια" οφειλεται στο οτι αν $E|X|^k<+\infty$, τοτε

$$M^{(k)}(0) \equiv \frac{d^k}{dt^k}\Big|_{t=0} M(t) = (-1)^k E(X^k) \quad \text{(επαληθευστε)},$$ δηλαδη

$$(5.26)\quad E(X^k) = (-1)^k M^{(k)}(0), \quad \forall k : E|X|^k<+\infty.$$

(5.27) <u>Προταση</u>. Η ροπογεννητρια $M_X(\cdot)$ μιας τ.μ. X χαρακτηριζει μονοσημαντα την κατανομη της $F_X(\cdot)$. ($M_X(\cdot) \overset{1-1}{\longleftrightarrow} F_X(\cdot)$).

Η αποδειξη αυτου του <u>εξαιρετικα χρησιμου</u> αποτελεσματος βασιζεται στη μοναδικοτητα του μετασχηματισμου Laplace και παραλειπεται εδω.

<u>Σημ.</u> Μια αλλη εξαιρετικα χρησιμη ιδιοτητα της ροπογεννητριας δινεται στην (6.26) και αφορα αθροισματα ανεξαρτητων τ.μ..

(5.28) <u>Πρόταση</u>. Έστω τ.μ. X. Αν $Y=\alpha X+\beta$ όπου $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ σταθερές, τότε,

$$M_Y(t)=e^{-\beta t}M_X(\alpha t).$$

<u>Αποδ.</u> $M_Y(t)=E\{e^{-tY}\}=E\{e^{-t(\alpha X+\beta)}\}=$

$$=E\{e^{-\beta t}e^{-\alpha tX}\}=e^{-\beta t}E\{e^{-\alpha tX}\}=e^{-\beta t}M_X(\alpha t)$$

(5.29) <u>Παράδειγμα</u>: Βρήτε τις ροπογεννήτριες των κατανομών των τ.μ.:
(α) $\mathcal{B}(\nu,p)$, (β) Poisson (λ), (γ) $\Gamma(\alpha,\lambda)$ & (δ) $N(\mu,\sigma^2)$.

(α) $M(t)=\sum_{k=0}^{\nu}e^{-tk}\binom{\nu}{k}p^k(1-p)^{\nu-k}=\sum_{k=0}^{\nu}\binom{\nu}{k}[pe^{-t}]^k(1-p)^{\nu-k}=$

$$=(pe^{-t}+1-p)^{\nu},\quad\forall t\in\mathbb{R}.$$

(β) $M(t)=\sum_{k=0}^{\infty}e^{-tk}e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}=e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\lambda e^{-t})^k}{k!}=$

$$=e^{-\lambda}e^{\lambda e^{-t}}=\exp\{\lambda(e^{-t}-1)\},\quad\forall t\in\mathbb{R}$$

(γ) $M(t)=\int_0^{\infty}e^{-tx}\frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-\lambda x}dx=$

$$=\frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{\infty}x^{\alpha-1}e^{-(\lambda+t)x}dx=$$

$$=\left(\frac{\lambda}{\lambda+t}\right)^{\alpha}\int_0^{\infty}\frac{(\lambda+t)^\alpha}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-(\lambda+t)x}dx=\left(1+\frac{t}{\lambda}\right)^{-\alpha},\quad t>-\lambda.$$

(δ) Έστω $Z\sim N(0,1)$, τότε $M_Z(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-tz}\phi(z)dz=\cdots$

$$=e^{t^2/2}\int_{-\infty}^{+\infty}\phi(z+t)dz=e^{t^2/2}\int_{-\infty}^{+\infty}\phi(z)dz=e^{t^2/2}.$$

Αλλα, $Z := \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$ (βλ. 4.50) και αρα $X = \sigma Z + \mu$, οποτε,

$$M_X(t) = e^{-\mu t} M_Z(\sigma t) = \exp\{-\mu t + \tfrac{1}{2}\sigma^2 t^2\}, \ \forall t \in \mathbb{R},$$

οπου κανατε χρηση της (5.28).

(5.30) <u>Ασκηση</u>. Επαληθευστε τον πινακα με τις ροπογεννητριες, στους (4.37) και (4.63).

(5.31) <u>Παραδειγμα</u>. Χρησιμοποιωντας τις αντιστοιχες ροπογεννητριες, βρειτε τις μεσες τιμες και διασπορες των κατανομων:
(α) $\mathcal{A}\mathcal{D}(\kappa,p)$, (β) $\mathcal{G}(\alpha,\lambda)$.

(α) $$M'(t) = \kappa\left[\frac{pe^{-t}}{1-(1-p)e^{-t}}\right]^{k-1} \frac{-pe^{-t}(1-(1-p)e^{-t}) - pe^{-t}(1-p)e^{-t}}{(1-(1-p)e^{-t})^2}$$

$$= \frac{-\kappa (pe^{-t})^{\kappa}}{(1-(1-p)e^{-t})^{\kappa+1}} = \frac{-\kappa}{1-(1-p)e^{-t}} M(t) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M''(t) = \kappa\left[1-(1-p)e^{-t}\right]^{-2}\left[(1-p)e^{-t}+\kappa\right] M(t)$$

Εφοσον παντοτε $M(0)=1$, εχουμε απο την (5.26) οτι:

$$EX = -M'(0) = \frac{\kappa}{p} \quad \text{και} \quad EX^2 = M''(0) = \frac{\kappa(1-p+\kappa)}{p^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathcal{D}(X) = EX^2 - (EX)^2 = \frac{\kappa(1-p)}{p^2},$$

(β) $$M'(t) = -\frac{\alpha}{\lambda}\left(1+\frac{t}{\lambda}\right)^{-(\alpha+1)} \Rightarrow EX = -M'(0) = \frac{\alpha}{\lambda},$$

$$M''(t) = \frac{\alpha(\alpha+1)}{\lambda^2}\left(1+\frac{t}{\lambda}\right)^{-(\alpha+2)} \Rightarrow EX^2 = \frac{\alpha(\alpha+1)}{\lambda^2}.$$

Άρα, $\mathcal{D}(X) = EX^2 - (EX)^2 = M''(0) - [M'(0)]^2 = \frac{\alpha}{\lambda^2}$.

(5.32) <u>Άσκηση</u>. Επαναλάβατε (5.31) για τις υπόλοιπες κατανομές στους πίνακες (4.37) και (4.63).

Το ακόλουθο θεώρημα αποτελεί μια ένδειξη του πόσο χρήσιμη είναι η ροπογεννήτρια στη Θεωρία πιθανοτήτων.

(5.33) <u>Θεώρημα</u>. Έστω $X_1, X_2, \dots, X_\nu, \dots$ μια ακολουθία τ.μ. με σ.κ. F_{X_ν} και ροπογεννήτριες M_{X_ν}, $\nu = 1, 2, \dots$. Έστω επίσης τ.μ. X με σ.κ. F_X και ροπογεννήτρια M_X. Αν $\lim_{\nu\to\infty} M_{X_\nu}(t) = M_X(t) \quad \forall t \in T \subseteq \mathbb{R}$,

τότε, $\lim_{\nu\to\infty} F_{X_\nu}(x) = F_X(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε F_X είναι συνεχής στο x.

Παραλείπουμε τη δύσκολη απόδειξη αυτού του θεωρήματος. Θα το χρησιμοποιήσουμε όμως αργότερα στην απόδειξη του Κεντρικού Οριακού Θεωρήματος (Κ.Ο.Θ.), βλ. (.).

Για διακριτές τ.μ. έχουμε επίσης το εξής:

(5.34) <u>Θεώρημα (της Συνέχειας)</u>. Έστω διακριτές τ.μ. X, $\{X_\nu\}_{\nu=1}^{\infty}$.

$$P(X_\nu = x_k) \xrightarrow[\nu\to\infty]{} P(X=x_k) \ \ \forall k=1,2,\dots \Leftrightarrow M_{X_\nu}(t) \xrightarrow[\nu\to\infty]{} M_X(t) \ \ \forall t>0.$$

Παραλείπουμε τη δύσκολη απόδειξη και αυτού του θεωρήματος.

(5.35) <u>Πορισμα</u>(του Θεωρ. 5.34) : Προταση 4.32.

<u>Αποδ.</u> Προσεξτε οτι, $\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)-x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}-1}{1}=$

$=\lim_{x\to 0}\frac{-x}{1+x}=0$ και αρα,

(5.36) $\log(1+x)=x+o(x)$,

οπου συμβολιζουμε $g(x)=o(x)$ αν $\lim_{x\to 0}\frac{g(x)}{x}=0$,

και επισης $g(x)=o(1)$ αν $\lim_{x\to 0}g(x)=0$.

Εχουμε $M_{X_\nu}(t)=(p_\nu e^{-t}+1-p_\nu)^\nu=\left(1+\frac{\nu p_\nu(e^{-t}-1)}{\nu}\right)^\nu$,

και αρα, $\log M_{X_\nu}(t)=\nu\log\left(1+\frac{\nu p_\nu(e^{-t}-1)}{\nu}\right)=$

$=\nu p_\nu(e^{-t}-1)+\nu\, o(\nu^{-1})=\nu p_\nu(e^{-t}-1)+o(1)$

$\xrightarrow[\nu\to\infty]{}\lambda(e^{-t}-1)\Rightarrow M_{X_\nu}(t)\xrightarrow[\nu\to\infty]{}\exp\{\lambda(e^{-t}-1)\}\ \forall t.$

Αρα, απο το (5.34), $\lim_{\nu\to\infty}P(X_\nu=x)=P(Y=x)$,

οπου $Y\sim\mathcal{P}(\lambda)$.

<u>Ορισμενες Χρησιμες Ανισοτητες.</u>

(5.36) <u>Προταση.</u> Εστω τ.μ. X και συναρτηση $\varphi(t)>0$ και και οχι φθινουσα για $t>0$, τετοια ωστε $\varphi(X)$ ειναι τ.μ.. Τοτε,

$$P(|X|>\varepsilon)\leq E\varphi(|X|)/\varphi(\varepsilon)\quad,\ \forall\varepsilon>0.$$

Αποδ. Δίδουμε την αποδ. για συνεχή X· η αποδ. για διακριτή X είναι ανάλογη.

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi(|x|)\, f(x)\, dx \geqslant \int_{|x|>\varepsilon} \varphi(|x|)\, f(x)\, dx \geqslant$$

$$\geqslant \int_{|x|>\varepsilon} \varphi(\varepsilon)\, f(x)\, dx = \varphi(\varepsilon) \int_{|x|>\varepsilon} f(x)\, dx = \varphi(\varepsilon)\, P(|X|>\varepsilon).$$

Στην ειδική περίπτωση που $\varphi(t) = t^p$, $p>0$, παίρνουμε την γνωστή ανισότητα Markov:

$$(5.37) \quad P(|X|>\varepsilon) \leq \frac{E|X|^p}{\varepsilon^p}, \quad \forall \varepsilon>0.$$

Στην περίπτωση που θέτουμε $p=2$ και θέτουμε $X-EX$ στη θέση του X στην (5.37), έχουμε την γνωστή ανισότητα Tchebyshev (πιο λιανωτέρη των άλλων δύο):

$$(5.38) \quad P(|X-EX|>\varepsilon) \leq \frac{\mathcal{D}(X)}{\varepsilon^2}, \quad \forall \varepsilon>0.$$

(5.39) Σημ. Μια συνάρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ λέγεται κυρτή στο σύνολο A, αν $\forall\, x,y\in A$ και $\lambda\in[0,1]$

$$g((1-\lambda)x+\lambda y) \leq (1-\lambda)g(x) + \lambda g(y).$$

Αν ισχύει η αντίστροφη ανισότητα η g λέγεται κοίλη στο A.
Αν $\exists\, g''(x) \geqslant 0$ η g είναι κυρτή στο A και
αν $\exists\, g''(x) \leq 0$ η g είναι κοίλη στο A.

(5.40) Πρόταση (Ανισότητα Jensen). Αν η συνάρτηση $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι κυρτή και $E|X|$, $E|g(X)| < +\infty$, τότε

$$E\{g(X)\} \geq g(EX).$$

Αν η g είναι κοίλη, τότε η ανισότητα αντιστρέφεται.

<u>Αποδ.</u> Για απλούστευση θα υποθέτουμε ότι $\exists\, g'' \geq 0$. Τότε,

$$g(x) = g(\mu) + g'(\mu)(x-\mu) + \frac{g''(\xi)(x-\xi)^2}{2}, \quad x\wedge\mu \leq \xi \leq x\vee\mu.$$

Άρα, $g(x) \geq g(\mu) + g'(\mu)(x-\mu) \Rightarrow$

$$\Rightarrow Eg(X) \geq g(\mu) + g'(\mu)E(X-\mu) = g(\mu),$$

όπου $\mu = EX$. Στη περίπτωση που η g είναι κοίλη, η $-g$ είναι κυρτή και εφαρμόζοντας την προηγούμενη ανισότητα παίρνουμε την αντιστροφή για την g.

(5.41) <u>Άσκηση</u>. Αποδείξτε την ανισότητα Liapounov (βλ. 5.15) χρησιμοποιώντας την (5.40). (<u>Υποδ.</u> Αν $\varepsilon, x > 0$ τότε η $g(x) := x^{1+\varepsilon}$ είναι κυρτή.)

(5.42) <u>Άσκηση</u>. Αποδείξτε ότι αν οι αντίστοιχες μέσες τιμές υπάρχουν, τότε,

(α) $E\sqrt{|X|} \leq \sqrt{E|X|}$

(β) $E\log|X| \leq \log E|X|$

(γ) $EX^2 \geq (EX)^2$

(δ) $Ee^{-X} \geq e^{-EX}$

(5.43) <u>Άσκηση</u>. Από την (5.38) συμπεράνατε ότι $\mathcal{D}(X) = 0 \Rightarrow P(X = EX) = 1$.

(5.44) <u>Άσκηση</u>. Αποδείξτε ότι $P(|N(0,1)| > \varepsilon) \leq \varepsilon^{-1}(2/\pi)^{1/2}$. V

(5.45) <u>Άσκηση</u>. Αποδείξτε ότι $P(\mathcal{G}(\alpha,\lambda) > \varepsilon) \leq \alpha(\alpha+1)/(\varepsilon\lambda)^2$. V

6. ΣΥΝΚΑΤΑΝΕΜΟΜΕΝΕΣ ΤΥΧΑΙΕΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΕΣ

Εστω τυχαιες μεταβλητες $X_1, X_2, \ldots, X_n$ οριςμενες στον ιδιο χωρο με πιθανοτητα $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, δηλαδη,

$\forall i=1,\ldots,n$, η συναρτηση $X_i : \Omega \to \mathbb{R}$ ειναι τετοια ωστε $\{\omega : X_i(\omega) \le x\} \in \mathcal{A}$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

Συχνα μας ενδιαφερει να μελετησουμε τις τ.μ. $X_1, \ldots, X_n$ σε συνδιασμο, π.χ., για να διερευνησουμε τυχον συσχετισεις τους· μας ενδιαφερει δηλαδη το διανυσμα των τυχαιων μεταβλητων $\underline{X} = (X_1, \ldots, X_n)^T \in \mathbb{R}^n$. Για παραδειγμα εστω X_1 το βαρος, X_2 το υψος, X_3 η ηλικια και X_4 η συστολικη πιεση ενος ασθενους, και εστω οτι μας ενδιαφερει να διερευνησουμε τις τυχον συσχετισεις των τ.μ. $\underline{X} = (X_1, \ldots, X_4)^T$.

(6.1) <u>Ορισμος</u>. Ενα διανυσμα $\underline{X} := (X_1, \ldots, X_n)^T$; η τυχαιων μεταβλητων, στο χωρο με πιθανοτητα $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ καλειται <u>n-διαστατη τ.μ.</u> ή <u>διανυσματικη τυχαια μεταβλητη</u> (δ.τ.μ.).

Παρατηρειστε οτι μια n-διαστατη τ.μ. $\underline{X}$ ειναι μια n-διαστατη συναρτηση:

$\underline{X} : \Omega \ni \omega \longmapsto \underline{X}(\omega) = (X_1(\omega), \ldots, X_n(\omega))^T \in \mathbb{R}^n$, με

$$(\underline{X} \le \underline{x}) := \{\omega \in \Omega : X_i(\omega) \le x_i \ \ \forall i=1,\ldots,n\} =$$

$$= \bigcap_{i=1}^{n} \{\omega \in \Omega : X_i(\omega) \le x_i\} \in \mathcal{A} \quad \forall \underline{x} \in \mathbb{R}^n.$$

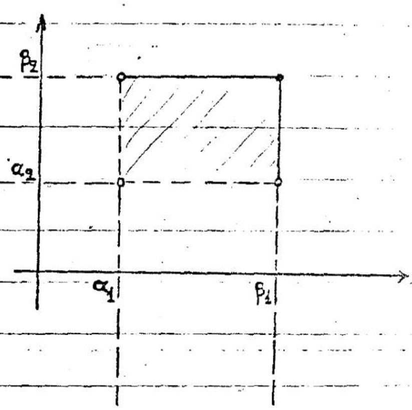
Η συναρτηση κατανομης της δ.τ.μ. $\underline{X}$ στον $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, ορίζεται κατ' αναλογία της σ.κ. μιας πραγματικής τ.μ., ως

(6.2) $F_n(\underline{x}) := P(\underline{X} \le \underline{x}) = P(X_1 \le x_1, \dots, X_n \le x_n) =$

$= P\left(\bigcap_{i=1}^{n} \{ \omega \in \Omega : X_i(\omega) \le x_i \} \right) \quad \forall \underline{x} \in \mathbb{R}^n .$

Εστω το παραλληλόγραμμο $(\underline{\alpha}, \underline{\beta}] := (\alpha_1, \beta_1] \times (\alpha_2, \beta_2]$, όπου $\underline{\alpha}, \underline{\beta} \in \mathbb{R}^2$,

παρατηρείστε ότι:



(6.3) $P(\underline{\alpha} < \underline{X} \le \underline{\beta}) =$
$= P(\alpha_1 < X_1 \le \beta_1, \alpha_2 < X_2 \le \beta_2) =$
$= F_2(\beta_1, \beta_2) - F_2(\alpha_1, \beta_2) -$
$- F_2(\beta_1, \alpha_2) + F_2(\alpha_1, \alpha_2)$,

και γενικότερα, $\forall \underline{\alpha}, \underline{\beta} \in \mathbb{R}^n$,

(6.4) $P(\underline{X} \in (\underline{\alpha}, \underline{\beta}]) = P(\alpha_1 < X_1 \le \beta_1, \dots, \alpha_n < X_n \le \beta_n) =$

$= \Delta_{\alpha_1 \beta_1} \cdots \Delta_{\alpha_n \beta_n} F_n(x_1, \dots, x_n)$,

όπου, $\Delta_{\alpha_i \beta_i} F_n(x_1, \dots, x_n) := F_n(x_1, \dots, x_{i-1}, \beta_i, x_{i+1}, \dots, x_n)$

$- F_n(x_1, \dots, x_{i-1}, \alpha_i, x_{i+1}, \dots, x_n)$

Αν ο φορέας της δ.τ.μ. $\underline{X}$ είναι αριθμήσιμο σύνολο, δηλαδή $S_{\underline{X}} = \{ \underline{x}_1, \underline{x}_2, \dots \} \subseteq \mathbb{R}^n$ και $P(\underline{X} \in S_{\underline{X}}) = 1$, τότε η δ.τ.μ. $\underline{X}$ καλείται <u>διακριτή</u> και η κατανομή της ορίζεται πλήρως είτε από τη σ.κ. της $F_{\underline{X}}$ είτε από τη

<u>συναρτηση μαζης πιθανοτητος</u> (σ.μ.π.) :

$$p_{\underline{X}}(\underline{x}) = P(\underline{X}=\underline{x}) = P(X_1=x_1,\dots,X_n=x_n) =$$

$$= P\Big(\bigcap_{i=1}^{n}\{\omega\in\Omega : X_i(\omega)=x_i\}\Big),$$

και προφανως : $F_{\underline{X}}(\underline{x}) = \sum_{\{\underline{y}\in S_{\underline{X}}\,:\,\underline{y}\le\underline{x}\}} P(\underline{X}=\underline{y})$.

