Κεφαλαιο 1

Βασικες Εννοιες Στοχαστικων Ανελιξεων

1. Γενικά

Η Θεωρία των Στοχαστικών Ανελίξεων αναπτύχθηκε συγχρόνως με τη μελέτη διαφόρων φυσικών φαινομένων, όπως ο θερμικός θόρυβος στα ηλεκτρικά κυκλώματα, η κίνηση Brown που κάνει ένα σωματίδιο μέσα σ' ένα υγρό ή αέριο κάτω από συγκεκριμένες συνθήκες και πολλά άλλα. Δηλαδή, ο πρώτος επιστημονικός κλάδος που συνετέλεσε στην ανάπτυξη της θεωρίας των Στοχαστικών Ανελίξεων είναι η **Φυσική**.

Πολύ γρήγορα έγινε κατανοητό ότι μοντέλα Στοχαστικών Ανελίξεων περιγράφουν βιολογικά φαινόμενα όπως: Η συμπεριφορά ενός πληθυσμού που υπόκειται σε γέννηση, θάνατο και (ή) σε πολυπλοκότερες συνθήκες. Η κατανομή των φυτών και των ζώων. Ο αγώνας για την επικράτηση ενός πληθυσμού. Η εξαφάνιση ενός επιθέτου. Το φαινόμενο της καρκινογέννησης. Τέλος, η συνεισφορά των Στοχαστικών Ανελίξεων στα εντυπωσιακά αποτελέσματα που αφορούν την ανάγνωση του DNA είναι ιδιαίτερα σημαντική. Γενικά, στη **Βιολογία** οι εφαρμογές των Στοχαστικών Ανελίξεων είναι εξαιρετικά χρήσιμες και λόγω της φύσης των εφαρμογών αυτών ελκυστικές για τους ερευνητές.

Η **Οικονομία** είναι ένας άλλος κλάδος στον οποίο οι Στοχαστικές Ανελίξεις εφαρμόζονται με ιδιαίτερη επιτυχία. Για παράδειγμα, οι διακυμάνσεις των τιμών των προϊόντων, των χρηματιστηριακών μονάδων, καθώς και άλλων οικονομικών προβλημάτων, όπως τα Ασφαλιστικά, περιγράφονται από στοχαστικά μοντέλα που αναπτύσσονται στη Θεωρία των Στοχαστικών Ανελίξεων και παρέχουν χρήσιμες προβλέψεις για τη συμπεριφορά των σχετικών μεγεθών.

Δεν θα ήταν υπερβολή να διατυπώσουμε την άποψη ότι οι Στοχαστικές Ανελίξεις έχουν εφαρμογές σ' όλες τις επιστήμες, αφού περιγράφουν φαινόμενα που εξαρτώνται από χρόνο ή χώρο όπως θα δούμε αργότερα.

Στην **Επιχειρησιακή Ερευνα**, σε ό,τι αφορά Στοχαστικά Μοντέλα, οι στοχαστικές ανελίξεις αποτελούν την κυρίαρχη μαθηματική θεωρία.

Χαρακτηριστικά, αναφέρουμε δύο τομείς της επιχειρησιακής έρευνας:

1) ***Έλεγχος Αποθεμάτων***
   Στον τομέα αυτό υπάρχουν δύο σημαντικά προβλήματα:

   α) Ν' αποφασίσεις **πότε** θα παραγγείλεις καινούργια αποθέματα και

   β) **πόσα** θα παραγγείλεις.

   Τα μεγέθη αυτά υπόκεινται σε δύο είδη αβεβαιότητας

   α) **πόσα** είδη μπορεί να ζητηθούν

   β) **πόσος χρόνος** παρεμβάλλεται ανάμεσα στην παραγγελία και την παραλαβή.

2) ***Θεωρία Ουρών Αναμονής***
   Οι Ουρές Αναμονής κατατάσσονται σύμφωνα με τα εξής χαρακτηριστικά:;

1) Την κατανομή του χρόνου μεταξύ δύο διαδοχικών αφίξεων.

2) Την κατανομή του χρόνου εξυπηρέτησης.

3) Τον αριθμό των καναλιών εξυπηρέτησης (αριθμός υπηρετών).

4) Την πειθαρχία της ουράς.

5) Χωρητικότητα του συστήματος.

   Για παράδειγμα, μία ουρά $|M|M|k|$ FIFO σημαίνει ότι οι κατανομές των 1), 2) είναι Εκθετικές, ο αριθμός των καναλιών εξυπηρέτησης k και η πειθαρχία είναι: πρώτος έρχομαι, πρώτος εξυπηρετούμαι (FIFO=First In, First Out) και άπειρη χωρητικότητα.

Εδώ είναι εύκολο να πούμε συγκεκριμένα ποια είναι η στοχαστική ανέλιξη: Έστω $X(t)$ ο αριθμός των πελατών στην ουρά κατά τη χρονική στιγμή t. Η $\{X(t),\, t \geq 0\}$ είναι μία στοχαστική ανέλιξη. Παρατηρούμε ότι για συγκεκριμένο t έχουμε την τυχαία μεταβλητή $X(t)$, ενώ η στοχαστική ανέλιξη $\{X(t),$ $t \geq 0\}$ αποτελεί οικογένεια τυχαίων μεταβλητών.

Από τις Πιθανότητες γνωρίζουμε μία πολύ σημαντική στοχαστική ανέλιξη κι' αυτή είναι η Στοχαστική Ανέλιξη Poisson που θα μελετηθεί αναλυτικά. Προς το παρόν δίνουμε τον ορισμό της, για τον οποίο χρειαζόμαστε τις ακόλουθες βασικές ιδιότητες:

Ιδιότητα 1: Μία στοχαστική ανέλιξη $\{X(t),\, t \geq 0\}$ έχει ανεξάρτητες προσαυξήσεις αν για κάθε $\nu > 2$ και για όλα τα $t_1 < t_2 < \cdots < t_\nu$ οι προσαυξήσεις (που είναι τυχαίες μεταβλητές) $X(t_2) - X(t_1), \ldots, X(t_\nu) - X(t_{\nu-1})$ είναι ανεξάρτητες.

Ιδιότητα 2: Μία στοχαστική ανέλιξη $\{X(t),\, t \geq 0\}$ έχει στάσιμες ή χρονικά ομογενείς προσαυξήσεις αν οι προσαυξήσεις $X(t)-X(s)$ και $X(t+h)-X(s+h)$, $\forall h > 0$ και $0 \leq s < t$ είναι ισόνομες.

Ορισμός της στοχαστικής ανέλιξης Poisson

Η στοχαστική ανέλιξη $\{X(t),\, t \geq 0\}$ είναι Poisson αν

1) $X(0) = 0$.

2) Έχει ανεξάρτητες και χρονικά ομογενείς προσαυξήσεις.

3) $P(X(h) = 1) = \lambda h + o(h)$, $P(X(h) = 0) = 1 - \lambda h + o(h)$, για $h \downarrow 0$, όπου $o(h)$ είναι συνάρτηση του $h : \lim_{h\to 0} \frac{o(h)}{h} = 0$.