Αν υπαρχη συναρτηση $f_{\underline{X}} : \mathbb{R}^n \ni \underline{x} \longmapsto f_{\underline{X}}(\underline{x}) \in [0,+\infty)$, τετοια ωστε:

(6.5) $F_{\underline{X}}(\underline{x}) := \int_{-\underline{\infty}}^{\underline{x}} f_{\underline{X}}(\underline{y})\,d\underline{y} :=$

$$:= \int_{-\infty}^{x_1}\cdots\int_{-\infty}^{x_n} f_{\underline{X}}(y_1,\dots,y_n)\,dy_1\dots dy_n \quad \forall \underline{x}\in\mathbb{R}^n,$$

τοτε η δ.τ.μ. $\underline{X}$ καλειται <u>αδολυτα συνεχης</u> (α.σ.), και σ' αυτη τη περιπτωση :

(6.6) $f_{\underline{X}}(\underline{x}) = \dfrac{\partial^n}{\partial\underline{x}} F_{\underline{X}}(\underline{x}) := \dfrac{\partial}{\partial x_1}\cdots\dfrac{\partial}{\partial x_n} F_{\underline{X}}(x_1,\dots,x_n)$,

$\forall \underline{x}\in\mathbb{R}^n\setminus N$, οπου το συνολο $N\subseteq\mathbb{R}^n$ ειναι αριθμησιμο. Η συναρτηση $f_{\underline{X}}(\cdot)$ καλειται <u>πυκνοτητα</u> της κατανομης της δ.τ.μ. $\underline{X}$. Σ' αυτη την περιπτωση εχουμε επισης:

(6.7) $P(\underline{X}\in(\underline{\alpha},\underline{\beta}]) = \int_{\alpha_1}^{\beta_1}\cdots\int_{\alpha_n}^{\beta_n} f_{\underline{X}}(x_1,\dots,x_n)\,dx_1\dots dx_n$,

$\forall\,\underline{\alpha},\underline{\beta}\in\mathbb{R}^n$. Γενικοτερα, $P(\underline{X}\in B) = \int_B f_{\underline{X}}(\underline{x})\,d\underline{x}$, αν $\underline{X}^{-1}(B)\in\mathcal{A}$.

Κατ' αναλογια της ροπογεννητριας μιας πραγματικης τ.μ. οριζουμε τη ροπογεννητρια μιας δ.τ.μ. $\underline{X}$, ως

(6.8) $M_{\underline{X}}(\underline{t}) := E\{e^{-\underline{t}^T\underline{X}}\} = E\{\exp\{-\Sigma_{i=1}^n t_i X_i\}\}$

$$= \begin{cases} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\underline{t}^T\underline{x}} f_{\underline{X}}(\underline{x})\,dx & \text{αν η } \underline{X} \text{ α.σ.} \\ \sum_{\underline{x}\in S_{\underline{X}}} e^{-\underline{t}^T\underline{x}} P(\underline{X}=\underline{x}) & \text{αν η } \underline{X} \text{ διακριτη} \end{cases},$$

οπου για την τελευταια ισοτητα χρησιμοποιησαμε τη γενικευση του τυπου του "αθροιστικου στατιστικου" (Προτ. 5.9):

(6.8′) $E\{g(\underline{X})\} = \int_{\mathbb{R}^n} g(\underline{x}) f_n(\underline{x})\,dx \quad \left(\text{ή } \sum_i g(\underline{x}_i) P(\underline{X}=\underline{x}_i)\right)$.

Δεν θα κανουμε πολλη χρηση της (6.8) εδω, βλεπε ομως τη δευτερη ασκηση στην (6.32).

(6.9) <u>Παραδειγμα</u>. Εστω δ.τ.μ. (X,Y) με φορεα $S = \{1,2\}\times\{1,2,3\}$ και σ.μ.π.

$$p(x,y) = P(X=x, Y=y) = \frac{1}{45}(x+3y), \quad (x,y)\in S.$$

(α) Δειξτε οτι η $p(x,y)$ ειναι πραγματι σ.μ.π.

(β) Βρητε τις σ.μ.π. των X και Y.

<u>Λυση</u>: (α) $p(x,y) \geq 0$ και επισης,

$$\sum_{i=1}^{2}\Sigma_{j=1}^{3} p(i,j) = \sum_{i=1}^{2}\Sigma_{j=1}^{3}\frac{1}{45}(i+3j) = \frac{1}{45}\Sigma_{i=1}^{2}\left(3i+3\sum_{j=1}^{3} j\right) =$$

$$= \frac{1}{15}\sum_{i=1}^{2}(i+6) = \frac{1}{15}\left(12+\sum_{i=1}^{2} i\right) = 1.$$

(β) $$p_X(x) = P(X=x) = P\left((X=x)\cap\left(\bigcup_{j=1}^{3}(Y=j)\right)\right) =$$

$$= P\left(\bigcup_{j=1}^{3}(X=x, Y=j)\right) = \sum_{j=1}^{3} P(X=x, Y=j) =$$

$$= \sum_{j=1}^{3} p(x,j) = (x+6)/15 = \begin{cases} 7/15 & \text{αν } x=1 \\ 8/15 & \text{αν } x=2 \end{cases}$$

Ομοια,

$$P_Y(y) = P(Y=y) = \sum_{i=1}^{2} P(X=i, Y=y) = \sum_{i=1}^{2} p(i,y) =$$

$$= (1+2y)/15 = \begin{cases} 3/15 & \text{αν } y=1 \\ 5/15 & \text{αν } y=2 \\ 7/15 & \text{αν } y=3. \end{cases}$$

Ειναι δυνατον να συνοψισουμε τα ανωτερω στον πινακα:

$x \backslash y$	1	2	3	$P_X(x)$
1	4/45	7/45	10/45	7/15
2	5/45	8/45	11/45	8/15
$P_Y(y)$	3/15	5/15	7/15	

Οι κατανομες P_X της τ.μ. X και P_Y της τ.μ. Y, λεγονται περιθωριες κατανομες (λογω του οτι εμφανιζονται στα περιθωρια του ανωτερω πινακα).

Γενικα, εστω διακριτη δ.τ.μ. $\underline{X} \in \mathbb{R}^n$, οι περιθωριες κατανομες της μπορουν να υπολογισθουν ως εξης:

$$(6.9')\quad P_{X_1,\dots,X_{n-1}}(x_1,\dots,x_{n-1}) = P(X_1=x_1,\dots,X_{n-1}=x_{n-1}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} P(X_1=x_1,\dots,X_{n-1}=x_{n-1},X_n=a_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} P_{X_1,\dots,X_n}(x_1,\dots,x_{n-1},a_i)$$

και συνεχιζοντας ετσι παιρνουμε:

$$(6.9'')\quad P_{X_i}(x_i) = \sum_{j=1}^{\infty}\cdots\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\cdots\sum_{j=1}^{\infty} p(x_{1,j},\dots,x_{i-1,j},x_i,x_{i+1,j},\dots,x_{n,j}).$$

Οι περιθωριακές σ.κ. υπολογίζονται λοιπόν ως εξής:

(6.10) $F_{n-1}(x_1,\dots,x_{i-1},x_{i+1},\dots,x_n) = P(X_1\le x_1,\dots,X_{i-1}\le x_{i-1},X_{i+1}\le x_{i+1},\dots)$.

$= \lim\limits_{x_i\to\infty} P(X_1\le x_1,\dots,X_n\le x_n) = \lim\limits_{x_i\to\infty} F_n(x_1,\dots,x_n)$,

και συνεχίζοντας έτσι παίρνουμε

(6.11) $F_1(x_i) = F_n(+\infty,\dots,+\infty,x_i,+\infty,\dots,+\infty) \quad \forall i=1,\dots,n$.

Οι (6.10) και (6.11) ισχύουν προφανώς και για α. συνεχείς δ.τ.μ., οπότε επίσης έχουμε

(6.12) $F_{n-1}(x_1,\dots,x_{i-1},x_{i+1},\dots,x_n) = \int_{-\infty}^{x_1}\cdots\int_{-\infty}^{x_{i-1}}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{x_{i+1}}\cdots\int_{-\infty}^{x_n} f_n(\underline{x}')\,d\underline{x}'$,

και παραγωγίζοντας και από τις δυο πλευρές ως προς $x_1,\dots,x_{i-1},x_{i+1},\dots,x_n$, έχουμε ότι

(6.13) $f_{n-1}(x_1,\dots,x_{i-1},x_{i+1},\dots,x_n) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(\underline{x})\,dx_i$,

και συνεχίζοντας έτσι έχουμε και:

(6.14) $F_1(x_i) = \int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{x_i}\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(\underline{x}')\,d\underline{x} \quad \forall i=1,\dots,n$

καθώς επίσης και,

(6.15) $f_1(x_i) = \int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(\underline{x})\,dx_1\cdots dx_{i-1}\,dx_{i+1}\cdots dx_n \quad \forall i=1,\dots,n$.

(6.16) <u>Παράδειγμα.</u> Έστω δ.τ.μ. (X,Y) με πυκνότητα

$$f(x,y) = y\, e^{-(x+1)y}\, 1(x>0)\, 1(y>0).$$

Υπολογίστε: (α) τη σ.κ. $F_2(x,y)$ της (X,Y),

(β) τις περιθώριες F_X, f_X και F_Y, f_Y,

(γ) $P(X<Y)$,

(δ) $P(X>x,\ Y>y)$,

(ε) $P(\frac{1}{2}<X\le 1,\ \frac{3}{4}<Y\le 3)$.

<u>Λύση</u>: Θα χρησιμοποιήσουμε επανειλημμένα την (6.7).

(α) $F_2(x',y') = \int_{-\infty}^{x'}\int_{-\infty}^{y'} f(x,y)\,dx\,dy =$

$$= \int_0^{x'}\int_0^{y'} y\, e^{-(x+1)y}\,dx\,dy = \int_0^{y'} y e^{-y}\left(\int_0^{x'} e^{-yx}dx\right)dy$$

$$= \int_0^{y'} e^{-y}(1-e^{-yx'})\,dy = 1-e^{-y'} - \int_0^{y'} e^{-(1+x')y}dy$$

$$= 1-e^{-y'} - (1+x')^{-1}(1-e^{-(1+x')y'}),$$

δηλαδή,

$$F(x,y) = (1+x^{-1})^{-1}\left\{1-e^{-y}\left[1+x^{-1}(1-e^{-xy})\right]\right\},\ x,y>0.$$

β) $F_X(x) = \lim_{y\to\infty} F(x,y) = (1+x^{-1})^{-1}\cdot 1(x>0)$

$$\Rightarrow f_X(x) = F_X'(x) = (1+x)^{-2}1(x>0)\ \left(=\int_0^\infty f(x,y)\,dy\right).$$

$F_Y(y) = \lim_{x\to\infty} F(x,y) = (1-e^{-y})\,1(y>0) \Rightarrow$

$$\Rightarrow f_Y(y) = F_Y'(y) = e^{-y}\,1(y>0)\left(=\int_0^\infty f(x,y)dy\right),$$

δηλαδή $Y\sim \mathcal{E}(\lambda=1)$.

(γ) $P(X<Y) = \int_0^\infty\left(\int_0^y f(x,y)\,dx\right)dy =$

$$= \int_0^\infty \left(\int_0^y y\, e^{-y} e^{-xy} dx \right) dy = \int_0^\infty e^{-y} (1 - e^{-y^2})\, dy$$

$$= 1 - \int_0^\infty e^{-(y^2+y)} dy = 1 - e^{1/4} \int_0^\infty e^{-(y+1/4)^2} dy$$

$$= 1 - \pi^{1/2} e^{1/4}\, P\left(N\left(-\tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{2}\right) > 0 \right) =$$

$$= 1 - \pi^{1/2} e^{1/4}\, P\left(N(0,1) > \tfrac{1}{2\sqrt{2}} \right) = 1 - \pi^{1/2} e^{1/4} \left[1 - \Phi\left(\tfrac{1}{2\sqrt{2}}\right) \right]$$

$$\approx 0,174$$

(δ) $P(X > x, Y > y) = P(X > x) - P(X > x, Y \leq y) =$

$= P(X > x) - P(Y \leq y) + P(X \leq x, Y \leq y)$

$= 1 - F_X(x) - F_Y(y) + F_2(x,y) \left(= \int_x^\infty \int_y^\infty f(x', y')\, dx' dy' \right).$

(ε) Από την (6.3) έχουμε ότι η ζητούμενη πιθανότητα είναι: $F_2(1,3) - F_2(\frac{1}{2}, 3) - F_2(1, \frac{3}{4}) + F_2(\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$

$\left(= \int_{1/2}^{1} \int_{3/4}^{3} f_2(x,y)\, dx\, dy \right)$

(6.17) Σημ. Από τα ανωτέρω (π.χ. σχέσεις 6.10 έως 6.15) είναι σαφές ότι η γνώση της κοινής κατανομής των $(X_1, \dots, X_n)$ μονοσήμαντα καθορίζει τις περιθώριες κατανομές F_{X_i} των X_i, $i = 1, \dots, n$. Το αντίστροφο δεν αληθεύει, δηλαδή η γνώση των περιθωρίων κατανομών F_{X_i}, $i = 1, \dots, n$ δεν καθορίζει μονοσήμαντα την κοινή κατανομή F_n των $(X_1, \dots, X_n)$. Για παράδειγμα έστω γνωστές οι κατανομές P_X, P_Y στα περιθώρια του ακόλουθου πίνακα:

$i \backslash j$	1	2	3	$P_X(i)$
1	p_{11}	p_{12}	p_{13}	$p_{1\cdot}$
2	p_{21}	p_{22}	p_{23}	$p_{2\cdot}$
$P_Y(j)$	$p_{\cdot 1}$	$p_{\cdot 2}$	$p_{\cdot 3}$	1

Η κατανομή των (X,Y), καθορίζεται από τα 6 άγνωστα p_{ij}, $i=1,2$, $j=1,2,3$, τα οποία όμως, εν γένει, δεν καθορίζονται μονοσήμαντα από τις 5 εξισώσεις που έχουμε: $\begin{cases} \Sigma_{i=1}^{2} P_{ij} = P_{\cdot j} , & j=1,2,3, \\ \Sigma_{j=1}^{3} P_{ij} = P_{i\cdot} , & i=1,2. \end{cases}$

Ανεξάρτητες τ.μ.

(6.18) Ορισμός. Έστω δ. τ.μ. $\underline{X}=(X_1,\dots,X_n)$ στον χώρο με πιθανότητα $(\Omega,\mathcal{A},P)$. Αν $\forall\ B_1,\dots,B_n \in \mathcal{B}$, τα γεγονότα $(X_i \in B_i)^-$, $i=1,\dots,n$ είναι ανεξάρτητα, δηλαδή, $P(X_1\in B_1,\dots,X_n\in B_n) = P(\bigcap_{i=1}^{n}(X_i\in B_i)) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i\in B_i)$, τότε οι τ.μ. $X_1,\dots,X_n$ καλούνται ανεξάρτητες.

Στην ειδική περίπτωση που $B_i := (-\infty, x_i]$, $i=1,\dots,n$ έχουμε:

(6.19) $F_n(\underline{x}) = \prod_{i=1}^{n} F_{X_i}(x_i) \quad \forall\ \underline{x}=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$.

Αν η $\underline{X}$ είναι διακριτή, θέτοντας $B_i=\{x_i\}$, $i=1,\dots,n$ στον ορισμό της ανεξαρτησίας των $X_1,\dots,X_n$, έχουμε

(6.20) $P(\underline{X}=\underline{x}) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i=x_i)$, $\forall\ \underline{x}\in\mathbb{R}^n$.

Αν η $\underline{X}$ είναι α. συνεχής, διαφορίζοντας την (6.19), ως προς $x_1,\dots,x_n$, έχουμε

(6.21) $f_n(\underline{x}) = \prod_{i=1}^{n} f_{X_i}(x_i) \quad \forall\ \underline{x}\in\mathbb{R}^n$.

Τώρα από την (6.20) ή την (6.21), μέσω της (6.7), ξαναβαιρνουμε την σχεση του ορισμου (6,18) η οποια αρα ειναι ισοδυναμη με την (6.19) και (6.20) ή (6.21).

(6.22) <u>Σημ.</u> Απο την (6.19) βλεπουμε οτι αν οι τ.μ. $X_1, \dots, X_n$ ειναι ανεξαρτητες τοτε οι περιθωριες κατανομες F_{X_i}, $i=1,\dots,n$ καθοριζουν μονοσημαντα την κοινη κατανομη F_n των $(X_1, \dots, X_n)$.

(6.23) <u>Προταση</u>. Εστω τ.μ. X, Y στον $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

(α) X, Y ανεξαρτητες $\Leftrightarrow$ $E\{g(X)h(Y)\} = E\{g(X)\}E\{h(Y)\}$, $\forall\, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ τετοιες ωστε $g(X)$, $h(Y)$ τ.μ. με καλα ορισμενη μεση τιμη.

(β) X, Y ανεξαρτητες $\Leftrightarrow$ $M_{X,Y}(t,s) = M_X(t) M_Y(s)$ $\forall s,t$

(γ) X, Y ανεξαρτητες $\Leftrightarrow$ $g(X), h(Y)$ ανεξαρτητες $\forall g, h$, τετοιες ωστε $g(X), h(Y)$ τ.μ.

<u>Αποδ.</u> Οι αποδειξεις των ($\Leftarrow$) δεν θα δοθουν εδω.

(α) Αρκει να δειξουμε $EXY = EX\,EY$:

$$EXY = \iint xy\, f_2(x,y)\,dx\,dy = \iint xy\, f_X(x) f_Y(y)\,dx\,dy$$
$$= \left(\int x f_X(x)\,dx\right)\left(\int y f_Y(y)\,dy\right) = EX\;EY$$

(β) $$M_{X,Y}(t,s) = E\left\{e^{-(tX+sY)}\right\} = E\left\{e^{-tX} e^{-sY}\right\} =$$

$$= E\{e^{-tX}\}\,E\{e^{-sY}\} = M_X(t) M_Y(s) \quad \text{(απο το μερος (α))}.$$

(γ) Επεται απο το μερος (β) και το μονοσημαντο της ροπογεννητριας.

(6.23′) <u>Παραδειγμα</u>. Εστω X, Y οι αριθμοι των ανδρων και γυναικων αντιστοιχα που εισερχονται σε ενα μεγαλο καταστημα κατα τη διαρκεια μιας ημερας. Αν οι πελατες εισερχονται στο καταστημα ανεξαρτητα ο ενας απ' τον αλλο και $100p\%$ απ' αυτους ειναι ανδρες και $100(1-p)\%$ γυναικες και αν επισης υποθετουμε οτι ο αριθμος των πελατων $Z := X+Y \sim \mathcal{P}oisson(\lambda)$,

(α) βρητε την συνκατανομη των (X,Y),

(β) βρητε τις περιθωριες: $X \sim \mathcal{P}oisson(\lambda p)$, $Y \sim \mathcal{P}oisson(\lambda(1-p))$

(γ) δειξτε οτι οι X, Y ειναι ανεξαρτητες.

<u>Λυση</u>: (α) Απο τον τυπο ολικης πιθανοτητος παιρνουμε:

$$
\begin{aligned}
p_2(i,j) &= P(X=i, Y=j) = \\
&= P(X=i, Y=j \mid Z=i+j)\,P(Z=i+j) + \overbrace{P(X=i, Y=j \mid Z\neq i+j)}^{=0}P(Z\neq i+j) \\
&= P(X=i, Y=j \mid Z=i+j)\; e^{-\lambda}\lambda^{i+j}/(i+j)! \\
&= P(X=i \mid Z=i+j)\; e^{-\lambda}\lambda^{i+j}/(i+j)! \\
&= \binom{i+j}{i} p^i (1-p)^{i+j-i}\, e^{-\lambda}\lambda^{i+j}/(i+j)! \\
&= e^{-\lambda}(\lambda p)^i\,[\lambda(1-p)]^j/(i!\,j!)\,, \quad i,j=0,1,2,\ldots
\end{aligned}
$$

(β) Απο την (6.9″) εχουμε:

$$
p_X(i) = \sum_{j=1}^{\infty} p_2(i,j) = e^{-\lambda}\frac{(\lambda p)^i}{i!}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{[\lambda(1-p)]^j}{j!}
$$

$$
= e^{-\lambda}\frac{(\lambda p)^i}{i!}\,e^{\lambda(1-p)} = e^{-\lambda p}\frac{(\lambda p)^i}{i!}\,, \quad i=0,1,2,\ldots
$$

Η περιθωρια της Y βρισκεται ομοιως.

(γ) Αρκει να παρατηρησουμε οτι $p_2(i,j) = p_X(i)\,p_Y(j) \quad \forall i,j=0,1,2,\ldots$.

(6.23″) <u>Παραδειγμα.</u> Ενας ανδρας και μια γυναικα εχουν συμφωνηση να συναντηθουν σε ενα ζαχαροπλαστειο καθοια ωρα μεταξυ 12:00 και 1:00 το μεσημερι. Ας υποτεθη οτι ο ανδρας φθανει στο ζαχαροπλαστειο στις $12+X$ και η γυναικα στις $12+Y$ και ας υποθεσουμε οτι οι X, Y ανεξαρτητες τ.μ. με την ιδια κατανομη $\mathcal{U}(0,1)$ (ισονομες). Βρητε την

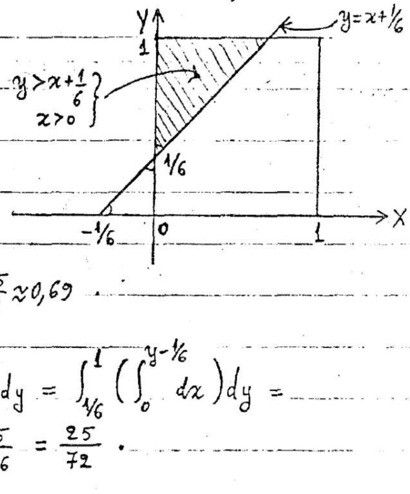
$P(|X-Y|>1/6)$, δηλαδη ο ενας να περιμενη τον αλλο για περισσοτερο απο 10 λεπτα.

<u>Λυση.</u> $(|X-Y|>1/6) = (X-Y>1/6) \cup (X-Y<-1/6)$ και τα δυο ενδεχομενα ειναι ασυμβιβαστα. Αρα,

$$P(|X-Y|>1/6) = P\left(Y+\tfrac{1}{6}<X\right) + P\left(X+\tfrac{1}{6}<Y\right)$$

$$= 2\,P\left(X+\tfrac{1}{6}<Y\right)$$

$$= 2\iint_{x+1/6<y} f_Z(x,y)\,dx\,dy$$



$$= 2\iint_{x+1/6<y} f_X(x) f_Y(y)\,dx\,dy$$

$$= 2\iint_{x+1/6<y} dx\,dy = 2\,\frac{1}{2}\left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{25}{36} \simeq 0{,}69 .$$

Ή πιο προσεκτικα: $\iint_{\{x+1/6<y\}} dx\,dy = \int_{1/6}^{1}\left(\int_0^{y-1/6} dx\right)dy =$

$$= \int_{1/6}^{1}(y-1/6)\,dy = \frac{1}{2}\,y^2\Big|_{1/6}^{1} - \frac{5}{36} = \frac{25}{72} .$$

(6.23‴) <u>Ασκηση</u>. Εστω X, Y, Z ανεξαρτητες και ισονομες, $\mathcal{U}(0,1)$. Δειξτε οτι $P(X \geq YZ) = 3/4$.

(6.24) <u>Παραδειγμα</u>: Εστω X, Y ανεξαρτητες τ.μ..

(α) $Z := X \vee Y := \max\{X, Y\} \Rightarrow F_Z(z) = F_X(x) F_Y(y)$,

(β) $Z := X \wedge Y := \min\{X, Y\} \Rightarrow 1 - F_Z(z) = [1-F_X(x)][1-F_Y(y)]$.

Αποδ. (α) $F_Z(z) = P(X\vee Y\le z) = P(X\le z\,,\, Y\le z) =$ (απο ανεξ.)

$= P(X\le z)\,P(Y\le z) = F_X(z)\,F_Y(z)$

(β) $F_Z(z) = P(X\wedge Y\le z) = 1-P(X\wedge Y>z) = 1-P(X>z\,,\,Y>z) =$

(απο ανεξ) $= 1 - P(X>z)P(Y>z) = 1-[1-F_X(z)][1-F_Y(z)]$

(6.25) Ασκηση. Εστω $X_1,\dots,X_n$ ανεξαρτητες τ.μ.

(α) Γενικευστε τα αποτελεσματα του (6.24).

(β) Σαν εφαρμογη, δειξτε οτι αν επι πλεον οι τ.μ. $X_1,\dots,X_n$ ειναι ισονομες, δηλαδη $X_i\sim F$ με πυκνοτητα f $\forall\, i=1,\dots,n$, τοτε

(i) αν $X_{nn}:=\max\{X_1,\dots,X_n\}\Rightarrow$

$\Rightarrow F_{X_{nn}}(z) = [F(z)]^n \Rightarrow f_{X_{nn}}(z) = n[F(z)]^{n-1}f(z)$

(ii) αν $X_{n1}:=\min\{X_1,\dots,X_n\}\Rightarrow$

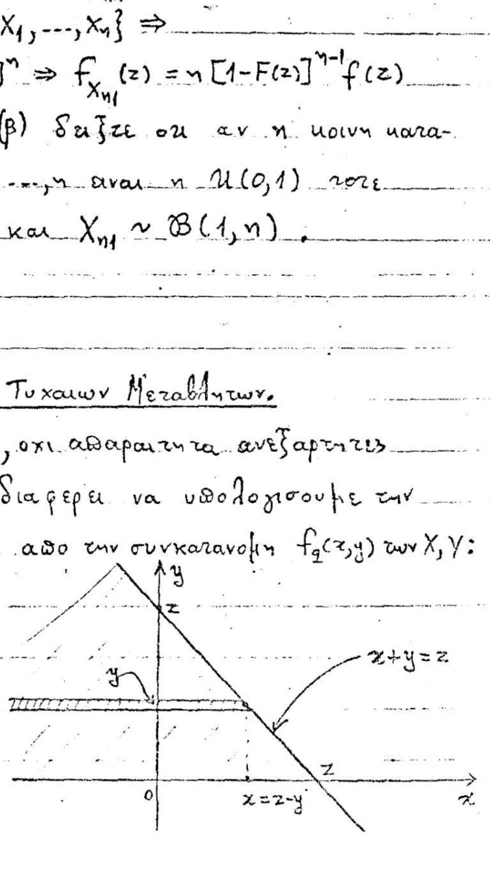
$\Rightarrow F_{X_{n1}}(z) = 1-[1-F(z)]^n \Rightarrow f_{X_{n1}}(z) = n[1-F(z)]^{n-1}f(z)$

(γ) Σαν εφαρμογη στο (β) δειξτε οτι αν η κοινη κατανομη των X_i, $i=1,\dots,n$ ειναι η $\mathcal{U}(0,1)$ τοτε $X_{nn}\sim\mathcal{B}(n,1)$ και $X_{n1}\sim\mathcal{B}(1,n)$.

Αθροισματα Ανεξαρτητων Τυχαιων Μεταβλητων.

Εστω τ.μ. X, Y, οχι απαραιτητα ανεξαρτητες. Προς το παρον, μας ενδιαφερει να υπολογισουμε την κατανομη του $Z:=X+Y$ απο την συνκατανομη $f_2(x,y)$ των X,Y:

$$F_{X+Y}(z) = P(X+Y\le z) = \iint_{x+y\le z} f_2(x,y)\,dx\,dy = \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{z-y} f_2(x,y)\,dx\right)dy$$



Αρα,

$$(6.25') \quad f_{X+Y}(z) = \frac{d}{dz} F_{X+Y}(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_2(z-y, y)\, dy \,,$$

και αν οι X, Y είναι <u>ανεξάρτητες</u>, τότε

$$(6.25'') \quad f_{X+Y}(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z-y) f_Y(y)\, dy$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) f_Y(z-x)\, dy$$

και άρα,

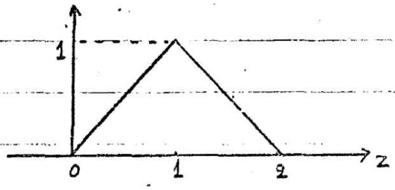
$$(6.25''') \quad F_{X+Y}(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} F_X(z-y)\, dF_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} F_Y(z-x)\, dF_X(x) \,.$$

Η (6.25''') ισχύει ακόμη και όταν οι X, Y δεν έχουν πυκνότητες. Η (6.25'') είναι επίσης γνωστή και ως <u>"συνέλιξη"</u> των συναρτήσεων f_X, f_Y. Θα ξαναβρούμε αυτή την φράξη μεταξύ δυο συναρτήσεων με άλλες δυο μεθόδους αργότερα (βλ. (6.50) και (6.)).

(6.25^{IV}) <u>Παράδειγμα</u>. Έστω X, Y ανεξάρτητες και ισόνομες (α.ι.) τ.μ. με κοινή $\mathcal{U}(0,1)$ κατανομή. Δείξτε ότι

$$f_{X+Y}(z) = z\, 1(0<z\le 1) + (2-z)\, 1(1\le z<2) \,.$$

<u>Λύση</u>.



$$f_{X+Y}(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_Y(z-x) f_X(x)\, dx =$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} 1(0<z-x<1)\, 1(0<x<1)\, dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} 1(z-1<x<z)\, 1(0<x<1)\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} 1((z-1)\vee 0 < x < z\wedge 1)\, dx$$

$$= \int_{(z-1)\vee 0}^{z\wedge 1} dx = z\wedge 1 - 0\vee(z-1) = \begin{cases} z & \text{αν } 0<z\le 1 \\ 2-z & \text{αν } 1\le z<2 \\ 0 & \text{οπουδήποτε αλλού} \end{cases}.$$

Αυτή η κατανομή λέγεται <u>Τριγωνική</u> ή του Simpson.

(6.25^{v}) <u>Παράδειγμα:</u> Εστω $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, $Y \sim \mathcal{P}(\mu)$ & X, Y <u>ανεξάρτητες</u>.
Τοτε, $X+Y \sim \mathcal{P}(\lambda+\mu)$.

<u>Αποδ.</u> Το ενδεχομενο $(X+Y=\nu) = \bigcup_{k=0}^{\nu} (X=k, Y=\nu-k)$
οπου τα τελευταια $\nu+1$ ενδεχομενα ειναι ασυμβιβαστα.
Αρα, $P(X+Y=\nu) = \sum_{k=0}^{\nu} P(X=k, Y=\nu-k) =$
$= \sum_{k=0}^{\nu} P(X=k)\,P(Y=\nu-k)$, λογω της ανεξαρτησιας των X, Y,

$$= \sum_{k=0}^{\nu} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\mu} \frac{\mu^{\nu-k}}{(\nu-k)!} = e^{-(\lambda+\mu)} \frac{1}{\nu!} \sum_{k=0}^{\nu} \binom{\nu}{k} \lambda^k \mu^{\nu-k}$$

$$= e^{-(\lambda+\mu)} \frac{(\lambda+\mu)^{\nu}}{\nu!}, \quad \nu = 0, 1, 2, \ldots .$$

(6.25^{vi}) <u>Παράδειγμα:</u> Εστω $X \sim \mathcal{G}(\alpha, \lambda)$, $Y \sim \mathcal{G}(\beta, \lambda)$ & X, Y <u>ανεξάρτητες</u>.
Τοτε, $X+Y \sim \mathcal{G}(\alpha+\beta, \lambda)$.

<u>Αποδ.</u> $f_{X+Y}(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_Y(z-x) f_X(x)\,dx =$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\lambda^{\beta}}{\Gamma(\beta)} (z-x)^{\beta-1} e^{-\lambda(z-x)} 1(z-x>0) \frac{\lambda^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x} 1(x>0)\,dx =$$

$$= \frac{\lambda^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} e^{-\lambda z} \int_0^z (z-x)^{\beta-1} x^{\alpha-1}\,dx = \left(\text{θετοντας } y = x/z\right)$$

$$= \frac{\lambda^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} z^{\alpha+\beta-1} e^{-\lambda z} \int_0^1 (1-y)^{\beta-1} y^{\alpha-1}\,dy = (\text{βλ. Σημ. στην 4.48})$$

$$= \frac{\lambda^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} z^{\alpha+\beta-1} e^{-\lambda z} \frac{\Gamma(\beta)\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha+\beta)} = \frac{\lambda^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha+\beta)} z^{\alpha+\beta-1} e^{-\lambda z}, \quad z>0.$$

(6.25^{vii}) <u>Παράδειγμα</u>. Εστω $X \sim \mathcal{B}(\nu, p)$, $Y \sim \mathcal{B}(k, p)$ & X, Y <u>ανεξάρτητες</u>.
Τοτε, $X+Y \sim \mathcal{B}(\nu+k, p)$.

<u>Αποδ.</u> Οπως και στο παραδειγμα (6.25^{v}) εχουμε:
$P(X+Y=n) = \sum_{i=0}^{n} P(X=i, Y=n-i) =$ (λογω ανεξ. των X, Y)
$= \sum_{i=0}^{n} P(X=i)\,P(Y=n-i) =$
$= \sum_{i=0}^{n} \binom{\nu}{i} p^i (1-p)^{\nu-i} \binom{k}{n-i} p^{n-i} (1-p)^{k-n+i}$

$= p^n (1-p)^{\nu+k-n} \Sigma_{i=0}^{n} \binom{\nu}{i}\binom{k}{n-i} =$ (απο Ασκηση 4.29)

$= \binom{\nu+k}{n} p^n (1-p)^{\nu+k-n}$, $n = 0, 1, \ldots, (\nu+k)$.

(6.25^{VIII}) <u>Ασκηση</u>. Εστω X, Y <u>ανεξαρτητες</u> τ.μ..

(α) Αν $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ & $Y \sim N(\xi, \tau^2) \Rightarrow X+Y \sim N(\mu+\xi, \sigma^2+\tau^2)$.

(β) Αν $X \sim \mathcal{AD}(K, p)$ & $Y \sim \mathcal{AD}(M, p) \Rightarrow X+Y \sim \mathcal{AD}(K+M, p)$.

(γ) Αν $X \sim \chi^2_\nu$ & $Y \sim \chi^2_n \Rightarrow X+Y \sim \chi^2_{\nu+n}$.

(6.25^{IX}) <u>Σημ.</u> Με επαγωγη στα 6.25^{V} εως 6.25^{VIII}, εχουμε αν $S_n := \Sigma_{i=1}^{n} X_i$ και $X_1, \ldots, X_n$ ανεξαρτητες & ισονομες με:

(α) $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2) \Rightarrow S_n \sim N(\Sigma_{i=1}^{n}\mu_i, \Sigma_{i=1}^{n}\sigma_i^2)$,

(β) $X_i \sim \mathcal{G}(\alpha_i, \lambda) \Rightarrow S_n \sim \mathcal{G}(\Sigma_{i=1}^{n}\alpha_i, \lambda)$,

(γ) $X_i \sim \chi^2_{\nu_i} \Rightarrow S_n \sim \chi^2_{\Sigma_{i=1}^{n}\nu_i}$

(δ) $X_i \sim \mathcal{P}(\lambda_i) \Rightarrow S_n \sim \mathcal{P}(\Sigma_{i=1}^{n}\lambda_i)$

(ε) $X_i \sim \mathcal{D}(\nu_i, p) \Rightarrow S_n \sim \mathcal{D}(\Sigma_{i=1}^{n}\nu_i, p)$

(ζ) $X_i \sim \mathcal{AD}(K_i, p) \Rightarrow S_n \sim \mathcal{AD}(\Sigma_{i=1}^{n}K_i, p)$

Αν η μορφη της ροπογεννητριας μιας τ.μ. ειναι καταλληλη, αποτελεσματα σαν τα της ανωτερω σημειωσης μπορουν να βγουν σαν αμεσα αποτελεσματα της (6.26) κατωτερω:

(6.26) <u>Προταση</u>. Εστω $X_1, \ldots, X_n$ ανεξαρτητες τ.μ. και $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ σταθερες. Τοτε αν $Z := \Sigma_{i=1}^{n}\alpha_i X_i$ εχουμε οτι:

$$M_Z(t) = \prod_{i=1}^{n} M_{X_i}(\alpha_i t) .$$

<u>Αποδ.</u> $M_Z(t) = E\{\exp[-t\,\Sigma_{i=1}^{n}\alpha_i X_i]\} = E\{\prod_{i=1}^{n} e^{-(\alpha_i t)X_i}\} \overset{(6.23)}{=}$

$= \prod_{i=1}^{n} E\{e^{-(\alpha_i t)X_i}\} = \prod_{i=1}^{n} M_{X_i}(\alpha_i t)$.

(6.27) <u>Παράδειγμα</u>: Έστω $X_1, \dots, X_n$ ανεξάρτητες τ.μ.

(α) Αν $X_i \sim \mathcal{G}(\alpha_i, \lambda)$ (ίδιο λ), $i=1,\dots,n$, τότε $S_n := \Sigma_{i=1}^n X_i \sim \mathcal{G}(\alpha, \lambda)$ με $\alpha = \Sigma_{i=1}^n \alpha_i$.

(β) Αν $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$, $i=1,\dots,n$, τότε
$S_n := \Sigma_{i=1}^n X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ με $\mu = \Sigma_{i=1}^n \mu_i$ και $\sigma^2 = \Sigma_{i=1}^n \sigma_i^2$.

(γ) Αν $X_i \sim N(0,1)$, $i=1,\dots,n$, τότε
$S_n^2 := \Sigma_{i=1}^n X_i^2 \sim \chi_n^2$.

<u>Αποδ.</u> Θα εφαρμόσουμε την Πρόταση (6.26) με $\alpha_i = 1$, $i=1,\dots,n$.

(α) $M_{S_n}(t) = \prod_{i=1}^n M_{X_i}(t) = \prod_{i=1}^n \left(1+\frac{t}{\lambda}\right)^{-\alpha_i} = \left(1+\frac{t}{\lambda}\right)^{-\alpha}$,
με $\alpha = \Sigma_{i=1}^n \alpha_i$. Το αποτέλεσμα έπεται από την Πρόταση (5.27).

(β) $M_{S_n}(t) = \prod_{i=1}^n M_{X_i}(t) = \prod_{i=1}^n \exp\{-\mu_i t + \frac{1}{2}\sigma_i^2 t^2\} =$

$= \exp\{-(\Sigma_1^n \mu_i)t + \frac{1}{2}(\Sigma_{i=1}^n \sigma_i^2)t^2\} =$
$= \exp\{-\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t\}$ και το αποτέλεσμα έπεται από την (5.27)

(γ) Από τα (4.67) και (6.23(γ)) έπεται ότι $X_1^2, \dots, X_n^2$ ανεξάρτητες με κοινή κατανομή την $\chi_1^2 = \mathcal{G}(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ και άρα από το μέρος (α) έπεται ότι $S_n^2 \sim \mathcal{G}(\frac{n}{2}, \frac{1}{2}) = \chi_n^2$.