   Η συνθήκη (3) είναι ισοδύναμη με την

3') $P(X(t) = k) = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^k}{k!}$, $k = 0, 1, \ldots,\ \lambda > 0$.

Σημείωση: Όπως γνωρίζουμε από τις Πιθανότητες η στοχαστική ανέλιξη Poisson είναι ένα πολύ καλό πιθανοθεωρητικό μοντέλο για τυχαία φαινόμενα όπως: Δυστυχήματα που συμβαίνουν σ' ένα χρονικό διάστημα. Τηλεφωνήματα που φθάνουν σε συγκεκριμένο τηλεφωνικό κέντρο. Πελάτες που φθάνουν σε κέντρο εξυπηρέτησης (τράπεζες, εφορίες, στάσεις λεωφορείων, γραμματείες ...). Ο αριθμός των σωματιδίων που εκπέμπονται από ραδιενεργό πηγή. Ο αριθμός φυτών ή ζώων σε συγκεκριμένη επιφάνεια. Ο αριθμός των αστεριών σε συγκεκριμένο χώρο (του διαστήματος). Δηλαδή, απαριθμεί γεγονότα που συμβαίνουν με κάποια τυχαιότητα στο χρόνο ή χώρο, γι' αυτό και καλείται **απαριθμήτρια** στοχαστική ανέλιξη.

Κίνηση Brown ή Wiener

Το 1827 ο Άγγλος βοτανολόγος Brown παρατήρησε ότι ένα μόριο (διαμέτρου της τάξης 10^{-4} cm) όταν βυθιστεί σ' ένα υγρό ή αέριο κινείται άτακτα. Αυτήν την κίνηση προσπάθησαν να περιγράψουν μ' ένα μαθηματικό μοντέλο, κι αυτή ήταν η αρχή της ανάπτυξης ενός από τους πολύ σημαντικούς κλάδους της Θεωρίας Πιθανοτήτων και Στοχαστικών Ανελίξεων, που ονομάζεται **Κίνηση Brown ή Wiener**.

Το 1905 ο Einstein απέδειξε ότι το παραπάνω φαινόμενο μπορεί να εξηγηθεί υποθέτοντας ότι το μόριο βομβαρδίζεται συνεχώς από τα μόρια του μέσου (υγρού ή αερίου) προκαλώντας του μετατοπίσεις. Έτσι η μετατόπισή του σ' ένα χρονικό διάστημα (s,t), $0 \leq s < t < \infty$, ως άθροισμα πολλών μετατοπίσεων, μπορεί να θεωρηθεί ότι κατανέμεται Κανονικά σύμφωνα με το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα.

Το 1923 ο Wiener γενικεύοντας την εργασία του Einstein κατέληξε στο πλήρες μαθηματικό μοντέλο που περιγράφει την κίνηση Brown και έχει συνοπτικά ως εξής:

Μία στοχαστική ανέλιξη $\{X(t), t \geq 0\}$, είναι στοχαστική ανέλιξη Brown ή Wiener αν

1) Η στοχαστική ανέλιξη έχει ανεξάρτητες και ομογενείς προσαυξήσεις

2) $\forall\, t > 0$ η $X(t)$ κατανέμεται Κανονικά δηλ.

$$f(x,t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2 t}},\ \sigma > 0$$

3) $E(X(t)) = 0 \quad \forall\, t > 0$

4) $X(0) = 0$ και η $X(t)$ είναι συνεχής στο μηδέν.

Η παράμετρος σ υπολογίζεται από τις παρατηρήσεις και όταν το μαθηματικό μοντέλο αναφέρεται στην κίνηση Brown ο Einstein απέδειξε ότι

$$\sigma^2 = \frac{4RT}{Nf},$$

όπου R η σταθερά του μέσου, N ο αριθμός του Avogadro, T η απόλυτη θερμοκρασία, f ο συντελεστής τριβής του μέσου.

Η παραπάνω σχέση συνετέλεσε στον προσδιορισμό του N από τον Perrin το 1926, για το οποίο τιμήθηκε με το βραβείο Νόμπελ Χημείας.

2. Ορισμοί και Παραδείγματα

Η θεωρία των Στοχαστικών Ανελίξεων ασχολείται με τη μελέτη της δομής Οικογενειών τυχαίων μεταβλητών X_t, όπου $t \in T$. Το σύνολο T καλείται ***δεικτοσύνολο*** και συνήθως παριστά χρόνο. Διακρίνουμε δύο κατηγορίες, που αφορούν τα μοντέλα τα οποία θα εξετάσουμε:

1) $T = \{0, 1, 2, \ldots\}$ και τότε θα λέμε ότι η στοχαστική ανέλιξη X_t ή $\{X(t), t \geq 0\}$, είναι διακριτού χρόνου και

2) $T = [0, \infty)$ και τότε θα λέμε ότι η στοχαστική ανέλιξη $\{X(t),\ t \geq 0\}$ είναι συνεχούς χρόνου.

Στην πραγματικότητα μία στοχαστική ανέλιξη είναι συνάρτηση της παραμέτρου $t \in T$ και του δειγματικού σημείου $\omega \in \Omega$, όπου Ω ο δειγματικός χώρος για κάθε X_t (όλες οι δυνατές τιμές κάθε X_t). Είναι δηλ. $X(t) = X(\omega, t)$, $\omega \in \Omega$, $t \in T$. Για κάθε t σταθερό η $X(\cdot, t)$ είναι μια τυχαία μεταβλητή, ενώ για κάθε ω σταθερό η $X(\omega, \cdot)$ είναι μια συνάρτηση του t, που καλείται πραγματοποίηση ή ***δειγματοσυνάρτηση*** της στοχαστικής ανέλιξης $\{X(t), t \geq 0\}$.

Για το δειγματικό χώρο Ω διακρίνουμε τις εξής δύο περιπτώσεις:

1) $\Omega = \{0, 1, \ldots\}$ και η στοχαστική ανέλιξη καλείται διακριτού χώρου καταστάσεων και

2) $\Omega = \{-\infty, \infty\}$ και η στοχαστική ανέλιξη καλείται συνεχούς χώρου καταστάσεων.

Έτσι, για παράδειγμα, η στοχαστική ανέλιξη Poisson είναι διακριτού χώρου καταστάσεων σε συνεχή χρόνο, ενώ η στοχαστική ανέλιξη Brown είναι συνεχούς χώρου καταστάσεων σε συνεχή χρόνο.

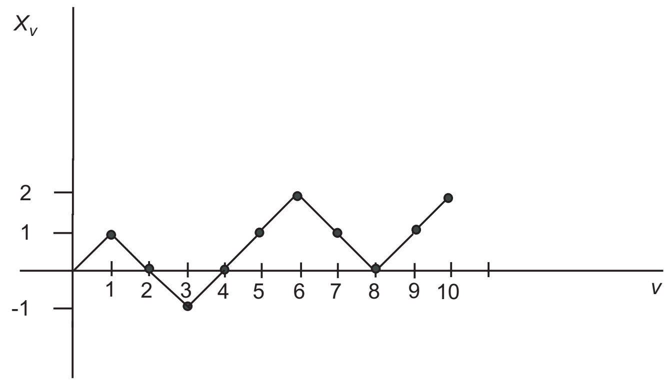
Στη συνέχεια θα παρουσιάσουμε μια στοχαστική ανέλιξη που είναι διακριτού χώρου καταστάσεων σε διακριτό χρόνο.