(6.28) <u>Σημείωση</u>. Αν $\forall n \in \{1,2,3,\dots\}$ μια τ.μ. X μπορεί να παρασταθή σαν το άθροισμα n ανεξαρτήτων και ισονόμων τ.μ. $X_{1n}, X_{2n}, \dots, X_{nn}$, δηλαδή $X = \Sigma_{i=1}^n X_{in}$, τότε η τ.μ. X καλείται <u>επ' άπειρο διαιρετή</u>. Για παράδειγμα, έστω $X \sim \mathcal{G}(\alpha, \lambda)$, τότε $\forall n \in \{1,2,\dots\}$ $X = \Sigma_{i=1}^n X_{in}$ όπου $X_{in} \sim \mathcal{G}(\alpha/n, \lambda)$

$i=1,2,\dots,n$ και οι $X_{1n},\dots,X_{nn}$ είναι ανεξάρτητες, βλ. 6.27(α). Επ' άπειρο διαιρετές είναι επίσης η $N(\mu,\sigma^2)$, η Cauchy(α,β) και η Poisson(λ), βλ. 6.27(β) και 6.29(α,β).

(6.29) <u>Άσκηση</u>. Έστω ανεξάρτητες τ.μ. $X_1,\dots,X_n$ και $S_n := \sum_{i=1}^n X_i$. Δείξτε ότι

(α) αν $\forall i=1,\dots,n: X_i \sim \mathcal{C}(\alpha_i,\beta_i)$, τότε $S_n \sim \mathcal{C}\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i, \sum_{i=1}^n \beta_i\right)$,

(β) αν $\forall i=1,\dots,n$ $X_i \sim$ Poisson(λ_i), τότε $S_n \sim$ Poisson$\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i\right)$.

(6.30) <u>Άσκηση</u>. Δείξτε ότι

(α) αν $X \sim \mathcal{D}(\nu,p)$, τότε η X μπορεί να παρασταθεί σαν το άθροισμα ν ανεξάρτητων και ισονόμων Bernoulli(p) τ.μ.

(β) αν $X \sim \mathcal{AD}(\kappa,p)$, τότε η X μπορεί να παρασταθεί σαν το άθροισμα κ ανεξάρτητων και ισονόμων Γεωμετρικών (p).

Η $\mathcal{D}(\nu,p)$ και η $\mathcal{AD}(\kappa,p)$ <u>δεν</u> είναι όμως επ' άπειρο διαιρετές.

Ροπες.

Οι ροπες των βαθμωτων τ.μ. γενικευονται για τις δ.τ.μ. Θα ασχοληθουμε εδω με τις:

(6.31) Μεση τιμη: $E\underline{X} := (EX_1, \dots, EX_n)^T \in \mathbb{R}^n$, αν $E|X_i| < +\infty \; \forall i=1,\dots,n$.

(6.32) Συνδιακυμανση δυο τ.μ. X, Y με $EX^2, EY^2 < +\infty$:

$$\mathrm{cov}(X,Y) := E\{(X-EX)(Y-EY)\} = E(XY) - (EX)(EY) \quad \text{(ασκηση!)}$$
$$= \left[\frac{\partial^2}{\partial s \partial t} M_{(X,Y)}(s,t) - \frac{\partial}{\partial s} M_{(X,Y)}(s,t) \frac{\partial}{\partial t} M_{(X,Y)}(s,t)\right]_{s=t=0} \quad \text{(ασκηση!)}$$

Παρατηρειστε οτι:

(6.33) $\mathrm{cov}(X,X) = \mathcal{D}(X)$.

(6.34) Πινακας Διασπορας μιας δ.τ.μ. $\underline{X} \in \mathbb{R}^n$:

$$\mathcal{D}(\underline{X}) = E\{(\underline{X}-E\underline{X})(\underline{X}-E\underline{X})^T\} = [\mathrm{cov}(X_i,X_j)] \in \mathbb{R}^{2n}$$
$$=: [\sigma_{ij}] =: \Sigma.$$

Παρατηρειστε οτι

(6.35) $\sigma_{XY} := \mathrm{cov}(X,Y) = \mathrm{cov}(Y,X) = \sigma_{YX}$,

και αρα ο πινακας $\mathcal{D}(\underline{X})$ ειναι συμμετρικος, με διαγωνια στοιχεια τις διασπορες $\mathcal{D}(X_i)$, $i=1,\dots,n$.

(6.36) Ασκηση. Εστω τ.μ. X, Y, Z και σταθερες $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Δειξτε οτι: (α) $E\{\alpha X + \beta Y\} = \alpha EX + \beta EY$,

(β) $\mathcal{D}(\alpha X + \beta Y) = \alpha^2 \mathcal{D}(X) + \beta^2 \mathcal{D}(Y) + 2\alpha\beta\,\mathrm{cov}(X,Y)$.

(γ) $\mathrm{cov}(\alpha X + \beta Y, Z) = \alpha\,\mathrm{cov}(X,Z) + \beta\,\mathrm{cov}(Y,Z)$.

(6.37) Προταση. Ο πινακας διασπορας μιας δ.τ.μ. $\underline{X} \in \mathbb{R}^n$ ειναι μη αρνητικα ορισμενος, δηλαδη

$\forall \underline{\alpha} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\underline{0}\}$, $\underline{\alpha}^T \Sigma \underline{\alpha} \geq 0$.

Αποδ. $\underline{\alpha}^T \Sigma \underline{\alpha} = \Sigma_{i=1}^n \Sigma_{j=1}^n \alpha_i \alpha_j \,\mathrm{cov}(X_i, X_j) =$

$$= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \operatorname{cov}(X_i, \sum_{j=1}^{n}\alpha_j X_j) = \operatorname{cov}(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i X_i, \sum_{i=1}^{n}\alpha_i X_i) =$$
$$= \mathcal{D}(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i X_i) \geqslant 0 .$$

Παρατηρειστε οτι ο πινακας $\Sigma = \mathcal{D}(\underline{X})$ ειναι θετικα ορισμενος αν οι συνιστωσες της δ.τ.μ. $\underline{X}$ ειναι γραμμικα ανεξαρτητες με πιθανοτητα 1, δηλαδη $\nexists\ \underline{\alpha} \in \mathbb{R}^n$ και $c \in \mathbb{R}$:
$P(\sum_i^n \alpha_i X_i = c) = 1$.

(6.38) Προταση: Εστω τ.μ. X, Y.

(α) $P(X \leqslant Y) = 1 \Rightarrow EX \leq EY$.

(β) $|EXY| \leq \sqrt{EX^2\, EY^2}$, με "=" $\Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{R}: P(Y=cX)=1$.

(γ) $|\operatorname{cov}(X,Y)| \leq \sqrt{\mathcal{D}(X)\,\mathcal{D}(Y)}$, με "=" $\Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{R}: P(Y=cX)=1$.

Οι δυο τελευταιες ανισοτητες αποδιδονται στους Cauchy - Schwarz.

Αποδ. (α) Εφαρμοστε την 5.11(γ) στη τ.μ. $Z := Y - X$.

(β) $\lambda X^2 + \frac{1}{\lambda} Y^2 \pm 2XY = (\sqrt{\lambda} X \pm \frac{1}{\sqrt{\lambda}} Y)^2 \geqslant 0 \quad \forall \lambda > 0$,
με "=" $\Leftrightarrow Y = \pm \lambda X$. Τοτε
$$-\lambda X^2 - \frac{1}{\lambda} Y^2 \leq 2XY \leq \lambda X^2 + \frac{1}{\lambda} Y^2,$$
και αρα απο το μερος (α),
$$2|EXY| \leq \lambda EX^2 + \frac{1}{\lambda} EY^2 \leq 2\sqrt{EX^2 EY^2},$$
μια και το μεσαιο σκελος των ανισοτητων μεγιστοποιειται ως προς λ, για $\lambda = (EY^2/EX^2)^{1/2}$.

(γ) Εφαρμοστε το μερος (β) στις τ.μ. $X - EX$, $Y - EY$.

Το πηλικο:

(6.39) $$\rho \equiv \rho(X,Y) := \frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathcal{D}(X)\,\mathcal{D}(Y)}} = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y},$$

καλειται <u>συντελεστης συσχετισης</u> των τ.μ. X, Y, και ειναι ενα ειδος συνημιτονου της "γωνιας" των X, Y. Παρατηρειστε οτι απο την 6.24 (γ), εχουμε:

(6.40) $|\rho| \leq 1$, με "=" $\Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{R}$ σταθερα τετοια ωστε $P(Y = cX) = 1$.

Αν $\rho(X,Y) > 0$ οι τ.μ. X, Y λεγονται <u>θετικα συσχετισμενες</u>, αν $\rho(X,Y) < 0$ οι τ.μ. X, Y λεγονται <u>αρνητικα συσχετισμενες</u>, και αν $\rho(X,Y) = 0$ οι τ.μ. X, Y λεγονται <u>ασυσχετιστες</u>.

(6.41) <u>Προταση</u>. Αν οι τ.μ. X, Y ειναι ανεξαρτητες τοτε ειναι και ασυσχετιστες, αλλα το αντιστροφο δεν ισχυει εν γενει (βλ. ομως 6.44)

<u>Αποδ.</u> $EXY = \iint xy\, f_2(x,y)\, dx dy =$

$= \iint xy\, f_X(x) f_Y(y) dx dy = \left(\int x f_X(x) dx\right)\left(\int y f_Y(y) dy\right)$

$= EX \cdot EY$,

αλλα $\operatorname{cov}(X,Y) = EXY - EXEY = 0$.

Το αντιστροφο ομως δεν ισχυει εν γενει:

εστω $X \sim \mathcal{U}(-1,1)$, $Y = X^2$. Προφανως οι X, Y ειναι εξηρτημενες, αλλα

$EXY = EX^3 = \int_{-1}^{1} x^3 dx = \frac{1}{4} x^4 \Big|_{-1}^{1} = 0 = EXEY$

$\Rightarrow \operatorname{cov}(X,Y) = 0$.

(6.42) <u>Παραδειγμα</u>: <u>n-διαστατη κανονικη κατανομη</u> $N_n(\underline{\mu}, \Sigma)$ οπου $\underline{\mu} \in \mathbb{R}^n$ και Σ ειναι ενας συμμετρικος θετικα ορισμενος $n \times n$ πινακας. Η συνκρτηση της κατανομης ειναι:

$$f_n(\underline{x}) = (2\pi)^{-n/2} |\Sigma|^{-1/2} \exp\{-\tfrac{1}{2}(\underline{x}-\underline{\mu})^T \Sigma (\underline{x}-\underline{\mu})\}, \ \underline{x} \in \mathbb{R}^n.$$

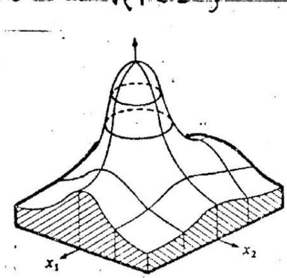
Στο $\mathbb{R}^2$ η πυκνοτητα της $N_2(\underline{\mu},\Sigma) \equiv N_2(\mu_1,\mu_2|\sigma_1,\sigma_2|\rho)$ παιρνει τη μορφη

$$f_2(x_1,x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 + \left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2 - 2\rho\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)\left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right)\right]\right\},$$

με $x_1,x_2 \in \mathbb{R}$, $\mu_1,\mu_2 \in \mathbb{R}$, $\sigma_1,\sigma_2 > 0$ και $|\rho| \le 1$,

εφοσον για $n=2$,

$$\Sigma^{-1} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{1-\rho^2}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_1^2} & -\frac{\rho}{\sigma_1\sigma_2} \\ -\frac{\rho}{\sigma_1\sigma_2} & \frac{1}{\sigma_2^2} \end{pmatrix}$$



πυκνοτητα της $N_2(\mu_1,\mu_2|\sigma_1,\sigma_2|\rho)$

(6.43) <u>Ασκηση.</u> Δειξτε οτι αν $\binom{X}{Y} \sim N_2(\mu_x,\mu_y|\sigma_x,\sigma_y|\rho)$, εχουμε:

(α) $f_X(x) = \frac{1}{\sigma}\phi\left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\right)$, δηλαδη $X \sim N(\mu_x,\sigma_x^2)$,

(β) $f_Y(y) = \frac{1}{\sigma}\phi\left(\frac{y-\mu_y}{\sigma_y}\right)$, δηλαδη $Y \sim N(\mu_y,\sigma_y^2)$,

και αρα $EX=\mu_x$, $EY=\mu_y$, $\mathcal{D}(X)=\sigma_x^2$, $\mathcal{D}(Y)=\sigma_y^2$.

(γ) $\sigma_{xy} := cov(X,Y) = \rho\sigma_x\sigma_y$ και αρα $\rho(X,Y)=\rho$.

(6.44) <u>Σημ.</u> Στην περιπτωση που $\binom{X}{Y} \sim N_2(\mu_x,\mu_y|\sigma_x,\sigma_y|\rho)$ και $cov(X,Y)=0$, τοτε $\rho=0$ και αρα

$f_2(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$, δηλαδη οι X,Y ειναι ανεξαρτητες.

Αυτη την ιδιοτητα την εχουν οι κανονικες οποιασδηποτε διαστασεως (βλεπε ομως Προταση 6.27) :

αν $cov(X_i,X_j)=0$, $i\neq j$ $\forall i,j=1,\dots,n$, τοτε

$\Sigma = \text{διαγων.}\{\sigma_1^2,\dots,\sigma_n^2\} \Rightarrow \Sigma^{-1} = \text{διαγων.}\left\{\frac{1}{\sigma_1^2},\dots,\frac{1}{\sigma_n^2}\right\}$,

και $|\Sigma|^{1/2} = \sigma_1\cdots\sigma_n$. Αρα,

$f_n(\underline{x}) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sigma_i}\phi\left(\frac{x_i-\mu_i}{\sigma_i}\right) = \prod_{i=1}^n f_{X_i}(x_i)$,

δηλαδη οι $X_1,\dots,X_n$ ειναι ανεξαρτητες.

Μια απο τις πιο πολυχρησιμοποιουμενες δ.τ.μ. στις εφαρμογες ειναι και η ακολουθη διακριτη δ.τ.μ., γενικευση της Διωνυμικης.

(6.45) <u>Παραδειγμα</u>: <u>Πολυωνυμικη</u> $\mathcal{T}(p_1,\dots,p_k|\nu)$, $\nu\in\{1,2,3,\dots\}$, $0\le p_i\le 1$, $i=1,\dots,k$, $\Sigma_{i=1}^k p_i\le 1$. Η σ.μ.π. της κατανομης της Πολυωνυμικης δ.τ.μ. $\underline{X}=(X_1,\dots,X_k)^T\in\mathbb{R}^k$, ειναι η:

$$P(X_1=x_1,\dots,X_k=x_k)=\frac{\nu!}{x_1!\dots x_k!\,x_{k+1}!}\,p_1^{x_1}\cdots p_k^{x_k}\,p_{k+1}^{x_{k+1}} ,$$

για $0\le x_i\le\nu$, $i=1,\dots,k$ με $\Sigma_{i=1}^k x_i\le\nu$.
Εχουμε θεσει $p_{k+1}:=1-\Sigma_{i=1}^k p_i$ και $x_{k+1}:=\nu-\Sigma_{i=1}^k x_i$.

Παρατηρουμε οτι $\mathcal{T}(p_1|\nu)=\mathcal{D}(\nu,p_1)$.

(6.46) <u>Παραδειγμα</u>: Ενα εργοστασιο παραγει ενα προϊον Π. Ενα ποσοστο p της παραγωγης αποτελειται απο "καλα" προϊοντα K, δηλαδη $P(K)=p$ και αρα $P(K^c)=1-p$. Για να ελεγχθη κατα ποσο ενα προϊον ανηκει στο K ή K^c πρεπει αυτο να καταστραφη. Καθε λοιπον προϊον – <u>ανεξαρτητα</u> απο το αν ανηκει στο K ή K^c – ελεγχεται ποιοτικα με πιθανοτητα μονον q (<1 και κατα το δυνατον μικρο). Τα προϊοντα λοιπον χωριζονται επισης σε ελεγμενα E και μη E^c, ανεξαρτητα απο το αν ανηκουν επισης στο K ή το K^c (διπλες δοκιμες Bernoulli). Εχουμε λοιπον τελικα 4 κατηγοριες προϊοντων:
$K_1=K\cap E$, $K_2=K\cap E^c$, $K_3=K^c\cap E$ και $K_4=K^c\cap E^c$.
Εστω οτι την περιοδο που μας ενδιαφερει παραγονται συνολικα n προϊοντα και εστω για $i=1,2,3,4$;
$X_i:=$ αριθμος των προϊοντων απ' τα n που ανηκουν στην K_i .

Προφανως $X_4 = n - \Sigma_{i=1}^{3} X_i$ και αρα η δ.τ.μ. $\underline{X} = (X_1, \dots, X_4)^T$ ακολουθει την 3-διαστατη Πολυωνυμικη κατανομη $\mathcal{T}(p_1, p_2, p_3 \mid n)$, οπου $p_i = P(K_i)$, $i=1,2,3$, δηλαδη (λογω ανεξαρτησιας)
$p_1 = P(K \cap E) = P(K)P(E) = pq$,
$p_2 = P(K \cap E^c) = P(K)P(E^c) = p(1-q)$, και
$p_3 = P(K^c \cap E) = P(K^c)P(E) = (1-p)q$.

Πολλες απο τις μονοδιαστατες κατανομες στους Πινακες 4.37 και 4.63, εχουν ενδιαφερουσες πολυδιαστατες επεκτασεις. Αναφερουμε εδω δυο απο τις ευκολοτερες:

(6.47) n-διαστατη Ομοιομορφη $\mathcal{U}(A, n)$ στο συνολο $A \subseteq \mathbb{R}^n$, με συχνοτητα ή σ.μ.π. $\frac{1}{|A|}$, οπου $|A|$ ειναι ο ογκος του A στην περιπτωση της συνεχους ομοιομορφης, ή ο αριθμος των στοιχειων του A στην περιπτωση της διακριτης (καμμια ουσιαστικη διαφορα με την 4.10).

(6.48) n-διαστατη Βητα $\mathcal{B}(\alpha_1, \dots, \alpha_n; \alpha_{n+1})$, $\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1} > 0$, με πυκνοτητα,

$$f_n(x_1, \dots, x_n) = \frac{\Gamma(\alpha_1 + \dots + \alpha_n + \alpha_{n+1})}{\Gamma(\alpha_1)\cdots\Gamma(\alpha_n)\Gamma(\alpha_{n+1})} x_1^{\alpha_1 - 1} \cdots x_n^{\alpha_n - 1} \left(1 - \sum_{i=1}^{n} x_i\right)^{\alpha_{n+1}-1},$$

για $0 < x_1, \dots, x_n < 1$ και $\Sigma_{i=1}^{n} x_i < 1$.
Αυτη η κατανομη φερει το ονομα του <u>Dirichlet</u> και εχει διαφορες εφαρμογες, οι πιο προσφατες στη στατιστικη συμπερασματολογια κατα Bayes.

Συναρτησεις Τυχαιων Μεταβλητων.

Εστω δ.τ.μ. $\underline{X}$ και συναρτηση $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ τετοια ωστε $g(\underline{X})$ ειναι δ.τ.μ. Η ακολουθη προταση αποτελει επεκταση της (4.65) και γενικευεται κατα προφανη τροπο για $n \geq 3$. Για λογους οικονομιας διατυπωνουμε την προταση στο $\mathbb{R}^2$. Δεν δινουμε την αποδειξη της η οποια ειναι ουσιαστικα αναλογη με την αποδειξη της (4.65).

(6.49) <u>Προταση</u>. Εστω α.σ. δ.τ.μ. $\underline{X} = (X_1, X_2)^T$ με πυκνοτητα $f_{\underline{X}}(\underline{x})$, $\underline{x} = (x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2$. Εστω επισης συναρτησεις $g_1, g_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, τετοιες ωστε:

(α) οι εξισωσεις $\begin{cases} y_1 = g_1(x_1, x_2) \\ y_2 = g_2(x_1, x_2) \end{cases}$ εχουν μοναδικη λυση $\begin{cases} x_1 = h_1(y_1, y_2) \\ x_2 = h_2(y_1, y_2) \end{cases}$,

(β) υπαρχουν οι παραγωγοι $\frac{\partial}{\partial x_j} g_i(x_1, x_2)$ $\forall i, j = 1, 2$ και $\forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$,

(γ) $$J(x_1, x_2) := \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} g_1(x_1, x_2) & \frac{\partial}{\partial x_2} g_1(x_1, x_2) \\ \frac{\partial}{\partial x_1} g_2(x_1, x_2) & \frac{\partial}{\partial x_2} g_2(x_1, x_2) \end{vmatrix} \neq 0 .$$

Τοτε, υπαρχει η πυκνοτητα $f_{\underline{Y}}(\underline{y})$, της δ.τ.μ. $\underline{Y} \equiv (Y_1, Y_2)^T := (g_1(X_1, X_2), g_2(X_1, X_2))^T$ και ειναι η

$$f_{\underline{Y}}(y_1, y_2) = \frac{f_{\underline{X}}(x_1, x_2)}{|J(x_1, x_2)|} \Bigg|_{x_i = h_i(y_1, y_2),\ i = 1, 2} .$$

(6.50) <u>Παραδειγμα</u>. Εστω $(X, Y) \sim f_2(x, y)$, $x, y \in \mathbb{R}$.

Δειξτε οτι:

(α) $f_{X+Y}(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_2(x, z-x)\, dx$, $f_{X-Y}(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_2(x, z+x)\, dx$.

(β) αν X, Y <u>ανεξαρτητες</u>, τοτε παιρνουμε τις συνελιξεις (βλ. και 5.25''):

$$f_{X+Y}(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) f_Y(z-x)\, dx , \quad f_{X-Y}(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) f_Y(z+x)\, dx .$$

Αποδ. Εστω $z \equiv g_1(x,y) := x+y$ και $w \equiv g_2(x,y) := x-y$,
με $x \equiv h_1(z,w) := (z+w)/2$ και $y \equiv h_2(z,w) := (z-w)/2$,
και ορίζουσα της Ιακωβιανής, $J(x,y) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2$.
Αρα η δ.τ.μ. $(Z,W) := (X+Y, X-Y)$ έχει συχνότητα:
$f_{(Z,W)}(z,w) = \frac{1}{|-2|} f_2\left(\frac{z+w}{2}, \frac{z-w}{2}\right)$. Τότε,

$$f_{X+Y}(z) = f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{(Z,W)}(z,w)\,dw = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} f_2\left(\frac{z+w}{2}, \frac{z-w}{2}\right) dw =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f_2(x, z-x)\,dx \quad \text{, όπου θέσαμε } x := (z+w)/2 .$$

Επίσης,

$$f_{X-Y}(w) = f_W(w) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{(Z,W)}(z,w)\,dz = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} f_2\left(\frac{z+w}{2}, \frac{z-w}{2}\right) dw =$$

$$= -\int_{+\infty}^{-\infty} f_2(z-y, y)\,dy = \int_{-\infty}^{+\infty} f_2(z-y,y)\,dy \quad \text{, όπου } y := (z-w)/2 .$$

(6.51) Παράδειγμα. Εστω $X \sim N(0,1)$, $Y \sim \chi^2_\nu$ και X, Y ανεξάρτητες.
Δείξτε ότι $Z := X/(Y/\nu)^{1/2} \sim t_\nu$.
Αποδ. Εστω η βοηθητική τ.μ. $W := (Y/\nu)^{1/2}$.
Τότε, $X = ZW$ και $Y = \nu W^2$. Η ορίζουσα της Ιακωβιανής είναι:

$$|J| = \begin{vmatrix} (\nu/y)^{1/2} & -\frac{\sqrt{\nu}}{2} x\, y^{-3/2} \\ 0 & \frac{1}{2}(\nu y)^{-1/2} \end{vmatrix} = \frac{1}{2y} = \frac{1}{2\nu w^2} .$$

Αρα,

$$f_{Z,W}(z,w) = 2\nu\, w^2\, \phi(zw) \frac{1}{2^{\nu/2}\Gamma(\frac{\nu}{2})} (\nu w^2)^{\nu/2 - 1} e^{-\nu w^2/2}$$

$$= \frac{2\,\nu^{\frac{\nu}{2}}}{2^{\nu/2}\Gamma(\frac{\nu}{2})\sqrt{2\pi}}\; w^\nu \exp\left\{-\frac{1}{2}(\nu+z^2)w^2\right\} \quad , z \in \mathbb{R},\ w>0.$$

Αρα, $f_Z(z) = \int_0^\infty f_{Z,W}(z,w)\,dw = \left(\text{θέτουμε } \xi := \sqrt{(\nu+z^2)/2}\ w\right)$

$$= \frac{\left(1+\frac{z^2}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}}}{\sqrt{\nu\pi}\,\Gamma(\frac{\nu}{2})}\, 2\int_0^\infty \xi^\nu e^{-\xi^2} d\xi .$$

Αλλα, θετοντας $\zeta := \xi^2$, εχουμε

$$2\int_0^\infty \xi^\nu e^{-\xi^2} d\xi = \int_0^\infty \zeta^{\frac{\nu+1}{2}-1} e^{-\zeta} d\zeta = \Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right).$$

Αρα,

$$f_Z(z) = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\sqrt{\nu\pi}\,\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \left(1+\frac{z^2}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}},$$

$$= \left[\sqrt{\nu}\,B\left(\tfrac{1}{2},\tfrac{\nu}{2}\right)\right]^{-1}\left(1+\frac{z^2}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}}, \quad z\in\mathbb{R},$$

δηλαδη (βλ. 4.59) $Z \sim t_\nu$.

(6.52) Σημ. Εστω $X_1,\dots,X_n$ ανεξ. και ισονομες $N(0,1)$.
Τοτε, $\bar X := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i \sim N(0,\frac{1}{n})$ (βλ. 6.27(β)) $\Rightarrow \sqrt{n}\,\bar X \sim N(0,1)$.
Επισης, $n S^2 := \sum_{i=1}^n X_i^2 \sim \chi^2_n$ (βλ. 6.27(γ)).
Αρα, απο την (6.52), $\frac{\sqrt{n}\,\bar X}{S} \overset{\mathcal{D}}{=} \frac{N(0,1)}{\sqrt{\chi^2_n/n}} \overset{\mathcal{D}}{=} t_n$.
Η ανεξαρτησια των $\bar X$, S^2 ειναι καπως δυσκολο να δειχθη εδω.
Αυτη η σχεση ειναι ο λογος που η t_ν χρησιμοποιειται ευρυτατα στη στατιστικη αναλυση κανονικων δειγματων – ειναι βασικα ο κυριος λογος υπαρξεως για την t_ν.
Απο παρομοιους λογους αφορεα και η χρησιμοτητα της κατανομης $\mathcal{F}_{k,\nu}$ (βλ. 4.62), οπως διαφαινεται απο την ακολουθη ασκηση.

(6.53) <u>Ασκηση</u>. Εστω $X\sim\chi^2_k$, $Y\sim\chi^2_\nu$ και X, Y <u>ανεξαρτητες</u>.
Δειξτε οτι η $Z := \frac{\nu}{k}\frac{X}{Y} \sim \mathcal{F}_{k,\nu}$ (βλ. 4.62).
(<u>Υποδ.</u> Χρησιμοποιειστε τη βοηθητικη τ.μ. $W\equiv Y$, βρειτε την συνκυοτητα της δ.τ.μ. (Z,W) και μετα υπολογιστε την περιθωρια της Z.)

(6.54) <u>Ασκηση</u>. Εστω $X\sim\mathcal{G}(\alpha,\lambda)$, $Y\sim\mathcal{G}(\beta,\lambda)$ και X, Y <u>ανεξαρτητες</u>.
Δειξτε οτι η τ.μ. $Z := \frac{X}{X+Y} \sim \mathcal{B}(\alpha,\beta)$.

7. ΔΕΣΜΕΥΜΕΝΕΣ Τ.Μ. ΚΑΙ ΚΑΤΑΝΟΜΕΣ.

Εστω Y η αποδοση, σε κιλα, ενος σιταγρου 30 στρεμ. και X η ποσοτητα, σε κιλα, λιπασματος που χρησιμοποιειται. Μια απο της πιο σπουδαιες χρησεις της συνκατανομης των (X, Y) ειναι προφανως η προβλεψη της αποδοσης Y δεδομενου οτι χρησιμοποιηθηκε ποσοτητα $X = x$ (= 100 κιλα, ας πουμε) λιπασμα. Μας ενδιαφερουν λοιπον, σ' αυτο το κεφαλαιο, συναρτησεις της μορφης $F_{Y|X}(y|x) = P(Y \leq y \mid X = x)$ και $E(Y|X=x)$, δηλαδη δεσμευμενες σ.κ., δεσμευμενες πυκνοτητες, δεσμευμενες μεσες τιμες κ.τ.λ.

(7.1) Ορισμος: Εστω διακριτη δ.τ.μ. $\underline{Z} := (\underline{X}, \underline{Y})$ με συνκατανομη $P_n(\underline{z}) = p_n(\underline{x}, \underline{y})$, $(\underline{x}, \underline{y}) \in \mathbb{R}^n$. Οριζουμε τις ακολουθες συναρτησεις:

(α) Δεσμευμενη σ.μ.π. ή σ.μ.π. υποσυνθηκες:

$$p(\underline{y}|\underline{x}) \equiv p_{\underline{Y}|\underline{X}}(\underline{y}|\underline{x}) := P(\underline{Y} = \underline{y} \mid \underline{X} = \underline{x})$$

$$= \frac{P(\underline{X}=\underline{x}, \underline{Y}=\underline{y})}{P(\underline{X}=\underline{x})} = \frac{P_n(\underline{x},\underline{y})}{\sum_{\underline{y}} P_n(\underline{x},\underline{y})}$$

$$= \frac{P_n(\underline{x};\underline{y})}{P_{\underline{X}}(\underline{x})}, \text{ εφοσον } p_{\underline{X}}(\underline{x}) = P(\underline{X}=\underline{x}) \neq 0.$$

(β) Δεσμευμενη σ.κ. ή σ.κ. υπο συνθηκες:

$$F(\underline{y}|\underline{x}) \equiv F_{\underline{Y}|\underline{X}}(\underline{y}|\underline{x}) := P(\underline{Y} \leq \underline{y} \mid \underline{X} = \underline{x})$$

$$= \frac{P\left(\bigcup_{\underline{y}' \leq \underline{y}} \{(\underline{Y}=\underline{y}') \cap (\underline{X}=\underline{x})\}\right)}{P(\underline{X}=\underline{x})} =$$

$$= \sum_{\underline{y}' \leq \underline{y}} \frac{P(\underline{Y}=\underline{y}', \underline{X}=\underline{x})}{P(\underline{X}=\underline{x})} =$$

$$= \sum_{\underline{y}' \leq \underline{y}} p(\underline{y}'|\underline{x}), \text{ εφοσον } p_{\underline{X}}(\underline{x}) \neq 0.$$

Παρατηρούμε ότι: $p(\underline{y}|\underline{x}) \geq 0$,

και $\Sigma_{\underline{y}}\, p(\underline{y}|\underline{x}) = \Sigma_{\underline{y}}\, P(\underline{Y}=\underline{y}\,|\,\underline{X}=\underline{x}) = \dfrac{\Sigma_{\underline{y}} P(\underline{X}=\underline{x}, \underline{Y}=\underline{y})}{P(\underline{X}=\underline{x})} =$

$= \dfrac{P(\underline{X}=\underline{x})}{P(\underline{X}=\underline{x})} = 1$,

δηλαδή, $\forall \underline{x} : p_{\underline{X}}(\underline{x}) \neq 0$, $p(\underline{y}|\underline{x})$, $\underline{y} \in S_{(\underline{X},\underline{Y})}$ είναι μια σ.μ.π. Μπορούμε λοιπόν να ορίσουμε, ως προς αυτή τη σ.μ.π. μέση τιμή, διασπορά, ροπές, ροπογεννήτρια κ.τ.λ., όπως και για τις αδέσμευτες κατανομές.

Για απλούστευση του συμβολισμού θα θεωρούμε στα παρακάτω τις τ.μ. X, Y μονοδιάστατες. Η γενίκευση των ορισμών για δ.τ.μ. είναι συνήθως άμεση και προφανής και πάντα ανάλογη προς τις αντίστοιχες γενικεύσεις των αδέσμευτων τ.μ. και κατανομών.

(7.2) Ορισμός. Έστω διακριτή δ.τ.μ. $(X,Y) \in \mathbb{R}^2$. Η συνάρτηση

$$\mu(x) \equiv E(Y|X=x) := \Sigma_y\, y\, p(y|x) \quad \forall x : p_X(x) \neq 0,$$

καλείται δεσμευμένη (ή υπό συνθήκες) μέση τιμή της Y όταν $X=x$, εφόσον υπάρχει, δηλαδή $\Sigma_y |y| p(y|x) < +\infty$.

Δηλαδή σαν δεσμευμένη μέση τιμή ορίζεται η μέση τιμή της δεσμευμένης κατανομής. Η ροπογεννήτρια και ροπές τάξεως k (όταν υπάρχουν) ορίζονται ανάλογα. Για παράδειγμα σαν δεσμευμένη διασπορά ορίζεται η διασπορά της δεσμευμένης κατανομής: $\forall x : p_X(x) \neq 0$ ως:

$$\text{(7.3)} \quad \sigma^2(x) \equiv \mathcal{D}(Y|X=x) := E\{[Y - E(Y|X=x)]^2 \,|\, X=x\}$$

$$= \Sigma_y (y-\mu(x))^2 p(y|x) = E(Y^2|X=x) - [E(Y|X=x)]^2 \quad \text{(άσκηση!)}$$

Εξαιρετικά χρήσιμη στις εφαρμογές είναι και η ακόλουθη μορφή του τύπου της ολικής πιθανότητος:

$$\text{(7.4)} \quad p_Y(y) = \Sigma_x\, p_2(x,y) = \Sigma_x\, p(y|x)\, p_X(x) \quad ; \text{εφόσον } p_X(x) \neq 0.$$

Επίσης, όπως θα περίμενε κανείς, $\forall x : p_X(x) \neq 0$

(7.5) $$p(y|x) = \frac{P(X=x, Y=y)}{P(X=x)} = \frac{P(X=x)\,P(Y=y)}{P(X=x)} = p_Y(y),$$

αν οι X, Y είναι <u>ανεξάρτητες</u>, και άρα έχουμε επίσης ότι $F(y|x) = F_Y(y)$ και $E(Y|X=x) = EY$, κ.λ.π..

(7.6) <u>Παράδειγμα</u>: Έστω τ.μ. $X \sim \mathcal{P}oisson(\lambda)$ και $Y \sim \mathcal{P}oisson(\mu)$ και έστω ότι οι X, Y είναι <u>ανεξάρτητες</u>. Αν $Z := X+Y$, δείξτε ότι $X \mid Z=X+Y=z \sim \mathcal{B}(z, p := \frac{\lambda}{\lambda+\mu})$, $z=0,1,2,\dots$, δηλαδή, $p(x|z) = \binom{z}{x} p^x (1-p)^{z-x}$, $x=0,1,2,\dots,z$.

<u>Αποδ.</u> Από το Παράδειγμα (6.25^v) έχουμε ότι $Z=X+Y \sim \mathcal{P}(\lambda+\mu)$.

Τότε, $$p(x|z) = P(X=x \mid X+Y=z) = \frac{P(X=x, X+Y=z)}{P(X+Y=z)} =$$

$$= \frac{P(X=x, Y=z-x)}{P(Z=z)} = \frac{P(X=x)\,P(Y=z-x)}{P(Z=z)} =$$

$$= \frac{\dfrac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}\,\dfrac{e^{-\mu}\mu^{z-x}}{(z-x)!}}{\dfrac{e^{-(\lambda+\mu)}(\lambda+\mu)^z}{z!}} = \binom{z}{x}\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^x\left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^{z-x} = \binom{z}{x} p^x (1-p)^{z-x}.$$

(Στο Παράδειγμα (6.23') ασχοληθήκαμε με ένα είδος αντίστροφου του (7.6)).

Έχουμε λοιπόν εδώ ότι:

$$F(x|z) = \sum_{x'=0}^{x} \binom{z}{x'} p^{x'} (1-p)^{z-x'}, \quad x=0,1,\dots,z,$$

και

$$\mu(z) = E(X|Z=z) = zp \left(= \sum_{x=0}^{z} x\,p(x|z)\right), \quad z=0,1,2,\dots,$$

$$\sigma^2(z) = \mathcal{D}(X|Z=z) = zp(1-p) \left(= \sum_{x=0}^{z} (x-\mu(z))^2 p(x|z)\right), \quad z=0,1,2,\dots.$$

Παρατηρούμε ότι αν $\mu(x) = E(Y|X=x)$, $x \in S_X$, η $\mu(X)$ είναι η ίδια επίσης τυχαία μεταβλητή.

(7.7) <u>Ορισμός</u>: Έστω τ.μ. X, Y και έστω ότι $\forall x : p_X(x) \neq 0$ ορίζεται η $\mu(x) := E(Y|X=x)$. Τότε ορίζουμε την <u>τυχαία μεταβλητή</u>

$E(Y|X) := \mu(X)$,

σαν την <u>δεσμευμένη μέση τιμή της Y δεδομένης X</u> (χωρίς να δεσμεύουμε την X σε καθοιο συγκεκριμένο $x \in S_X$).

Ανάλογα ορίζουμε τις <u>τυχαίες μεταβλητές</u> της δεσμευμένης ροπογεννήτριας και δεσμευμένων ροπών τάξεως κ, π.χ.,

(7.8) $\mathcal{D}(Y|X) := \sigma^2(X)$,

όπου $\sigma^2(x) := \mathcal{D}(Y|X=x)$, $x \in S_X$.

Στην περίπτωση του Παραδείγματος (7.6), βρήκαμε ότι $\mu(z) = E(X|Z=z) = pz$ και $\sigma^2(z) = \mathcal{D}(X|Z=z) = = p(1-p)z$. Άρα,

$E(X|Z) = \mu(Z) = pZ$, και

$\mathcal{D}(X|Z) = \sigma^2(Z) = p(1-p)Z$.

Παρατηρούμε ότι: $E(E(X|Z)) = E\mu(Z) = E(pZ) = pEZ = p(\lambda+\mu) = \lambda = EX$. Αυτή η σχέση ισχύει γενικότερα:

(7.9) <u>Πρόταση</u>: Έστω τ.μ. X, Y, με $\mu(X)$ καλά ορισμένη τ.μ.. Τότε, $E[E(Y|X)] = EY$.

<u>Αποδ.</u> $E(E(Y|X)) = E\mu(X) = \sum_x \mu(x) p_X(x) =$

$= \sum_x \left[\sum_y y\, p(y|x)\right] p_X(x) = \sum_x \sum_y y\, p(y|x) p_X(x) =$

$= \sum_x \sum_y y\, p_2(x,y) = \sum_y y \left(\sum_x p_2(x,y)\right) = \sum_y y\, p_Y(y) = EY$.