Τυχαίος Περίπατος

Έστω ένα σωματίδιο που ξεκινάει από την αρχή του άξονα και κάνει ένα βήμα δεξιά με πιθανότητα p ή ένα βήμα αριστερά με πιθανότητα $q = 1 - p$ σε κάθε χρονική μονάδα δηλ., αν Y_ν $\nu = 1, 2, \ldots$ είναι η μετατόπισή του τη χρονική στιγμή ν, τότε

$$P(Y_\nu = 1) = p, \quad P(Y_\nu = -1) = 1 - p = q.$$

Έστω X_ν η τετμημένη (θέση) του σωματιδίου αμέσως μετά τη χρονική στιγμή ν. Τα σημεία (ν, X_ν), $\nu = 1, 2, \ldots$ παριστάνουν τον τυχαίο περίπατο του σωματιδίου. Μία τέτοια πραγματοποίηση για 10 βήματα θα μπορούσε να είναι η εξής:



Αφού $X_0 = 0$ είναι φανερό ότι

$$X_\nu = Y_1 + \cdots + Y_\nu,$$

όπου οι μετατοπίσεις Y_i, $i = 1, \ldots, \nu$ είναι ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές.

Αν θεωρήσουμε το $\boldsymbol{\nu}$ σταθερό, τότε η X_ν είναι μία ***τυχαία μεταβλητή*** για την οποία εύκολα προσδιορίζουμε την κατανομή της, π.χ. αν μέχρι και τη ν-οστή χρονική στιγμή το σωματίδιο έκανε j αρνητικές μετατοπίσεις $j = 0, 1, \ldots, \nu$, τότε η τετμημένη ή θέση του είναι $\nu - 2j$ και αυτό το ενδεχόμενο έχει πιθανότητα

$$\begin{aligned} P(X_\nu = \nu - 2j) &= P(j \text{ από τις } \nu \text{ μετατοπίσεις είναι αρνητικές}) \\ &= \binom{\nu}{j} p^{\nu-j} q^j, \end{aligned}$$

δηλ. η X_ν ακολουθεί τη Διωνυμική κατανομή.

Αλλά, **η ακολουθία $\boldsymbol{\{X_\nu, \nu = 1, \ldots\}}$** αποτελεί ***στοχαστική ανέλιξη*** διακριτού χώρου καταστάσεων σε διακριτό χρόνο και καλείται ***Τυχαίος Περίπατος***. Υπάρχουν διάφορες περιπτώσεις τυχαίων περιπάτων, όπως θα δούμε αργότερα, και αποτελούν μία κατηγορία στοχαστικών ανελίξεων πολύ ενδιαφέρουσα από θεωρητική άποψη, αλλά και για το πλήθος των εφαρμογών της.

Κατανομή Στοχαστικής Ανέλιξης

Έστω μία στοχαστική ανέλιξη $\{X(t), t \in T\}$. Γενικά, οι τυχαίες μεταβλητές $X(t)$, $t \in T$ είναι συσχετισμένες. Είναι δυνατό να προσδιορισθεί η κατανομή της με βάση την από κοινού συνάρτηση κατανομής των $X(t_1), \ldots, X(t_\nu)$, για

$\nu \geq 1$ και οποιαδήποτε $t_1, \ldots, t_\nu \in T$, δηλ. τη συνάρτηση

$$F(x_1, \ldots, x_\nu : t_1, \ldots, t_\nu) \equiv P(X(t_1) \leq x_1, \ldots, X(t_\nu) \leq x_\nu).$$

Αυτό συμβαίνει αν η συνάρτηση κατανομής F πληρεί τις ακόλουθες συνθήκες:
1) *Συμμετρία*: Για κάθε μετάθεση $(j_1, \ldots, j_\nu)$ των δεικτών $(1, \ldots, \nu)$ ισχύει

$$F(x_{j_1}, \ldots, x_{j_\nu} : t_{j_1}, \ldots, t_{j_\nu}) = F(x_1, \ldots, x_\nu : t_1, \ldots, t_\nu)$$

και
2) *Συμβιβαστότητα*: Για κάθε $m < \nu$

$$F(x_1, \ldots, x_m : t_1, \ldots, t_m) = \lim_{x_r \to \infty} F(x_1, \ldots, x_r, \ldots, x_\nu : t_1, \ldots, t_\nu),$$

για $r = m+1, \ldots, \nu$.

Θεμελιώδες Θεώρημα του Kolmogorov

Έστω οικογένεια κατανομών F που ικανοποιούν τις συνθήκες 1) *και* 2) $\forall\ \nu \geq 1$ *και* $\forall\ t_1, \ldots, t_\nu \in T$. *Τότε υπάρχει στοχαστικός χώρος* $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ *και οικογένεια τυχαίων μεταβλητών* $X(t) = X(t, \omega)$, $t \in T$ *που ορίζονται στο δειγματικό χώρο* Ω *ώστε η* F *να προσδιορίζει τη συνάρτηση κατανομής των* $X(t_1), \ldots, X(t_\nu)$.

Παράμετροι στοχαστικής Ανέλιξης - Στασιμότητα

Επειδή ο προσδιορισμός της κατανομής μιας στοχαστικής ανέλιξης παρουσιάζει αρκετή δυσκολία και πολυπλοκότητα γι' αυτό σε αρκετές περιπτώσεις περιοριζόμαστε στον υπολογισμό της Μεσοσυνάρτησης και Συσκέδασης δηλ. τυπικών χαρακτηριστικών με βάση τα οποία συνάγουμε κάποια συμπεράσματα για τη στοχαστική ανέλιξη.

Ορισμός 2.1. Έστω $\{X(t), t \in T\}$ στοχαστική ανέλιξη με πεπερασμένες ροπές 2ας τάξης.

Μεσοσυνάρτηση της $X(t)$ είναι η

$$\mu(t) = E(X(t)),\ t \in T.$$

Συσκέδαση ή Πυρήνας συνδιακύμανσης της $X(t)$ είναι η

$$R(\tau, t) \equiv \mathrm{Cov}(X(\tau), X(t)) = E[(X(\tau) - \mu(\tau))(X(t) - \mu(t))]\ \forall\ \tau, t \in T.$$

Διασπορά της $X(t)$ είναι η

$$V(X(t)) \equiv \sigma^2(t) = E[(X(t) - \mu(t))^2] = R(t, t),\ t \in T. \qquad \blacklozenge$$

Πρόταση 2.1. *Αν η στοχαστική ανέλιξη $\{X(t), t \in T\}$ έχει ανεξάρτητες προσαυξήσεις, τότε*

$$Cov(X(\tau), X(t)) = V(X(\min(\tau, t))), \ \forall\, \tau, t \in T. \qquad \blacklozenge$$

Απόδειξη. Έστω $\tau < t$, τότε

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(X(\tau), X(t)) &= \mathrm{Cov}(X(\tau), X(t) - X(\tau) + X(\tau)) \\ &= \mathrm{Cov}(X(\tau), X(t) - X(\tau)) + \mathrm{Cov}(X(\tau), X(\tau)) \\ &= 0 + V(X(\tau)),\end{aligned}$$

λόγω γνωστής ιδιότητας της συνδιακύμανσης και αφού $\mathrm{Cov}(X(\tau), X(t) - X(\tau)) = 0$ λόγω των ανεξάρτητων προσαυξήσεων.

Ορισμός 2.2. Μια στοχαστική ανέλιξη $\{X(t), t \in T\}$ καλείται ***Στάσιμη κατά συσκέδαση*** ή ***ασθενώς στάσιμη*** αν έχει πεπερασμένες ροπές 2ας τάξης και η $R(t, \tau)$ είναι συνάρτηση της απόλυτης διαφοράς $|\tau - t|$.

Στην περίπτωση αυτή έχουμε ότι

$$V(X(t)) = R(t, t) = \sigma^2$$

δηλ. η διασπορά είναι ανεξάρτητη του t.

Ορισμός 2.3. Μια στοχαστική ανέλιξη $\{X(t), t \in T\}$ καλείται ***Ισχυρά Στάσιμη*** αν η κατανομή των τυχαίων διανυσμάτων

$$(X(t_1), \ldots, X(t_\nu)) \ \ \text{και} \ \ (X(t_1 + h), \ldots, X(t_\nu + h))$$

είναι ίδια για κάθε επιλογή των $t_1, \ldots, t_\nu \in T$, $\nu \geq 1$ και $h \in T$.
(Το σύνολο-δείκτης T είναι : αν $t, h \in T \Rightarrow t + h \in T$).

Παρατηρήσεις

1) Αν η στοχαστική ανέλιξη $\{X(t), t \in T\}$ είναι ισχυρά στάσιμη, τότε πιο απλά εννοούμε ότι οι τ.μ. $X(t), X(t+h)$, έχουν την ίδια κατανομή. Αυτό σημαίνει ότι οι παράμετροι της στοχαστικής ανέλιξης είναι

$$E(X(t)) = \mu \ \ \text{και} \ \ V(X(t)) = \sigma^2,$$

ανεξάρτητες δηλ. του t. Όσο για τη συσκέδαση έχουμε

$$\mathrm{Cov}(X(s), X(t)) \stackrel{s \leq t}{=} E[(X(s) - \mu)(X(t) - \mu)] = R(t - s),$$

δηλ. γενικά η συσκέδαση είναι συνάρτηση της $|t-s|$, άρα μια ισχυρά στάσιμη είναι και ασθενώς στάσιμη.

Το αντίστροφο δεν ισχύει με εξαίρεση τη στοχαστική ανέλιξη Gauss που ορίζεται ως εξής: Η στοχαστική ανέλιξη $\{X(t), t \in T\}$ που είναι τέτοια ώστε $\forall\, k \geq 1$ και πεπερασμένο σύνολο $\{t_1, \ldots, t_k\}$, $t_i \in T$, $i = 1, \ldots, k$ το τυχαίο διάνυσμα

$$(X(t_1), \ldots, X(t_k))$$

ακολουθεί την k-διάστατη Κανονική κατανομή καλείται ***στοχαστική ανέλιξη Gauss***.

2) Οι Στάσιμες στοχαστικές ανελίξεις μπορούν να περιγράψουν φαινόμενα όπως:

   α) Ηλεκτρικούς παλμούς στη θεωρία επικοινωνιών.

   β) Την κατανομή αστεριών ή γαλαξιών, φυτών και ζώων. Εδώ το σύνολο-δείκτης T μπορεί να είναι ο διδιάστατος ή τρισδιάστατος χώρος.

   γ) Το ύψος, έστω $X(t)$, του κύματος στο σημείο t της επιφάνειας της γης. Εδώ το σύνολο-δείκτης T είναι δύο διαστάσεων δηλ. είναι το σύνολο των γεωγραφικών μηκών και πλατών.

   δ) Χρονοσειρές οικονομικών μεγεθών, όπως το ακαθάριστο εθνικό προϊόν, το εθνικό εισόδημα, το μέγεθος της ανεργίας κ.λ.π. για χώρες που η οικονομία τους έχει σχετική σταθερότητα.

Παραδείγματα:

1) Στοχαστική Ανέλιξη Poisson: Γνωρίζουμε ότι $E(X(t)) = V(X(t)) = \lambda t$ και αφού εξ' ορισμού έχει ανεξάρτητες προσαυξήσεις έχουμε

$$R(\tau, t) = V(X(\min(\tau, t))) = \lambda\tau \quad \text{με} \quad \tau < t$$

2) Στοχαστική Ανέλιξη Brown ή Wiener: Εξ ορισμού έχουμε

$$E(X(t)) = 0 \quad \forall\, t \in T \quad \text{και} \quad V(X(t)) = \sigma^2 t$$

και επειδή έχει ανεξάρτητες προσαυξήσεις

$$R(\tau, t) = V(X(\min(\tau, t))) = \sigma^2\tau, \quad \text{με} \quad \tau < t.$$

3) *Έστω η στοχαστική ανέλιξη* $\{X(t), t \geq 0\}$ *που ορίζεται από τη σχέση*

$$\boldsymbol{X(t) = \xi \cos \omega t + \eta \sin \omega t}$$

όπου ξ, *οι ανεξάρτητες ισόνομες τυχαίες μεταβλητές που ακολουθούν την Κανονική κατανομή* $N(0, \sigma^2)$ *και* $\omega \in [0, \pi]$ *σταθερά.*

Χρησιμοποιώντας τα δεδομένα καθώς και τις ιδιότητες της μέσης τιμής και της συνδιακύμανσης έχουμε

$$\begin{aligned} E(X(t)) &= E[(\xi \cos \omega t + \eta \sin \omega t)] \\ &= \cos \omega t E(\xi) + \sin \omega t E(\eta) \\ &= 0, \end{aligned}$$

αφού $E(\xi) = E(\eta) = 0$, και

$$\begin{aligned} R(\tau, t) = E(X(\tau)X(t)) &= E[(\xi \cos \omega \tau + \eta \sin \omega \tau) \cdot (\xi \cos \omega t + \eta \sin \omega t)] \\ &= E(\xi^2 \cos \omega \tau \cos \omega t + \eta^2 \sin \omega \tau \sin \omega t) \\ &= E(\xi^2 \cos \omega \tau \cos \omega t) + E(\eta^2 \sin \omega \tau \sin \omega t) \\ &= (\cos \omega \tau \cos \omega t)\sigma^2 + (\sin \omega \tau \sin \omega t)\sigma^2 \\ &= \sigma^2 \cos \omega(\tau - t). \end{aligned}$$

αφού $V(\xi) = E(\xi^2) = \sigma^2$ και $V(\eta) = E(\eta^2) = \sigma^2$.

Παρατήρηση: Η συσκέδαση είναι συνάρτηση της διαφοράς $\tau - t$ και επειδή $R(\tau, t) = R(t, \tau)$ παρατηρούμε ότι είναι συνάρτηση της $|\tau - t|$.

4) Έστω $\boldsymbol{X(t) = A_0 + A_1 t + A_2 t^2}$, όπου A_0, A_1, A_2 ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με $E(A_i) = V(A_i) = 1$, $i = 0, 1, 2$.