Η Πρόταση (7.9) είναι εξαιρετικά χρήσιμη στη Θεωρία και τις εφαρμογές, είναι δε ένα ισχυρό εργαλείο για να υπολογίζουμε δύσκολες μέσες τιμές.

(7.10) <u>Παράδειγμα</u>: Έστω $X_1, \ldots, X_N$ α.ι. $\mathcal{D}(m,p)$ και $N \sim \text{Poisson}(\lambda)$ ανεξάρτητη των άλλων. Υπολογίστε τη

$E\{\Sigma_{i=1}^{N} X_i\}$.

<u>Λυση</u>. $\mu(n) = E(\Sigma_{i=1}^{N} X_i \mid N=n) = E\{\Sigma_{i=1}^{n} X_i\} =$
$= \Sigma_{i=1}^{n} EX_i = mpn \Rightarrow$
$\Rightarrow \mu(N) = mpN \Rightarrow$
$\Rightarrow E\{\Sigma_{i=1}^{N} X_i\} = E[E(\Sigma_{i=1}^{N} X_i \mid N)] = E\mu(N) = mpEN = mp\lambda$.

Για τη δεσμευμενη διασπορα εχουμε το εξης αντιστοιχο αποτελεσμα.

(7.11) <u>Προταση</u>. Εστω τ.μ. X, Y με $\sigma^2(X)$ καλα ορισμενη τ.μ.. Τοτε,

$$\mathcal{D}(Y) = E\{\mathcal{D}(Y|X)\} + \mathcal{D}\{E(Y|X)\}$$
$$= E\{\sigma^2(X)\} + \mathcal{D}\{\mu(X)\}.$$

<u>Αποδ.</u> $E\{\mathcal{D}(Y|X)\} = E\{E(Y^2|X) - [E(Y|X)]^2\} =$
$= E\{E(Y^2|X)\} - E\{[E(Y|X)]^2\} = EY^2 - E\{[E(Y|X)]^2\} =$
$= \mathcal{D}(Y) - \{E[E(Y|X)]^2 - [E(E(Y|X))]^2\} =$
$= \mathcal{D}(Y) - \mathcal{D}(E(Y|X))$.

Στην περιπτωση του παραδειγματος (7.6) βρηκαμε $\mu(Z) = pZ$ και $\sigma^2(Z) = p(1-p)Z$ και εχουμε:
$E\{\sigma^2(Z)\} = p(1-p)EZ = p(1-p)(\lambda+\mu)$, καθως επισης και
$\mathcal{D}(\mu(Z)) = \mathcal{D}(pZ) = p^2\mathcal{D}(Z) = p^2(\lambda+\mu)$. Παρατηρουμε δε οτι:
$E\{\sigma^2(Z)\} + \mathcal{D}(\mu(Z)) = [p(1-p)+p^2](\lambda+\mu) = p(\lambda+\mu) = \lambda = \mathcal{D}(X)$.

(7.12) <u>Ασκηση</u>. Βρητε τη $\mathcal{D}(\Sigma_{i=1}^{N} X_i)$, οπου $X_1, \dots, X_N$ ειναι α.ι. $\mathcal{D}(m,p)$ και $N \sim \mathcal{P}oisson(\lambda)$ ανεξαρτητη των αλλων.

Μια απο τις σπουδαιοτερες θεωρητικες χρησεις της (7.9), ειναι η χρησιμοποιηση της για τον αυστηρο ορισμο της $E(Y|X)$ για συνεχεις τ.μ. και μεσω αυτης για τον ορισμο της δεσμευμενης σ.κ., πυκνοτητας, κ.τ.λ..
Θα παρακαμψουμε εδω αυτο το λεπτο θεωρητικο σημειο και θα δωσουμε τους αντιστοιχους ορισμους κατ' αναλογια προς τις διακριτες τ.μ., θα τους δικαιολογισουμε δε ευρισικα.

(7.13) Ορισμος. Εστω α. συνεχεις τ.μ. X, Y με πυκνοτητα συγκατανομης $f_2(x,y)$, $x,y\in\mathbb{R}$. Η δεσμευμενη (ή υποσυνθηκες) πυκνοτητα της Y δεδομενου οτι $X=x$, οριζεται ως:

$$f(y|x) \equiv f_{Y|X}(y|x) := \frac{f_2(x,y)}{f_X(x)} \quad , \text{ εφοσον } f_X(x)\neq 0 .$$

Παρατηρουμε οτι: $f(y|x) \geq 0$, και

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(y|x)\,dx = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} f_2(x,y)\,dy}{f_X(x)} = \frac{f_X(x)}{f_X(x)} = 1 ,$$

δηλαδη $\forall x : f_X(x)\neq 0$ $f(y|x)$, $y\in S_{(x,y)}$ ειναι μια πυκνοτητα κατανομης, μπορουμε λοιπον να ορισουμε βασα αυτης δεσμευμενη σ.κ., ροπογεννητρια, ροπες κ.τ.λ., οπως και στην περιπτωση των διακριτων τ.μ..

(7.14) Ορισμος. Εστω α. συνεχεις τ.μ. X, Y με πυκνοτητα συγκατανομης $f_2(x,y)$, $x,y\in\mathbb{R}$. Οριζουμε τις ακολουθες συναρτησεις:

(α) δεσμευμενη (ή υποσυνθηκες) σ.κ.:

$$F(y|x) \equiv F_{Y|X}(y|x) := \int_{-\infty}^{y} f(y'|x)\,dy' \quad , \text{εφοσον } f_X(x)\neq 0 .$$

(β) δεσμευμενη (ή υπο συνθηκες) μεση τιμη:

$$\mu(x) \equiv E(Y|X=x) := \int_{-\infty}^{+\infty} y\, f(y|x)\,dy \quad , \text{ εφοσον } f_X(x)\neq 0 ,$$

και $\int^{+\infty}$ [illegible]

Αναλογα ορίζονται οι δεσμευμενες ροπες ταξεως κ, ως ροπες ταξεως κ της δεσμευμενης κατανομης. Για παραδειγμα η <u>δεσμευμενη διασπορα</u> ορίζεται $\forall x : f_X(x) \neq 0$ ως

$$\sigma^2(x) \equiv \mathcal{D}(Y|X=x) := \int_{-\infty}^{+\infty} \left[y - E(Y|X=x)\right]^2 f(y|x)\, dy =$$
$$= E(Y^2|X=x) - \left[E(Y|X=x)\right]^2 . \quad (\text{ασκηση!})$$

Για τη δημιουργια διαισθητικης υποδομης θα δωσουμε μια ευρισικη δικαιολογηση των Ορισμων (7.13) και (7.14(α)) απο τους οποιους επονται οι αλλοι κατα φυσικο τροπο. Το κυριο προβλημα εδω, που δεν υπηρχε στους αντιστοιχους ορισμους για διακριτες τ.μ., ειναι οτι η συνθηκη $X=x$ της δεσμευμενης κατανομης εχει $P(X=x)=0$, εφοσον η τ.μ. X ειναι συνεχης. Ομως σε καθε πρακτικο αποτελεσμα $\omega \in \Omega$, καποιο $x = X(\omega)$ συμβαινει και βασει αυτου θελουμε να μελετησουμε (προβλεψουμε) την συμπεριφορα της τ.μ. Y. Ξεπερνουμε σε ευρισικο επιπεδο το οτι $P(X=x)=0$ ως εξης: $\forall \varepsilon > 0$, $y \in \mathbb{R}$ εχουμε: $\forall x : f_X(x) \neq 0$,

$$P(Y \le y \mid x < X \le x+\varepsilon) = \frac{P(-\infty < Y \le y,\ x < X \le x+\varepsilon)}{P(x < X \le x+\varepsilon)} =$$

$$= \frac{F_2(x+\varepsilon, y) - F_2(x,y) - F_2(x+\varepsilon, -\infty) + F_2(x, -\infty)}{F_X(x+\varepsilon) - F_X(x)}$$

$$= \frac{\varepsilon^{-1}\left[F_2(x+\varepsilon, y) - F_2(x,y)\right]}{\varepsilon^{-1}\left[F_X(x+\varepsilon) - F_X(x)\right]} \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} \frac{\frac{\partial}{\partial x} F_2(x,y)}{f_X(x)} =$$

$$= \frac{\frac{\partial}{\partial x} \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f_2(x', y')\, dx' dy'}{f_X(x)} = \frac{\int_{-\infty}^{y} f_2(x, y')\, dy'}{f_X(x)} =$$

$$= \int_{-\infty}^{y} \frac{f_2(x,y')}{f_X(x)}\, dy'$$

δηλαδη,

$$F(y|x) \equiv P(Y\le y \mid X=x) := \lim_{\varepsilon\to 0} P(Y\le y \mid x<X\le x+\varepsilon)$$

$$= \int_{-\infty}^{y} \frac{f_2(x,y')}{f_X(x)}\, dy' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(y|x) := \frac{\partial}{\partial y} F(y|x) = \frac{f_2(x,y)}{f_X(x)},$$

που ειναι ο ορισμος της δεσμευμενης πυκνοτητας, τον οποιον δωσαμε καθως αυθαιρετα (αλλα αναλογα προς τις διακριτες τ.μ.) στην (7.13).

(7.15) Παραδειγμα. Εστω τ.μ. $(X,Y) \sim f_2(x,y) = y^{-1} e^{-y - x/y} 1(x,y>0)$.

Βρητε: $f_Y(y)$, $f_{X|Y}$, $F_{X|Y}$, $P(X>1 \mid Y=y)$, $E(X|Y=y)$, $y>0$.

Λυση. $f_Y(y) = \int_0^{\infty} y^{-1} e^{-y} e^{-x/y}\, dx = e^{-y}$, δηλαδη $Y \sim \mathcal{E}(\lambda=1)$,

$f_{X|Y}(x|y) = f_2(x,y)/f_Y(y) = \frac{1}{y} e^{-x/y}$, δηλαδη $X \mid Y=y \sim \mathcal{E}(\lambda=\frac{1}{y})$

$F_{X|Y}(x|y) = \int_0^x f(x'|y)\, dx' = \int_0^x \frac{1}{y} e^{-x'/y} dx' = 1 - e^{-x/y}$.

$E(X|Y=y) = \frac{1}{\lambda} = y$

$P(X>1 \mid Y=y) = 1 - P(X\le 1 \mid Y=y) = 1 - F(1|y) = e^{-1/y}$.

Εξαιρετικα χρησιμοι στις εφαρμογες ειναι και οι εξης μορφες του τυπου της ολικης πιθανοτητος: $(X,Y) \sim f_2(x,y)$, $x,y \in \mathbb{R}$:

(7.16) $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_2(x,y)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y|x) f_X(x)\, dx$,

(7.17) $$P((X,Y)\in B) = \iint_B f_2(x,y)\,dx\,dy = \int_{\mathbb{R}} \left[\int_{B_x} f(y|x)\, dy\right] f_X(x)\,dx$$
$$= \int_{\mathbb{R}} P((x,Y)\in B \mid X=x) f_X(x)\, dx$$
$$= \int_{\mathbb{R}} P((X,Y)\in B \mid X=x) f_X(x)\, dx,$$

οπου $B \subseteq \mathbb{R}^2 : \{\omega : (X(\omega),Y(\omega))\in B\} \in \mathcal{A}$, $B_x := (\{x\}\times\mathbb{R})\cap B$,

καθως επισης και ο τυπος του Bayes:

(7.18) $$f(x|y) = \frac{f_2(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{f(y|x) f_X(x)}{\int_{-\infty}^{+\infty} f(y|x') f_X(x')\, dx'}, \quad x,y\in\mathbb{R},$$

οπου η $f_X(\cdot)$ λεγεται "a priori" (ή prior) κατανομη της τ.μ. X και η $f(\cdot|y)$ "<u>a posteriori</u>" (ή posterior) <u>κατανομή</u> της X αφού το $Y=y$ παρατηρήθη.

Παρατηρούμε επίσης ότι αν X, Y <u>ανεξάρτητες</u> τότε

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f_Z(x,y)}{f_X(x)} = \frac{f_X(x)f_Y(y)}{f_X(x)} = f_Y(y)$$ και άρα έχουμε

επίσης $F_{Y|X}(y|x) = F_Y(y)$ και $E(Y|X=x) = EY$, κ.λ.π.

(7.19) <u>Παράδειγμα</u>: Έστω $X \sim \mathcal{G}(\alpha,\lambda)$, $Y \sim \mathcal{G}(\beta,\lambda)$ και X, Y ανεξάρτητες. Δείξτε ότι $Z := \frac{X}{X+Y} \sim \mathcal{B}(\alpha,\beta)$. (βλ. και Άσκηση 6.54)

<u>Αποδ.</u> Έστω $S := X+Y \sim \mathcal{G}(\alpha+\beta, \lambda)$ (βλ. 6.25^{VI})

$$F_Z(z) = P\left(\frac{X}{X+Y} \le z\right) = \int_0^\infty P\left(\frac{X}{X+Y} \le z \,\middle|\, X+Y=s\right) f_{X+Y}(s)\,ds =$$
$$= \int_0^\infty P(X \le sz \mid S=s) f_S(s)\,ds$$
$$= \int_0^\infty F_{X|S}(sz|s) f_S(s)\,ds = \int_0^\infty \int_0^{sz} f_{X|S}(x'|s)\,dx'\, f_S(s)\,ds$$
$$\Rightarrow f_Z(z) = \frac{d}{dz}F_Z(z) = \int_0^\infty s f_{X|S}(sz|s) f_S(s)\,ds = \int_0^\infty s f_{X,S}(sz,s)\,ds\,.$$

Αρκεί λοιπόν να βρούμε τη πυκνότητα συνκατανομής των X, S:

$$F_{X,S}(x,s) = P(X \le x, X+Y \le s) = \int_0^x P(X+Y \le s \mid X=x') f_X(x')\,dx' =$$
$$= \int_0^x P(Y \le s-x' \mid X=x') f_X(x')\,dx'$$, και επειδή X, Y ανεξάρτητες
$$= \int_0^x F_Y(s-x') f_X(x')\,dx' \Rightarrow$$
$$\Rightarrow f_{X,S}(x,s) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial s} F_{X,S}(x,s) = \frac{\partial}{\partial s}\{F_Y(s-x)f_X(x)\} = f_Y(s-x)f_X(x)\,.$$

Άρα $f_Z(z) = \int_0^\infty s f_X(sz) f_Y(s-sz)\,ds =$

$$= \frac{\lambda^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^\infty s\,(sz)^{\alpha-1} e^{-\lambda sz} (s-sz)^{\beta-1} e^{-\lambda(s-sz)}\,ds$$

$$= \frac{\lambda^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} z^{\alpha-1}(1-z)^{\beta-1} \int_0^\infty s^{\alpha+\beta-1} e^{-\lambda s}\,ds = (\text{θέσε } \xi = \lambda s)$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} z^{\alpha-1}(1-z)^{\beta-1} \int_0^\infty \xi^{\alpha+\beta-1} e^{-\xi}\,d\xi =$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} z^{\alpha-1}(1-z)^{\beta-1}, \quad z \in (0,1)\,.$$

(7.20) <u>Άσκηση</u>. Επανάλαβε το Παραδ. (6.50) χρησιμοποιώντας την (7.17).

(7.21) <u>Παραδειγμα</u>. Μια ασφαλιστικη εταιρεια χρησιμοποιει την $W(\alpha, \zeta)$, με $\alpha > 1$ δεδομενο, σαν το μοντελο της διαρκειας ζωης T των πελατων της, που εχουν επικινδυνα επαγγελματα. Η εταιρεια δεν εχει πολυ πειρα (δειγματα) σ' αυτου του ειδους τις ασφαλειες και δεν μπορει να εκτιμηση καλα το ζ της Weibull. Ετσι δεχεται, στην αρχη τουλαχιστον, οτι το ζ δεν ειναι πολυ μακρυα απο την αντιστοιχη παραμετρο λ του γενικου πληθυσμου, και μαλιστα για λογους συντηρητικοτητας δεχεται "a priori" οτι το ζ ειναι συν ουσια τ.μ. $Z \sim \mathcal{E}(\lambda)$ δηλαδη εχει το λ^{-1} του γενικου πληθυσμου αλλως σαν μεση τιμη. Εχουμε δηλαδη οτι $f_{T|Z}(t|\zeta) = \alpha\zeta t^{\alpha-1} e^{-\zeta t^{\alpha}} 1(t>0)$ και "a priori" $f_Z(\zeta) = \lambda e^{-\lambda\zeta} 1(\zeta>0)$.

Καθως πειρα αποκτααται, δηλαδη ερχονται ανεξαρτητες παρατηρησεις $T_1 = t_1, \ldots, T_n = t_n$, ο στατιστικος της εταιρειας θελει να βελτιωση την εκτιμηση της αγνωστης παραμετρου της Weibull, δηλαδη να την εκτιμηση με το αντιστροφο της μεσης τιμης της "a posteriori" κατανομης της $Z \,/\, T_1 = t_1, \ldots, T_n = t_n$: $\hat{\zeta} := \{E(Z \,|\, T_1 = t_1, \ldots, T_n = t_n)\}^{-1}$. Βρητε την $\hat{\zeta}$.

<u>Λυση</u>: $f_{\underline{T}|Z}(t_1,\ldots,t_n|\zeta) = \prod_{i=1}^{n} f_{T_i|Z}(t_i|\zeta) =$

$$= \alpha^n \zeta^n \, t_1^{\alpha-1} \cdots t_n^{\alpha-1} \exp\{-\zeta \, \Sigma_{i=1}^n t_i^{\alpha}\} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow f_{\underline{T},Z}(\underline{t},\zeta) = f_{\underline{T}|Z}(\underline{t}|\zeta) \, f_Z(\zeta) =$$

$$= \lambda \alpha^n \zeta^n \left(\prod_{i=1}^n t_i\right)^{\alpha-1} \exp\left\{-\zeta\left[\Sigma_{i=1}^n t_i^{\alpha} + \lambda\right]\right\}$$

$$\Rightarrow f_{\underline{T}}(\underline{t}) = \int_0^{\infty} f_{\underline{T},Z}(\underline{t},\zeta)\, d\zeta =$$

$$= \lambda \alpha^n \left(\prod_{i=1}^n \tau_i\right)^{\alpha-1} \int_0^\infty \zeta^n \exp\{-(\lambda+\sum_{i=1}^n \tau_i^\alpha)\zeta\}\, d\zeta$$

$$= \lambda \alpha^n \left(\prod_{i=1}^n \tau_i\right)^{\alpha-1} \left(\lambda+\sum_{i=1}^n \tau_i^\alpha\right)^{-(n+1)} \Gamma(n+1)$$

$$\Rightarrow f_{Z|\underline{T}}(\zeta|\underline{t}) = \frac{f_{\underline{T},Z}(\underline{t},\zeta)}{f_{\underline{T}}(\underline{t})} = \frac{(\lambda+\sum_{i=1}^n t_i^\alpha)^{n+1}}{\Gamma(n+1)} \zeta^n \exp\{-(\lambda+\sum_{i=1}^n t_i^\alpha)\zeta\},$$

δηλαδη, $Z \mid \underline{T}=\underline{t} \sim \mathcal{G}(n+1, \lambda+\sum_{i=1}^n t_i^\alpha) \Rightarrow$

$$\Rightarrow E(Z \mid \underline{T}=\underline{t}) = \frac{\Gamma(n+2)}{\Gamma(n+1)\,(\lambda+\sum_{i=1}^n t_i^\alpha)} = \frac{n+1}{\lambda+\sum_{i=1}^n t_i^\alpha}$$

$$\Rightarrow \hat{\zeta} := \{E(Z \mid \underline{T}=\underline{t})\}^{-1} = \frac{1}{n+1}\lambda + \left(1-\frac{1}{n+1}\right)\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n t_i^\alpha .$$

(7.22) <u>Ασκηση</u>. Εστω $Z \mid Y=y \sim \mathcal{G}(n, y)$ και $Y \sim \mathcal{E}(\lambda)$. Δειξτε οτι,

(α) $Y \mid Z=z \sim \mathcal{G}(n+1, \lambda+z)$,

(β) $E(Y \mid Z=z) = \left(\frac{\lambda+z}{n+1}\right)^{-1}$.