Για τις παραμέτρους της στοχαστικής ανέλιξης $\{X(t), t \geq 0\}$ έχουμε:

$$E(X(t)) = E(A_0) + tE(A_1) + t^2 E(A_2) = 1 + t + t^2,$$

$$V(X(t)) = V(A_0) + t^2 V(A_1) + t^4 V(A_2) = 1 + t^2 + t^4,$$

αφού οι τυχαίες μεταβλητές A_0, A_1, A_2 είναι ανεξάρτητες.

Λόγω ανεξαρτησίας των A_0, A_1, A_2 και από τη σχέση $V(A_i) = E(A_i^2) -$

$E^2(A_i)$ η οποία μας δίνει $E(A_i^2) = 2$ έχουμε:

$$\begin{aligned}R(\tau,t) =&\mathrm{Cov}(X(\tau),X(t)) = E[X(\tau)X(t)] - E(X(\tau))E(X(t)]\\=&E[(A_0 + A_1\tau + A_2\tau^2)(A_0 + A_1t + A_2t^2)]\\&-(1+\tau+\tau^2)(1+t+t^2)\\=&E(A_0^2) + E(A_0A_1t) + E(A_0A_2t^2) + E(A_1A_0\tau)+\\&E(A_1^2\tau t) + E(A_1A_2\tau t^2) + E(A_2^2\tau^2t^2) + E(A_1A_2\tau^2 t)\\&+E(A_2A_0\tau^2) - (1+\tau+\tau^2)(1+t+t^2)\\=&2 + t + t^2 + \tau + 2\tau t + \tau t^2 + \tau^2 + \tau^2 t + 2t^2\tau^2\\&-(1+\tau+\tau^2)(1+t+t^2) = 1 + \tau t + \tau^2 t^2.\end{aligned}$$

5) *Έστω η στοχαστική ανέλιξη* $\boldsymbol{X(t) = \cos(\omega t + \theta)}$, *όπου* $\omega > 0$ *σταθερά και* θ *τ. μ. ομοιόμορφη στο* $(0, 2\pi)$.

Η μεσοσυνάρτηση είναι

$$\begin{aligned}E(X(t)) &= E(\cos(\omega t + \theta))\\&= E(\cos\omega t\cdot\cos\theta - \sin\omega t\cdot\sin\theta)\\&= \cos\omega t E(\cos\theta) - \sin\omega t E(\sin\theta).\end{aligned}$$

Αλλά,

$$E(\cos\theta) = \int_0^{2\pi}\frac{1}{2\pi}\cos\theta d\theta = \left[\frac{1}{2\pi}\sin\theta\right]_0^{2\pi} = 0$$

και όμοια

$$E(\sin\theta) = 0.$$

Άρα

$$E(X(t)) = 0.$$

Η συσκέδαση είναι

$$\begin{aligned}R(\tau,t) =&\mathrm{Cov}(X(\tau),X(t)) = E[\cos(\omega\tau+\theta)\cdot\cos(\omega t+\theta)]\\=&E\left[\frac{1}{2}[\cos(\omega\tau+\theta+\omega t+\theta) + \cos(\omega\tau+\theta-\omega t-\theta)]\right]\\=&E\left[\frac{1}{2}[\cos\omega(\tau+t)\cdot\cos 2\theta - \sin\omega(\tau+t)\sin 2\theta]\right]\\&+E\left[\frac{1}{2}\cos\omega(\tau-t)\right]\\=&\frac{1}{2}\cos\omega(\tau-t),\ \tau<t\end{aligned}$$

αφού $E(\cos 2\theta) = E(\sin 2\theta) = 0$, όπως εξηγήσαμε προηγούμενα. Άρα η συσκέδαση είναι συνάρτηση της διαφοράς των χρόνων δηλ. η στ. αν. $\{X(t), t \geq 0\}$ είναι στάσιμη κατά συσκέδαση.

Τέλος, η διασπορά είναι

$$V(X(t)) = R(t,t) = \frac{1}{2}.$$

6) *Έστω η στοχαστική ανέλιξη*

$$\boldsymbol{Y(t) = X(t+L) - X(t)}$$

όπου $\{X(t), t \geq 0\}$ *στ. ανέλ. Poisson με παράμετρο* λ *και* $L > 0$ *σταθερά.*

Η μεσοσυνάρτηση είναι

$$E(Y(t)) = E(X(t+L) - X(t)) = \lambda(t+L) - \lambda t = \lambda L$$

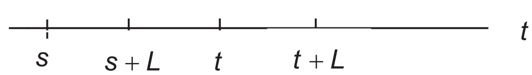
αφού η $X(t)$ είναι Poisson.

Η συσκέδαση είναι

$$R(s,t) = \mathrm{Cov}(Y(s), Y(t)) = \mathrm{Cov}(X(s+L) - X(s), X(t+L) - X(t)), \ s < t.$$

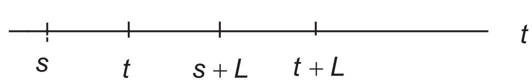
Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

α) $s + L < t$



Από τον ορισμό της Poisson έχουμε ότι οι προσαυξήσεις $X(s+L) - X(s), X(t+L) - X(t)$, είναι ανεξάρτητες, άρα $R(s,t) = 0$.

β) $s + L > t$



Τότε προσθέτοντας και αφαιρώντας τη στοχαστική ανέλιξη για κατάλληλα χρονικά διαστήματα κατασκευάζουμε ανεξάρτητες προσαυξήσεις ως εξής:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Cov}(X(s+L)-X(s)+X(t)-X(t),X(t+L)-X(t))\\
=&\mathrm{Cov}(X(t)-X(s),X(t+L)-X(t))\\
&+\mathrm{Cov}(X(s+L)-X(t),X(t+L)-X(t))\\
=&0+\mathrm{Cov}(X(s+L)-X(t),X(t+L)-X(t)+X(s+L)-X(s+L))\\
=&\mathrm{Cov}(X(s+L)-X(t),X(t+L)-X(s+L))\\
&+\mathrm{Cov}(X(s+L)-X(t),X(s+L)-X(t))\\
=&0+V(X(s+L)-X(t))=V(X(s+L-t)-X(0))\\
=&V(X(s+L-t))=\lambda(s+L-t)
\end{aligned}$$

αφού $X(0)=0$ εξ' ορισμού.

Γενικά έχουμε

$$\mathrm{Cov}(Y(s),Y(t))=\begin{cases}\lambda[L-|t-s|], & \text{αν}\quad |t-s|\le L\\ 0, & \text{αν}\quad |t-s|>L.\end{cases}$$

Προφανώς, η διασπορά είναι $V(Y(t))=\lambda L$. Χρησιμοποιώντας τη σχέση $V(Y(t))=E(Y^2(t))-[E(Y(t))]^2$ εύκολα καταλήγουμε στο ίδιο συμπέρασμα.

7) *Έστω* $\boldsymbol{Z(t)=\sin\left(\frac{2\pi}{L}t\right)+Y(t)}$, *όπου* $Y(t)$ *όπως στο Παράδειγμα 6.* Τότε

$$E(Z(t))=\sin\left(\frac{2\pi}{L}t\right)+\lambda L,$$

$$\begin{aligned}R(s,t)=\mathrm{Cov}(Z(s),Z(t))&=\mathrm{Cov}\left(\sin\left(\frac{2\pi}{L}s\right)+Y(s),\sin\left(\frac{2\pi}{L}t\right)+Y(t)\right)\\&=\mathrm{Cov}(Y(s),Y(t)).\end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι δεν είναι αναγκαίο μία στοχαστική ανελίξη να έχει σταθερή μεσοσυνάρτηση για να είναι στάσιμη κατά συσκέδαση.

3. Ασκήσεις

Για τις στοχαστικές ανελίξεις $\{X(t),t\ge 0\}$ από 1-5 να προσδιορισθούν

α) η μεσοσυνάρτηση $m(t)=E(X(t))$ και β) η συσκέδαση $R(t,s) = \mathrm{Cov}(X(t), X(s))$.

1. $X(t) = A + Bt$, όπου A, B ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές που ακολουθούν την ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $[0,1]$.

2. $X(t) = W(t+1) - W(t)$, όπου $\{W(t), t \geq 0\}$ η ανέλιξη Brown ή Wiener με παράμετρο σ^2.

3. $X(t) = A + W(t)$, όπου $A > 0$ σταθερά και $\{W(t), t \geq 0\}$ η στοχαστική ανέλιξη Brown.

4. $X(t) = At + W(t)$, όπου A τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί την Κανονική κατανομή $N(\mu, \sigma^2)$ ανεξάρτητη της στοχαστικής ανέλιξης Brown $\{W(t), t \geq 0\}$.

5. $X(t) = \cos(At + \theta)$, όπου θ τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί την ομοιόμορφη κατανομή στο $[0,1]$ ανεξάρτητη της A, που είναι επίσης τυχαία μεταβλητή Cauchy, δηλ. έχει σ.π.π. $f(a) = \dfrac{1}{\pi(1+a^2)}$.

6. Έστω η στοχαστική ανέλιξη $\{X_n, n \geq 1\}$ που δίνεται από τη σχέση $X_n = \cos(nU)$, όπου U ομοιόμορφη τυχαία μεταβλητή στο διάστημα $[-\pi, \pi]$. Να δειχθεί ότι η X_n είναι ασθενώς στάσιμη, αλλά όχι στάσιμη.

7. Μία στοχαστική ανέλιξη Brown ή Wiener, έστω W, καλείται τυποποιημένη αν έχει διασπορά 1. Έστω η W και α μία θετική σταθερά. Να δειχθεί ότι οι παρακάτω στοχαστικές ανελίξεις είναι τυποποιημένες Brown ή Wiener

α) $\alpha W\left(\dfrac{t}{\alpha^2}\right)$,

β) $W(t+\alpha) - W(\alpha)$,

γ) $V = tW\left(\dfrac{1}{t}\right)$, $t > 0$, $V(0) = 0$.

4. Βιβλιογραφία

Bhat, N., *Elements of Applied Stochastic Processes*, Wiley, N.Y. 1984.

Cinlar, E., *Introduction to Stochastic Processes*, Prentice-Hall 1975.

Cox, D. R. And Miller H. D.,*The Theory of Stochastic Processes* Chapman and Hall, London, 1965.

Durret, R., *Essentials of Stochastic Processes*, Springer, 1999.

Doob, J., *Stochastic Processes* J. Wiley, N.Y., 1953

Feller, W., *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, Vol.1, J. Wiley, N.Y., 1968.

Feller, W., *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, Vol.2, 2nd ed., J. Wiley, N.Y., 1971.

Κάκουλλος, Θ., *Στοχαστικές Ανελίξεις*, 1978.

Karlin, S., Taylor, H.D., *A first course in Stochastic Processes*, Academic Press, 2nd edition, 1975.

Parzen, E., Stochastic Processes, Holden-Day, 1962.

Resnick, S., *Adventures in Stochastic Processes*, Birkhauser, Boston, MA. 1992.

Ross, S., *Stochastic Processes*, 2nd ed., Wiley, 1996.

Κεφαλαιο 2

Αλυσιδες Markov σε Διακριτο Χρονο

1. Βασικοί Ορισμοί

Ορισμός 1.1. *Μια στοχαστική ανέλιξη* $\{X(t), t \in T\}$ *καλείται* ***Μαρκοβιανή*** *αν ισχύει η σχέση*

$$\begin{aligned} &P(X(t_\nu) \leq x_\nu | X(t_{\nu-1}) = x_{\nu-1}, \dots, X(t_1) = x_1) \\ &= P(X(t_\nu) \leq x_\nu | X(t_{\nu-1}) = x_{\nu-1}) \end{aligned}$$

για κάθε επιλογή $t_1 < t_2 < \cdots < t_\nu \in T$ *και κάθε* $x_1, \dots, x_\nu \in \Omega$, $\nu > 2$.

Ορισμός 1.2. *Μία στοχαστική ανέλιξη* $\{X(t), t \in T\}$ *που έχει τη Μαρκοβιανή ιδιότητα και χώρο καταστάσεων διακριτό καλείται* ***αλυσίδα Markov (ή Μαρκοβιανή αλυσίδα)****.*

Μία στοχαστική ανέλιξη $\{X(t), t \in T\}$ με Μαρκοβιανή ιδιότητα μπορεί να ταξινομηθεί με βάση το σύνολο-δείκτη T και το χώρο καταστάσεων Ω ως εξής

		Χώρος Καταστάσεων	
		Διακριτός	**Συνεχής**
Σύνολο-δείκτης	**Διακριτός**	Αλυσίδες σε Διακριτό χρόνο	Στ. ανέλ. Markov σε Διακριτό χρόνο
	Συνεχής	Αλυσίδες σε Συνεχή χρόνο	Στ. ανελ. Markov σε Συνεχή χρόνο

Για Μαρκοβιανές αλυσίδες σε διακριτό χρόνο θεωρούμε συνήθως ως σύνολο-δείκτη το $T = \{0, 1, 2, \dots\}$ και γράφουμε X_ν αντί για $X(\nu)$, $\nu = 0, 1, \dots$. Με $X_\nu = \kappa$ δηλώνουμε ότι η στοχαστική ανέλιξη βρίσκεται στην κατάσταση κ τη χρονική στιγμή ν. Η πιθανότητα

$$p_{ij}(\nu - 1, \nu) = P(X_\nu = j | X_{\nu-1} = i) \tag{1.1}$$

καλείται ***πιθανότητα μεταπήδησης πρώτης τάξης***].

Αν

$$p_{ij}(\nu-1,\nu)=p_{ij} \quad \forall\, \nu=1,2,\ldots, \tag{1.2}$$

τότε η αλυσίδα καλείται ***Ομογενής ή Μαρκοβιανή αλυσίδα με στάσιμες πιθανότητες μεταπήδησης***, αφού η δεσμευμένη πιθανότητα στην (1.2) είναι ανεξάρτητη του ν.