Σε μερικες εφαρμογες χρειαζεται να εργασθουμε με δ.τ.μ. (X,Y) οπου η μια απ' τις δυο ειναι διακριτη και η αλλη α. συνεχης. Διδουμε ενα τετοιο παραδειγμα.

(7.23) <u>Παραδειγμα.</u> Εστω $X \mid \Lambda=\lambda \sim \text{Poisson}(\lambda)$, και εστω οτι η "a priori" κατανομη της Λ ειναι: $\Lambda \sim \mathcal{G}(\alpha, \mu)$. Δειξτε οτι η "a posteriori" κατανομη της $\Lambda \mid X=x$ ειναι η $\mathcal{G}(\alpha+x, \mu+1)$.

<u>Αποδ.</u> Απο την (7.17), η $P(\Lambda \le \lambda', X=x) =$

$= \int_0^{\lambda'} P(X=x \mid \Lambda=\lambda) f_\Lambda(\lambda)\, d\lambda$, καθως επισης και η

$P(X=x) = \int_0^\infty P(X=x \mid \Lambda=\lambda) f_\Lambda(\lambda)\, d\lambda \Rightarrow$

$$\Rightarrow F_{\Lambda|X}(\lambda|x) = P(\Lambda \le \lambda \mid X=x) = \frac{P(\Lambda\le\lambda, X=x)}{P(X=x)} =$$

$$= \frac{\int_0^{\lambda} P(X=x \mid \Lambda=\lambda') f_\Lambda(\lambda')\, d\lambda'}{\int_0^{\infty} P(X=x \mid \Lambda=\lambda') f_\Lambda(\lambda')\, d\lambda'} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f_{\Lambda|X}(\lambda|x) = \frac{d}{d\lambda} F_{\Lambda|X}(\lambda|x) = \frac{P(X=x \mid \Lambda=\lambda) f_\Lambda(\lambda)}{\int_0^{\infty} P(X=x \mid \Lambda=u) f_\Lambda(u)\, du} =$$

$$= \frac{\frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!} \frac{\mu^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \lambda^{\alpha-1} e^{-\mu\lambda}}{\int_0^{\infty} \frac{e^{-u}u^{x}}{x!} \frac{\mu^\alpha}{\Gamma(\alpha)} u^{\alpha-1} e^{-\mu u}\, du} = \frac{\lambda^{x+\alpha-1} \cdot e^{-(\mu+1)\lambda}}{\int_0^{\infty} u^{x+\alpha-1} e^{-(\mu+1)u}\, du} =$$

$$= \frac{(\mu+1)^{x+\alpha}}{\Gamma(x+\alpha)} \lambda^{x+\alpha-1} e^{-(\mu+1)\lambda}.$$

Στις (7.21), (7.22) και (7.23) η "a priori" και η "a posteriori" κατανομη ανηκουν στην ιδια οικογενεια, συγκεκριμενα εδω στη Γαμμα. Αυτη ειναι μια ιδιοτητα της κατανομης Γαμμα. Κατανομες με αυτη την διαισθητικα επιθυμητη ιδιοτητα λεγονται συζυγεις "a priori" κατανομες.

Οπως και στην περιπτωση των δ.τ.μ. (βλ. (7.7) και (7.8)) οριζουμε τις τ.μ. της δεσμευμενης μεσης τιμης και διασπορας της Y δεδομενης της X (χωρις να δεσμευουμε την X σε καποιο συγκεκριμενο $x \in S_X$) ως :

$$(7.24) \quad E(Y|X) := \mu(X) ,$$

$$(7.25) \quad \mathcal{D}(Y|X) := \sigma^2(X) ,$$

εφοσον οι $\mu(x)$, $\sigma^2(x)$ ειναι καλα ορισμενες (βλ. 7.14). Οι τ.μ. της δεσμευμενης ροπογεννητριας και δεσμευμενων ροπων ταξεως k οριζονται αναλογα.

(7.26) <u>Προταση</u>. Εστω τ.μ. X, Y με $\mu(X)$ και $\sigma^2(X)$ αντιστοιχα καλα ορισμενες τ.μ. Τοτε,

(α) $E\{E(Y|X)\} = EY$

(β) $\mathcal{D}(Y) = E\{\mathcal{D}(Y|X)\} + \mathcal{D}(E(Y|X))$

<u>Αποδ.</u> Η αποδειξη της (7.11) ισχυει και εδω για το μερος (β). Η αποδειξη του (α) ειναι αναλογη της (7.9) :

$$E(E(Y|X)) = E\mu(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mu(x) f_X(x)\,dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} y\, f_{Y|X}(y|x)\,dy \right\} f_X(x)\,dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} y\, f_2(x,y)\,dx\,dy = \int_{-\infty}^{+\infty} y\, f_Y(y)\,dy = EY .$$

Η προταση αυτη ειναι εξαιρετικα χρησιμη στη θεωρια και εφαρμογες, οπως και οι (7.9) και (7.11). Θα δουμε αμεσως ενα παραδειγμα υπολογισμου μιας σχετικα πεπλεγμενης μεσης τιμης και διασπορας :

(7.27) <u>Παραδειγμα</u>. Εστω $N \sim \mathcal{P}oisson(\lambda)$ ο αριθμος των πελατων που ερχονται σε ενα καταστημα κατα τη διαρκεια μιας ημερας. Ας υποτεθη οτι ο καθε πελατης i ανεξαρτητα απο τους αλλους και τον αριθμο τους N, ξοδευει σε δραχμες $X_i \sim \mathcal{G}(\alpha, \frac{1}{\theta})$. Βρητε τη μεση τιμη και διασπορα των χρηματων Y που ξοδευονται σ' αυτο το καταστημα σε μια ημερα.

<u>Λυση</u>. Εστω $Y := \Sigma_{i=1}^{N} X_i$, $EY = E\{E(Y|N)\}$.

Τωρα, $\mu(n) := E(Y|N=n) = E\{\Sigma_{i=1}^{N} X_i \,|\, N=n\} =$

$= E\{\Sigma_{i=1}^{n} X_i \,|\, N=n\} = E\{\Sigma_{i=1}^{n} X_i\} = n\,EX_1 =$

$= n\alpha\theta$.

Αρα, $EY = E\{\alpha\theta N\} = \alpha\theta\, EN = \alpha\lambda\theta$. Επισης,

$\sigma^2(n) = \mathcal{D}(Y|N=n) = \mathcal{D}(\Sigma_{i=1}^{n} X_i) = \Sigma_{i=1}^{n}\mathcal{D}(X_i) =$
$= n\,\mathcal{D}(X_1) = n\alpha\theta^2$. Αρα, η $\mathcal{D}(Y) =$
$= E\{\sigma^2(N)\} + \mathcal{D}(\mu(N)) = E(\alpha\theta^2 N) + \mathcal{D}(\alpha\theta N) =$
$= \alpha\theta^2 EN + \alpha^2\theta^2\mathcal{D}(N) = \alpha\theta^2\lambda + \alpha^2\theta^2\lambda = \lambda\alpha(\alpha+1)\theta^2$.

Η ακολουθη προταση ουσιαστικα λεει οτι εαν μετραμε το σφαλμα, στην προβλεψη της Y απο την X, κατα μεσο τετραγωνο, τοτε η βελτιστη προβλεψη μας ειναι η $E(Y|X)$.

(7.28) <u>Προταση</u> (Βελτιστη προβλεψη κατα μεσο τετραγωνο) Εστω τ.μ. $X, Y \sim f_2(x,y)$, $x, y \in \mathbb{R}$. Για καθε συναρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ τετοια ωστε η $g(X)$ ειναι τ.μ. εχουμε οτι:

(α) $E[Y - E(Y|X)]^2 \leq E[Y - g(X)]^2$,

(β) $\mathcal{D}(E(Y|X)) \leq \mathcal{D}(Y)$.

<u>Αποδ.</u> Η (β) ειναι αμεση απορροια της 7.26(β). Για την (α) εχουμε οτι: $\forall x \in S_X$ $E\{[Y - g(x)]^2 | X = x\} =$
$= E(Y^2|X=x) + g^2(x) - 2g(x)\mu(x) = E\{(Y - \mu(x))^2 | X = x\} +$
$+ (g(x) - \mu(x))^2 \geq E\{(Y - \mu(x))^2 | X = x\} \Rightarrow$
$\Rightarrow E\{[Y - g(X)]^2 | X\} \geq E\{[Y - \mu(X)]^2 | X\}$ με πιθανοτητα 1.
Η (α) τωρα επεται απο την 7.26(α) και την 5.11(γ).

(7.29) <u>Ασκηση</u>. (Γραμμικη Παλινδρομηση) Εστω $(X,Y) \sim N_2(\mu_x, \mu_y | \sigma_x^2, \sigma_y^2 | \rho)$. Δειξτε οτι: (α) $Y | X = x \sim N(\mu_y + \rho\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x - \mu_x), \sigma_y^2(1-\rho^2))$,
και αρα: (β) $E(Y|X=x) = \mu_y + \rho\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x - \mu_x)$.
Συμπεραινατε λοιπον οτι η βελτιστη κατα μεσο τετραγωνο προβλεψη της Y απο την X ειναι η

$$(\gamma)\quad E(Y|X) = \mu_y + \rho\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(X - \mu_x),$$

με μεσο τετραγωνικο σφαλμα:

$$(\delta)\quad E(Y - E(Y|X))^2 = \sigma_y^2(1-\rho^2).$$

8. ΟΡΙΑ ΑΚΟΛΟΥΘΙΩΝ ΤΥΧΑΙΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ.

Θα συμβολίζουμε μια ακολουθία τυχαίων μεταβλητών $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$, ορισμένων στον ίδιο χώρο πιθανότητα $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, με $(X_n)_{n=1}^{\infty}$.

(8.1) <u>Ορισμός</u>. Λέμε ότι έχουμε μια ακολουθία $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ <u>ανεξαρτήτων</u> τυχαίων μεταβλητών, αν $\forall n = 2, 3, \ldots$ οι τ.μ. $X_{i_1}, X_{i_2}, \ldots, X_{i_n}$ είναι ανεξάρτητες (βλ. 6.18), όπου οι δείκτες $i_1, \ldots, i_n \in \{1, 2, \ldots\}$ και είναι διάφοροι μεταξύ τους.

Μας ενδιαφέρει να ορίσουμε έννοιες "συγκλίσεως" μιας ακολουθίας τ.μ. (όχι απαραίτητα ανεξαρτήτων).
Κατ' αναλογία του ορισμού συγκλίσεως ακολουθίας πραγματικών αριθμών έχουμε την ακόλουθη έννοια "<u>ισχυρής</u>" σύγκλισης ακολουθίας τυχαίων μεταβλητών:

(8.2) <u>Ορισμός</u>. Λέμε ότι η ακολουθία τ.μ. $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ συγκλίνει <u>σχεδόν παντού</u> (σ.π.) ή <u>σχεδόν βεβαίως</u> (σ.β.) στην τ.μ. X, αν $\forall \omega \in \Omega \setminus N$

$X_n(\omega) \xrightarrow[n\to\infty]{} X(\omega)$ (σαν ακολουθία πραγματικών αριθμών),

<u>και</u> $P(N) = 0$.

Συμβολίζουμε αυτή τη σύγκλιση τ.μ. με:

$$X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\sigma.\beta.} X \quad \text{ή} \quad \lim_{n\to\infty} X_n \overset{\sigma.\beta.}{=} X .$$

Παρατηρούμε ότι : $X_n \xrightarrow{\sigma.\beta} X \Leftrightarrow \forall \omega \in \Omega \setminus N \;\; X_n(\omega) \longrightarrow X(\omega) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \forall \omega \in \Omega \setminus N$ και $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists n_0(\varepsilon,\omega) : |X_n(\omega) - X(\omega)| < \varepsilon \;\; \forall n \geq n_0(\varepsilon,\omega)$.

Εχουμε λοιπον,

$$\{\omega : X_n(\omega) \to X(\omega)\} = \bigcap_{\varepsilon>0} \{\omega : \exists n_0(\varepsilon,\omega) : |X_n(\omega) - X(\omega)| < \varepsilon \;\; \forall n \geq n_0(\varepsilon,\omega)\}$$

$$\overset{\text{(ασκηση)}}{=} \bigcap_{\varepsilon>0} \bigcup_{m=1}^{\infty} \{\omega : |X_n(\omega) - X(\omega)| < \varepsilon \;\; \forall n \geq m\}.$$

Αρα, απ' το Θεωρημα (2.25) της συνεχειας της πιθανοσυναρτησης,

$$P(\{\omega : X_n(\omega) \to X(\omega)\}) = \lim_{\varepsilon \to 0} \lim_{m \to \infty} P(\{\omega : |X_n(\omega) - X(\omega)| < \varepsilon \;\; \forall n \geq m\}),$$

η οποια σχεση συνεπαγεται (αποδ. ασκηση):

(8.3) <u>Προταση</u>. $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\sigma.\beta.} X \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} P(|X_m - X| < \varepsilon \;\; \forall m \geq n) = 1 \;\; \forall \varepsilon > 0$.

Μια σαφως "<u>ασθενεστερη</u>" αλλα εξαιρετικα χρησιμη εννοια συγκλισεως ακολουθιας τ.μ. ειναι η εξης:

(8.4) <u>Ορισμος</u>. Λεμε οτι η ακολουθια τ.μ. $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ συγκλινει <u>κατα πιθανοτητα</u> ή <u>ασθενως</u> στην τ.μ. X, αν

$$\lim_{n\to\infty} P(|X_n - X| < \varepsilon) = 1 \quad \forall \varepsilon > 0.$$

Συμβολιζουμε αυτη τη συγκλιση με $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} X$ ή $\lim_{n\to\infty} X_n \overset{P}{=} X$.

Μια ακομη πιο ασθενης (βλ. (8.)) αλλα απολυτα φυσικη εννοια συγκλισης ακολουθιας τ.μ. ειναι η εξης:

(8.5) <u>Ορισμος</u>. Λεμε οτι η ακολουθια τ.μ. $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ συγκλινει <u>κατα κατανομη</u> ή <u>κατα νομο</u> στην τ.μ. X, αν

$$\lim_{n\to\infty} F_{X_n}(x) = F_X(x) \quad \forall x \text{ σημειο συνεχειας της } F_X(\cdot).$$

Συμβολιζουμε αυτη τη συγκλιση με $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{D}} X$ ή $\lim_{n\to\infty} X_n \overset{\mathcal{D}}{=} X$

Επισης εν χρησει ειναι και η ακολουθη εννοια συγκλισης ακολουθιας τ.μ.:

(8.6) Ορισμος. Λεμε οτι η ακολουθια τ.μ. $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ συγκλινει κατα μεσον ταξεως $p=1,2,\dots$ στην τ.μ. X, αν $\lim_{n\to\infty} E|X_n-X|^p = 0$.

Συμβολιζουμε αυτη τη συγκλιση με $X_n \xrightarrow{L_p} X$ ή $l.i.m.^p X_n = X$. Απο την ανισοτητα Liapounov (5.15), βλεπουμε οτι αν μια ακολουθια τ.μ. $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ συγκλινει στην τ.μ. X κατα μεσον ταξεως p_0 τοτε συγκλινει και κατα μεσον ταξεως p $\forall p \le p_0$. Στην πραξη χρησιμοποιουνται οι τιμες $p=1$ και κυριως 2, οποτε και λεμε οτι εχουμε συγκλιση "κατα μεσο τετραγωνο". Φυσικα η L_p-συγκλιση εχει εννοια μονο αν οι αντιστοιχες ροπες υπαρχουν.

Θα μελετησουμε τις σχεσεις μεταξυ των διαφορων εννοιων στοχαστικης συγκλισεως που ορισαμε ηδη στην Προταση 8. . Θα δωσουμε ομως πρωτα μερικα κλασσικα θεωρηματα συγκλισεως που αφορουν ακολουθιες ανεξαρτητων τυχαιων μεταβλητων.

(8.7) Θεωρημα. (ΑΝΜΑ: Ασθενης Νομος των Μεγαλων Αριθμων). Εστω ακολουθια $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ ανεξαρτητων και ισονομων (α.ι.) (εχουν την ιδια κατανομη) τ.μ. με $E|X_1|<+\infty$ και εστω $\mu := EX_1$. Τοτε, αν $\bar{X}_n := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$, εχουμε οτι:

$$\bar{X}_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} \mu .$$

Αποδ. Για ευκολια θα δεχθουμε εδω οτι $\sigma^2 := \mathcal{D}(X_1) < +\infty$.

Τοτε αφο τις 6.36(β) και 6.41 εχουμε οτι
$\mathcal{D}(\bar{X}_n) = \frac{1}{n^2}\mathcal{D}(\Sigma_{i=1}^n X_i) = \frac{1}{n^2}\Sigma_{i=1}^n \mathcal{D}(X_i) = \frac{\sigma^2}{n}$,
και $E(\bar{X}_n) = \frac{1}{n}E(\Sigma_{i=1}^n X_i) = \frac{1}{n}\Sigma_{i=1}^n EX_i = \mu$. Τοτε αφο την ανισοτητα του Chebyshev (5.38) εχουμε οτι $\forall \varepsilon > 0$

$$P(|\bar{X}_n - \mu| > \varepsilon) = P(|\bar{X}_n - E\bar{X}_n| > \varepsilon) \leq \frac{\mathcal{D}(\bar{X}_n)}{\varepsilon^2} = \frac{\sigma^2}{n\varepsilon} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 .$$

Αρα $P(|\bar{X}_n - \mu| < \varepsilon) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$, δηλαδη $\bar{X}_n \xrightarrow{P} \mu$.

Με τις ιδιες συνθηκες εχουμε το ακολουθο ισχυροτερο θεωρημα του Kolmogorov, το οποιο διδουμε χωρις αποδειξη.

(8.8) <u>Θεωρημα</u>. (ΙΝΜΑ: Ισχυρος Νομος των Μεγαλων Αριθμων).
Εστω ακολουθια $(X_n)_{n=1}^\infty$ α.ι. τ.μ. με $E|X_1| < +\infty$, και εστω $\mu := EX_1$. Τοτε, εχουμε οτι:

$$\bar{X}_n \xrightarrow[n\to\infty]{\sigma.\beta.} \mu .$$

Αν εφι πλεον εχουμε οτι $\mathcal{D}(X_1) < +\infty$, τοτε το ακολουθο θεωρημα μας διδει την "<u>ταχυτητα</u>" της στοχαστικης συγκλισης του ανωτερω θεωρηματος:

(8.9) <u>Θεωρημα</u>. (ΝΔΛ: Νομος των διαδοχικων λογαριθμων).
Εστω ακολουθια $(X_n)_{n=1}^\infty$ α.ι. τ.μ. με $\sigma^2 := \mathcal{D}(X_1) < +\infty$.
Αν $\mu := EX_1$, εχουμε οτι:

$$P\left(\left\{\omega: \limsup_{n\to\infty} \sqrt{\frac{n}{\log\log n}}\,|\bar{X}_n(\omega) - \mu| = \sigma\sqrt{2}\right\}\right) = 1 .$$

Σαν αμεση συνεπεια του ΝΔΛ εχουμε οτι αν $\mathcal{D}(X_1) < +\infty$, τοτε $\forall \varepsilon > 0$ $\quad n^{1/2-\varepsilon}(\bar{X}_n - \mu) \xrightarrow[n\to\infty]{\sigma.\beta.} 0$.