Στο σημείο αυτό πρέπει να τονίσουμε ότι είναι διαφορετική έννοια η στασιμότητα μιας Μαρκοβιανής αλυσίδας, αφού θα πρέπει να ισχύει η σχέση

$$P(X_0=i_0,X_1=i_1,\ldots,X_\nu=i_\nu)=P(X_m=i_0,X_{m+1}=i_1,\ldots,X_{\nu+m}=i_\nu),$$

$\forall \nu,m\in\mathbb{N}$ και $i_0,i_1,\ldots,i_\nu\in\Omega$

Θα ασχοληθούμε κυρίως με ομογενείς Μαρκοβιανές αλυσίδες. Θεωρώντας ως χώρο καταστάσεων το σύνολο $\Omega=\{0,1,2,\ldots\}$ ο πίνακας

$$\boldsymbol{P}=\begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ \\ i \\ \\ \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 2 & & i & \cdots \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccccc} p_{00} & p_{01} & p_{02} & \cdots & & \\ p_{10} & p_{11} & p_{12} & \cdots & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ p_{i0} & p_{i1} & p_{i2} & \cdots & p_{ii} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{array}\right] \end{array} \tag{1.3}$$

καλείται ***πίνακας πιθανοτήτων μεταπήδησης πρώτης τάξης***. Τα στοιχεία του πίνακα έχουν τις εξής ιδιότητες:

$$p_{ij}\geq 0, \quad \forall\, i,j=0,1,\ldots$$

$$\sum_{j=0}^{\infty}p_{ij}=1, \quad i=0,1,\ldots.$$

Ο πίνακας $\boldsymbol{P}=(p_{ij})$ του οποίου τα στοιχεία έχουν τις παραπάνω ιδιότητες καλείται ***Στοχαστικός***.

Αν επιπλέον

$$\sum_{i=0}^{\infty}p_{ij}=1, \quad j=0,1,\ldots,$$

τότε ο $\boldsymbol{P}$ καλείται ***Διπλά Στοχαστικός***.

Αν γνωρίζουμε τις πιθανότητες μεταπήδησης πρώτης τάξης καθώς και την αρχική κατανομή

$$\alpha_\kappa=P(X_0=\kappa), \quad \kappa\in\Omega, \tag{1.4}$$

τότε μπορούμε να προσδιορίσουμε την κατανομή της αλυσίδας, δηλ. μπορούμε να προσδιορίσουμε τις ν-διάστατες κατανομές

$$P(X_0 = i_0,\ X_1 = i_1,\ \dots,\ X_\nu = i_\nu),\ i_s \in \Omega,\ s = 0, \dots, \nu,\ \nu = 1, 2, \dots,\ .$$

Εφαρμόζοντας τον Πολλαπλασιαστικό Τύπο της δεσμευμένης πιθανότητας έχουμε

$$\begin{aligned} P(X_0 = i_0, X_1 = i_1, \dots, X_\nu = i_\nu) =& P(X_\nu = i_\nu | X_{\nu-1} = i_{\nu-1}, \dots, X_0 = i_0) \cdot \\ & \cdot P(X_{\nu-1} = i_{\nu-1}, \dots, X_0 = i_0) \\ \underset{\text{Markov}}{\overset{\text{ιδ.}}{=}} & P(X_\nu = i_\nu | X_{\nu-1} = i_{\nu-1}) \cdot P(X_{\nu-1} = i_{\nu-1}, \dots, X_0 = i_0), \end{aligned}$$

με την προϋπόθεση ότι $P(X_0 = i_0, X_1 = i_1, \dots, X_\nu = i_\nu) > 0$. Συνεχίζοντας την ίδια διαδικασία έχουμε ότι

$$\begin{aligned} & P(X_0 = i_0, X_1 = i_1, \dots, X_\nu = i_\nu) \\ & \quad = P_{i_{\nu-1} i_\nu}(\nu - 1, \nu) \cdot P_{i_{\nu-2} i_{\nu-1}}(\nu - 2, \nu - 1) \cdots P_{i_0 i_1}(0, 1) \cdot \alpha_{i_0}, \end{aligned} \tag{1.5}$$

με $\alpha_{i_0} = P(X_0 = i_0)$.

Αν η αλυσίδα είναι ομογενής, τότε γράφουμε

$$P(X_0 = i_0, X_1 = i_1, \dots, X_\nu = i_\nu) = \alpha_{i_0} P_{i_0 i_1} P_{i_1 i_2} \cdots P_{i_{\nu-1} i_\nu}. \tag{1.6}$$

Παραδείγματα:

1) Μοντέλο Ehrenfest

Έστω μία κάλπη που περιέχει κ σφαίρες καθεμία από τις οποίες είναι μαύρη ή κόκκινη. Σε κάθε πείραμα (βήμα ή χρονική στιγμή) εκλέγουμε μία σφαίρα στην τύχη και την αντικαθιστούμε με μία άλλη του άλλου χρώματος. Έστω X_ν ο αριθμός των μαύρων σφαιρών στην κάλπη αμέσως μετά το ν-οστό πείραμα.

Η $\{X_\nu, \nu = 1, 2, \dots\}$ είναι μία Μαρκοβιανή αλυσίδα. Ο χώρος καταστάσεων της είναι $\Omega = \{0, 1, 2, \dots, \kappa\}$ και οι πιθανότητες μεταπήδησης πρώτης τάξης είναι

$$p_{i,i+1} = \frac{\kappa - i}{\kappa}, \quad p_{i,i-1} = \frac{i}{\kappa}.$$

Η $\{X_\nu, \nu = 1, 2, \dots\}$ έχει την ιδιότητα Markov αφού η γνώση της X_ν μας επιτρέπει να καθορίσουμε την κατανομή της $X_{\nu+1}$, π.χ. αν $X_\nu = i$ αυτό σημαίνει ότι η κάλπη περιέχει i μαύρες σφαίρες και $\kappa - i$ κόκκινες και επομένως η κατανομή της $X_{\nu+1}$ είναι ένα στοιχειώδες πρόβλημα πιθανοτήτων.

Ο πίνακας P πιθανοτήτων μεταπήδησης πρώτης τάξης είναι

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix} p_{00} & p_{01} & \cdots & & p_{0\kappa} \\ p_{10} & p_{11} & \cdots & & p_{1\kappa} \\ p_{20} & p_{21} & \cdots & & p_{2\kappa} \\ & & & & \\ p_{\kappa 0} & p_{\kappa 1} & \cdots & p_{\kappa,\kappa-1} & p_{\kappa\kappa} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & & & 0 \\ \frac{1}{\kappa} & 0 & \frac{\kappa-1}{\kappa} & 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & \frac{2}{\kappa} & 0 & \frac{\kappa-2}{\kappa} & 0 & \cdots & 0 \\ & & & & & & \\ 0 & 0 & \cdots & & & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Το μοντέλο αυτό σε πολυπλοκότερη μορφή χρησιμοποιήθηκε από τον Ehrenfest για τη μελέτη της μεταφοράς θερμότητας ανάμεσα στα μόρια αερίου.

Παρατηρούμε ότι η αλυσίδα είναι ομογενής. Ακόμα στις καταστάσεις 0 και κ εμφανίζονται ανακλαστικά φράγματα, δηλ. με πιθανότητα 1 η αλυσίδα μεταπηδά από την κατάσταση 0 στην 1 και από την κ στην $\kappa-1$.