Η ονομασια του κατωτερω θεωρηματος οφειλεται στον κεντρικης σημασιας ρολο που εχει το αποτελεσμα του στην θεωρια και πραξη των πιθανοτητων και της στατιστικης:

(8.10) <u>Θεωρημα</u>: (ΚΟΘ: Κεντρικο Οριακο Θεωρημα) Εστω ακολουθια $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ α.i. τ.μ. με $\sigma^2 := \mathcal{D}(X_1) < +\infty$ και εστω $\mu := EX_1$. Εχουμε:

$$\frac{\sqrt{n}\,(\bar{X}_n-\mu)}{\sigma} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{D}} N(0,1),$$

δηλαδη,

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{\sqrt{n}\,(\bar{X}_n-\mu)}{\sigma} \leq x\right) = \Phi(x) \quad \forall x\in\mathbb{R}.$$

<u>Αποδ.</u> Εστω $Z_i := \frac{X_i-\mu}{\sigma}$, $i=1,2,\dots$, οι οποιες ειναι λοιπον α.i. με $EZ_1=0$ και $\mathcal{D}(Z_1)=EZ_1^2=1$. Εχουμε τοτε $\frac{\sqrt{n}\,(\bar{X}_n-\mu)}{\sigma} = \sqrt{n}\,\bar{Z}_n = \Sigma_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n}}Z_i$. Θα αποδειξουμε οτι η ροπογεννητρια αυτου του αθροισματος συγκλινει στη ροπογεννητρια της $N(0,1)$, δηλαδη την συναρτηση $\exp\{t^2/2\}$ (βλ. πινακα 4.63). Τοτε το αποτελεσμα επεται απο τις (5.33) και (5.27). Εχουμε λοιπον,

$$M_{\sqrt{n}\,\bar{Z}_n}(t) = E\left\{\exp\left[-t\,\Sigma_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n}}Z_i\right]\right\} = E\left\{\prod_{i=1}^{n} e^{-\frac{t}{\sqrt{n}}Z_i}\right\} =$$

(ανεξαρτησια των Z_i)

$$= \prod_{i=1}^{n} E\left\{e^{-\frac{t}{\sqrt{n}}Z_i}\right\} = \prod_{i=1}^{n} M_{Z_i}\left(\tfrac{t}{\sqrt{n}}\right) = \left[M_{Z_1}\left(\tfrac{t}{\sqrt{n}}\right)\right]^n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log M_{\sqrt{n}\,\bar{Z}_n}(t) = n\log M_{Z_1}\left(\tfrac{t}{\sqrt{n}}\right) = \text{(αναπτυγμα Taylor περι } t=0\text{)}$$

$$= n\left\{0 - \frac{t}{\sqrt{n}}EZ_1 + \frac{1}{2}\frac{t^2}{n}EZ_1^2 + o\left(\tfrac{1}{n}\right)\right\} = \frac{t^2}{2} + o(1),$$

οπου εξ ορισμου $A_\varepsilon = o(\varepsilon)$ αν $\frac{A_\varepsilon}{\varepsilon} \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0$ και κατ' επεκταση $A_\varepsilon = o(1)$ αν $A_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0$.

Αρα, $M_{\sqrt{n}\,\bar{Z}_n}(t) \xrightarrow[n\to\infty]{} \exp\{t^2/2\} = M_{N(0,1)}(t)$.

Τα ανωτερω θεωρηματα εχουν εδεκταθη σε περιπτωσεις ακολουθιων ανεξαρτητων αλλ' οχι ισονομων τ.μ. (π.χ. Κ.Ο.Θ. των Lindeberg-Feller), σε τριγωνικες διαταξεις, καθως επισης και ακολουθιες τ.μ. με ειδικες δομες εξαρτησης.

Η "ταχυτητα" της συγκλισης στο Κ.Ο.Θ. διδεται στο ακολουθο θεωρημα το οποιο παραθετουμε χωρις αποδειξη.

(8.11) Θεωρημα (των Berry και Esseen). Εστω ακολουθια $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ α.ι. τ.μ. με $E\{|X|^3\}<+\infty$, και εστω $\mu:=EX_1$ και $\sigma^2=\mathcal{D}(X_1)$. Τοτε υπαρχει μια γενικη σταθερα $c \in [\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, 0{,}8)$ τετοια ωστε:

$$\sqrt{n}\,\sup_{x\in\mathbb{R}}\left| P\left(\frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n-\mu)}{\sigma}\le x\right)-\Phi(x)\right| \le \frac{c\,E|X_1|^3}{\sigma^3}.$$

(8.12) Ασκηση. Παρτε το Θεωρημα (4.55) των De Moivre-Laplace σαν ειδικη περιπτωση του Κ.Ο.Θ.

(8.13) Παραδειγμα. Οι καθημερινες διακυμανσεις μιας μετοχης στο χρηματιστηριο Αθηνων ακολουθουν (αυτο το χρονικο διαστημα) καποια αγνωστη κατανομη με γνωστες ομως μεση τιμη $\mu=-5$ δρχ. και διασπορα $\sigma^2=225$. Αν η τιμη της μετοχης σημερα ειναι 3.000 δρχ., ποια η πιθανοτητα σε ενα μηνα (30 ημερες) απο σημερα η τιμη της μετοχης να βρισκεται καπου αναμεσα στις 2.700 και 3.050 δρχ.;

Λυση. Εστω $X_1,\dots,X_{30}$ οι α.ι. καθημερινες διακυμανσεις της μετοχης. Εχουμε,

$P(\,2.700 \le 3.000+\Sigma_{i=1}^{30} X_i \le 3.050) =$

$= P\left(-300 \leq \Sigma_{i=1}^{30} X_i \leq 50\right) = P\left(-\frac{40}{3} \leq \overline{X}_{30} \leq \frac{5}{3}\right)$

$= P\left(-\sqrt{30}\,(10-5)/15 \leq \frac{\sqrt{30}\,(\overline{X}_{30}-(-5))}{15} \leq \frac{\sqrt{30}(5/3+5)}{15}\right)$

$= P\left(-1{,}826 \leq \frac{\sqrt{30}\,(\overline{X}_{30}+5)}{15} \leq 2{,}434\right) \approx$ (αϖο ΚΟΘ)

$\approx \Phi(2{,}434) - \Phi(-1{,}826) = \Phi(2{,}434) + \Phi(1{,}826) - 1 \approx$

$\approx 0{,}96$.

(8.14) <u>Παράδειγμα</u>. Δείξτε ότι $e^{-n}\Sigma_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{2}$.

<u>Αποδ.</u> Έστω $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ α.ι. $\mathcal{P}(\lambda=1)$. Τότε $n\overline{X}_n = \Sigma_{i=1}^{n} X_i \sim \mathcal{P}(n\lambda = n)$ (βλ. $6.25^{IX}(\delta)$) και άρα

$\Sigma_{i=1}^{n} e^{-n}\frac{n^k}{k!} = P(n\overline{X}_n \leq n) = P(\overline{X}_n \leq 1) =$

$= P\left(\frac{\sqrt{n}\,(\overline{X}_n - EX_1)}{\sqrt{\mathcal{D}(X_1)}} \leq \frac{\sqrt{n}\,(1-1)}{\sqrt{1}} = 0\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \Phi(0) = \frac{1}{2}$,

αϖο το ΚΟΘ.

(8.15) <u>Παράδειγμα</u>. Έστω $X_1, \dots, X_n$ α.ι. με κοινή άγνωστη σ.κ. $F(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Έστω επίσης $\forall x \in \mathbb{R}$,

$\mathbb{F}_n(x) := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} 1(X_i \leq x) = \{\text{αριθ. των } X_i \leq x,\ i=1,\dots,n\}/n$.

Δείξτε ότι:

(α) $E\{\mathbb{F}_n(x)\} = F(x)$, $\mathcal{D}(\mathbb{F}_n(x)) = \frac{F(x)[1-F(x)]}{n}$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

(β) $\mathbb{F}_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{\text{σ.β.}} F(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

(γ) $\frac{\sqrt{n}\,(\mathbb{F}_n(x) - F(x))}{\sqrt{F(x)[1-F(x)]}} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{D}} N(0,1)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

<u>Αποδ.</u> (α) Εστω $Y_i := \mathbb{1}(X_i \le x) \sim \text{Bernoulli}\,(p = EY_i = F(x))$, $i=1,\dots,n$, και $\mathbb{F}_n(x) = \overline{Y}_n$. Αρα $E\,\mathbb{F}_n(x) = E\,\overline{Y}_n = EY_1 = F(x)$ και $\mathcal{D}(\mathbb{F}_n(x)) = \mathcal{D}(\overline{Y}_n) = \frac{1}{n}\mathcal{D}(Y_1) = \frac{1}{n}p(1-p) = F(x)[1-F(x)]/n$. Παρατηρειστε επισης οτι $n\,\mathbb{F}_n(x) \sim \mathcal{B}(n, p = F(x))$ (βλ. 6.25^{IX}(ε)). Η συναρτηση $\mathbb{F}_n(\cdot)$ καλειται <u>εμπειρικη σ.κ.</u>.

(β) $\mathbb{F}_n(x) = \overline{Y}_n \xrightarrow[n\to\infty]{\sigma.\beta.} EY_1 = F(x)$ απο το ΙΝΜΑ.

(γ) $$\frac{\sqrt{n}\,(\mathbb{F}_n(x) - F(x))}{\sqrt{F(x)[1-F(x)]}} = \frac{\sqrt{n}\,(\overline{Y}_n - EY_1)}{\sqrt{\mathcal{D}(Y_1)}} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{D}} N(0,1),$$

απο το ΚΟΘ.

(8.16) <u>Ασκηση</u>. Εστω $X_1,\dots,X_n$ α.ι. με κοινη σ.κ. $F(x)$, $x\in\mathbb{R}$, και εστω $S_n^2 := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2$, οπου $\mu := EX_1$. Υποθεστε οτι $\sigma^2 := \mathcal{D}(X_1) < +\infty$, και δειξτε οτι:

(α) $ES_n^2 = \sigma^2$

(β) $S_n^2 \xrightarrow[n\to\infty]{P} \sigma^2$

(γ) Υποθεστε οτι $F(x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$ και δειξτε οτι:

(i) $n S_n^2/\sigma^2 \sim \chi_n^2$,

(ii) $\sqrt{\frac{n}{2}}\left(\frac{S_n^2}{\sigma^2} - 1\right) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{D}} N(0,1)$.

Αναμεσα στις διαφορες στοχαστικες συγκλισεις που αναφεραμε υπαρχουν οι εξης σχεσεις:

(8.17) <u>Προταση</u>. Για μια ακολουθια τ.μ. $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ & τ.μ. X, εχουμε:

(α) $X_n \xrightarrow{\sigma.\beta.} X \;\Rightarrow\; X_n \xrightarrow{P} X$

(β) $X_n \xrightarrow{P} X \;\Rightarrow\; X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X$

(γ) $X_n \xrightarrow{L_p} X \;\Rightarrow\; X_n \xrightarrow{P} X$, για $p>0$.

(δ) $X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} c \;\Rightarrow\; X_n \xrightarrow{P} c$, οπου c σταθερα.

(α) $\forall \varepsilon>0 \quad 1 \geq P(|X_n - X| < \varepsilon) \geq P(|X_m - X| < \varepsilon \ \forall m \geq n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$,
όπως έπεται από την Πρόταση (8.3).

(β) $X_n \xrightarrow{P} X \iff \forall \varepsilon>0 \ P(|X_n-X|>\varepsilon) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow \forall \varepsilon,\delta>0 \ \exists n_0 : P(|X_n-X|>\varepsilon) < \delta \ \forall n > n_0$.
Άρα $\forall \varepsilon,\delta>0 \ \exists n_0$: $\forall n>n_0$ έχουμε

(i) $F_{X_n}(x) = P(X_n - X \leq x - X) = P(\{X_n - X \leq x - X\} \cap \{X_n - X \geq -\varepsilon\}) +$
$+ P(\{X_n - X \leq x - X\} \cap \{X_n - X < -\varepsilon\}) \leq$
$\leq P(-\varepsilon \leq x - X) + P(X_n - X < -\varepsilon) < F_X(x+\varepsilon) + \delta$

(ii) $F_X(x-\varepsilon) = P(X_n - x + \varepsilon \leq X_n - X) =$
$= P(\{X_n - x+\varepsilon \leq X_n - X\} \cap \{X_n - X \leq \varepsilon\}) + P(\{X_n - x+\varepsilon \leq X_n - X\} \cap \{X_n - X > \varepsilon\})$
$\leq P(X_n - x + \varepsilon \leq \varepsilon) + P(X_n - X > \varepsilon) < F_{X_n}(x) + \delta$.

Άρα $\forall \varepsilon,\delta>0 \ \exists n_0$: $F_X(x-\varepsilon) - \delta < F_{X_n}(x) < F_X(x+\varepsilon) + \delta \ \forall n > n_0$

$\Rightarrow \forall \varepsilon,\delta>0 \quad 0 \leq \liminf_{n\to\infty} |F_{X_n}(x) - F_X(x)| \leq \limsup_{n\to\infty} |F_{X_n}(x) - F_X(x)| <$

$< \delta + \max\{F_X(x+\varepsilon) - F(x),\ F_X(x) - F_X(x-\varepsilon)\}$
$\xrightarrow[\delta,\varepsilon\to 0]{} 0 \quad \forall x$ σημείο συνέχειας της $F_X(\cdot)$.

(γ) Από την ανισότητα Markov (βλ. 5.37), έχουμε $\forall \varepsilon>0$,
$P(|X_n - X| > \varepsilon) \leq \varepsilon^{-p} E\{|X_n - X|^p\} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

(δ) $X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} c$, σταθερά, σημαίνει ότι $F_{X_n}(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} \begin{cases} 1 & \text{αν } x>c \\ 0 & \text{αν } x<c \end{cases}$.
Άρα, $\forall \varepsilon>0 \quad P(|X_n - c| > \varepsilon) =$
$= P(X_n - c > \varepsilon) + P(X_n - c < -\varepsilon) = 1 - F_{X_n}(c+\varepsilon) + P(X_n < c-\varepsilon)$
$\leq 1 - F_{X_n}(c+\varepsilon) + F_{X_n}(c-\varepsilon) \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 - 1 + 0 = 0$.

Η επόμενη πρόταση λέγει ότι η "γρήγορη" ασθενής σύγκλιση συνεπάγεται την ισχυρή :

(8.18) <u>Πρόταση</u>: Αν $\forall \varepsilon > 0$ $\sum_{n=1}^{\infty} P(|X_n - X| > \varepsilon) < +\infty$, τότε $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\sigma.\beta.} X$.

<u>Απόδ.</u> $\forall \varepsilon > 0$,

$$P(|X_m - X| > \varepsilon \ \ \forall m \geq n) = P\Big(\bigcup_{m=n}^{\infty} \{|X_m - X| > \varepsilon\}\Big) \leq$$
$$\leq \sum_{m=n}^{\infty} P(|X_m - X| > \varepsilon) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

και το αποτέλεσμα έπεται από τη Πρόταση (8.3).

(8.19) <u>Άσκηση</u>. Αν $\exists p > 0 : \sum_{n=1}^{\infty} E|X_n - X|^p < +\infty$, τότε $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\sigma.\beta.} X$.

Δίδουμε χωρίς απόδειξη τα ακόλουθα χρήσιμα θεωρήματα:

(8.20) <u>Θεώρημα</u>. Αν $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} X$ τότε υπάρχει υπακολουθία $\{X_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ της $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ τέτοια ώστε $X_{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{\sigma.\beta.} X$.

(8.21) <u>Θεώρημα</u> (Cramer–Wold). Έστω δ.τ.μ. $\underline{X}$, $\{\underline{X}_n\}_{n=1}^{\infty} \in \mathbb{R}^k$.
$\underline{X}_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{D}} \underline{X} \iff \underline{\lambda}^T \underline{X}_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{D}} \underline{\lambda}^T \underline{X} \ \ \forall \underline{\lambda} \in \mathbb{R}^k$.

(8.22) <u>Θεώρημα</u> (Slutsky). Αν $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{D}} X$ και $Y_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} c$, σταθερά, τότε (έστω και αν οι X_n, Y_n είναι εξαρτημένες):

(α) $X_n + Y_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X + c$,

(β) $X_n Y_n \xrightarrow{\mathcal{D}} cX$,

(γ) $X_n / Y_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X/c$ αν $c \neq 0$.

(8.23) <u>Θεώρημα</u> (Mann–Wald) Έστω συνάρτηση $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής, τότε:

(α) $X_n \xrightarrow{\sigma.\beta.} X \Rightarrow g(X_n) \xrightarrow{\sigma.\beta.} g(X)$,

(β) $X_n \xrightarrow{P} X \Rightarrow g(X_n) \xrightarrow{P} g(X)$,

(γ) $X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X \Rightarrow g(X_n) \xrightarrow{\mathcal{D}} g(X)$.

(Το θεώρημα γενικεύεται για δ.τ.μ.).

(8.24) <u>Θεώρημα.</u> (Μέθοδος δέλτα) Έστω ακολουθία τ.μ. $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ και ακολουθία σταθερών $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ με $c_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$, τέτοιες ώστε $c_n(X_n - \alpha) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{D}} N(0,\sigma^2)$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$, σταθερές. Έστω συνάρτηση $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ διαφορήσιμη σε μια περιοχή της α. Τότε $c_n(g(X_n) - g(\alpha)) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{D}} N(0, \sigma^2[g'(\alpha)]^2)$.

"<u>Υποδ.</u>" $X_n - \alpha = \frac{1}{c_n}[c_n(X_n - \alpha)] \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{D}} 0 \cdot N(0,\sigma^2) = 0$, από το (8.22). Άρα, από το (8.17δ), $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} \alpha$ "$\Rightarrow$" $\dfrac{g(X_n) - g(\alpha)}{X_n - \alpha} \xrightarrow[n\to\infty]{P} g'(\alpha)$.

Άρα, $c(g(X_n) - g(\alpha)) = \dfrac{g(X_n) - g(\alpha)}{X_n - \alpha} \cdot c_n(X_n - \alpha)$

$\xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{D}} g'(\alpha) N(0,\sigma^2) = N(0, \sigma^2[g'(\alpha)]^2)$, από το (8.22).

(8.25) <u>Παράδειγμα</u>: Έστω $X_1, \dots, X_n$ α.ι. Bernoulli (p). Δείξτε ότι: (α) $\sqrt{n}\,[\bar{X}_n(1-\bar{X}_n) - p(1-p)] \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{D}} N(0, (1-2p)^2 p(1-p))$

(β) Αν $p = \frac{1}{2}$: $\sqrt{n}\,[\bar{X}_n(1-\bar{X}_n) - \frac{1}{4}] \xrightarrow[n\to\infty]{P} 0$.

<u>Αποδ.</u> (α) $g(x) := x(1-x)$, $x \in [0,1]$ $\Rightarrow g'(x) = 1-2x$, $x \in (0,1)$. Από Κ.Ο.Θ. $\sqrt{n}(\bar{X}_n - p) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{D}} N(0, p(1-p))$. Το αποτέλεσμα λοιπόν έπεται από το (8.24).

(β) Το αποτέλεσμα έπεται από το (α) και το (8.17δ).

(8.26) <u>Άσκηση</u>. Έστω $X_1, \dots, X_n$ α.ι. Bernoull $(p = \frac{1}{2})$. Δείξτε ότι: $n\,[\bar{X}_n(1-\bar{X}_n) - \frac{1}{4}] \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{D}} -\frac{1}{4}\chi_1^2$.