2) Μοντέλο κάλπης του Polya

Έστω μία κάλπη που περιέχει μ μαύρες και κ κόκκινες σφαίρες. Σε κάθε πείραμα (βήμα) εκλέγουμε μία σφαίρα στην τύχη και την τοποθετούμε πάλι στην κάλπη προσθέτοντας α σφαίρες του ίδιου χρώματος μ' αυτήν που εκλέξαμε ($\alpha>0$). *Έστω X_ν ο αριθμός των μαύρων σφαιρών της κάλπης αμέσως μετά το ν-οστό πείραμα.*

Η $\{X_\nu, \nu=1,2,\ldots\}$ είναι Μαρκοβιανή αλυσίδα με χώρο καταστάσεων $\Omega=\{\mu,\mu+\alpha,\ldots,\mu+\nu\alpha,\ldots\}$ και πιθανότητες μεταπήδησης πρώτης τάξης

$$\begin{aligned} p_{ij}(\nu,\nu+1)=P(X_{\nu+1}=j|X_\nu=i) &= \frac{i}{\mu+\kappa+\nu\alpha}, & j=i+\alpha \\ &= 1-\frac{i}{\mu+\kappa+\nu\alpha}, & j=i \\ &= 0, \text{ για} & j\neq i,\ i+\alpha. \end{aligned}$$

Η $\{X_\nu, \nu=1,2,\ldots\}$ έχει την ιδιότητα Markov, αλλά παρατηρούμε ότι οι πιθανότητες $p_{ij}(\nu,\nu+1)$ εξαρτώνται από το ν δηλ. η αλυσίδα **δεν** είναι ομογενής.

3) Μοντέλο διάχυσης Bernoulli-Laplace

Σε δύο κάλπες, έστω I και II, τοποθετούνται N μαύρες και N άσπρες σφαίρες τυχαία, έτσι ώστε κάθε κάλπη να περιέχει N σφαίρες. Σε κάθε πείραμα (βήμα) μία σφαίρα εκλέγεται στην τύχη από κάθε κάλπη και ανταλλάσσονται. Έστω X_ν ο αριθμός των άσπρων σφαιρών της κάλπης I αμέσως μετά το ν-οστό βήμα.

Η $\{X_\nu,\ \ \nu=1,2,\ldots\}$ είναι Μαρκοβιανή αλυσίδα με χώρο καταστάσεων $\Omega=\{0,1,\ \ldots,\ N\}$. Η αλυσίδα έχει την ιδιότητα Markov αφού η γνώση της X_ν μας επιτρέπει τον προσδιορισμό της κατανομής της $X_{\nu+1}$, π.χ. έστω ότι $X_\nu=i$, τότε η σύνθεση των δύο καλπών είναι

I	II
$i(a)$	$N-i(a)$
$N-i(\mu)$	$i(\mu)$

Για να υπολογίσουμε τις πιθανότητες μεταπήδησης πρώτης τάξης ορίζουμε τις εξής τυχαίες μεταβλητές:

$$Y_\nu = \begin{cases} 0 \text{ αν η σφαίρα που εκλέγεται από την I κατά το } \nu\text{-οστό βήμα είναι άσπρη} \\ 1 \text{ αν η σφαίρα που εκλέγεται από την I κατά το } \nu\text{-οστό βήμα είναι μαύρη} \end{cases}$$

$$Y'_\nu = \begin{cases} 0 \text{ αν η σφαίρα που εκλέγεται από την II κατά το } \nu\text{-οστό βήμα είναι άσπρη} \\ 1 \text{ αν η σφαίρα που εκλέγεται από την II κατά το } \nu\text{-οστό βήμα είναι μαύρη.} \end{cases}$$

Είναι φανερό ότι οι τ.μ. Y_ν, Y'_ν είναι ανεξάρτητες. Έχουμε

$$\begin{aligned} p_{i,i-1} &= P(X_{\nu+1} = i-1 | X_\nu = i) = P(Y_{\nu+1} = 0 \text{ και } Y'_{\nu+1} = 1) \\ &= P(Y_{\nu+1} = 0) P(Y'_{\nu+1} = 1) = \frac{i}{N} \cdot \frac{i}{N} = \left(\frac{i}{N}\right)^2 \\ p_{i,i+1} &= P(X_{\nu+1} = i+1 | X_\nu = i) = P(Y_{\nu+1} = 1 \text{ και } Y'_{\nu+1} = 0) = \left(\frac{N-i}{N}\right)^2 \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} p_{i,i} &= P(X_{\nu+1} = i | X_\nu = i) = P(\{Y_{\nu+1} = 0 \text{ και } Y'_{\nu+1} = 0\} \text{ ή } \{Y_{\nu+1} = 1 \text{ και } Y'_{\nu+1} = 1\}) \\ &= \frac{i}{N}\frac{N-i}{N} + \frac{N-i}{N}\frac{i}{N} = 2\frac{i}{N}\left(1 - \frac{i}{N}\right). \end{aligned}$$

Ο πίνακας $\boldsymbol{P}$ έχει την εξής μορφή

$$\boldsymbol{P} = \begin{array}{c|ccccccc|} & 0 & 1 & 2 & & \cdots & & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & & \cdots & & 0 \\ 1 & \left(\frac{1}{N}\right)^2 & 2\frac{1}{N}\left(1-\frac{1}{N}\right) & \left(\frac{N-1}{N}\right)^2 & 0 & \cdots & & 0 \\ 2 & & & & & & & \\ \vdots & & & & & & & \\ N & 0 & 0 & 0 & & \cdots & 1 & 0 \end{array}$$

Οι καταστάσεις 0 και N καλούνται ανακλαστικά φράγματα. Επίσης παρατηρούμε ότι οι πιθανότητες μεταπήδησης δεν εξαρτώνται από το ν, δηλ. τη χρονική στιγμή που γίνεται το πείραμα (βήμα), άρα έχουμε ομογενή αλυσίδα Markov ή Μαρκοβιανή αλυσίδα με στάσιμες πιθανότητες μεταπήδησης.

4) Ροή Επιτυχιών

Έστω μία ακολουθία δοκιμών Bernoulli με πιθανότητα επιτυχίας p και αποτυχίας $q = 1 - p$. Έστω $X_0 \equiv 0$ και

$$\begin{aligned} &X_\nu = 0 \ \text{αν η } \nu\text{-οστή δοκιμή είναι αποτυχία} \\ &X_\nu = \kappa \ \text{αν η τελευταία αποτυχία συνέβη στη } \nu - \kappa \text{ δοκιμή,} \end{aligned}$$

για $\kappa = 1, 2, \ldots, \nu$, $\nu = 1, 2, \ldots$. Το ενδεχόμενο "$X_\nu = \kappa$" σημαίνει ότι με τη ν-οστή δοκιμή συμπληρώνεται μια ροή κ επιτυχιών . Ο πίνακας $\boldsymbol{P}$ είναι

$$\boldsymbol{P} = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ \vdots \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots \end{array} \\ \begin{bmatrix} q & p & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ q & 0 & p & 0 & 0 & \cdots \\ q & 0 & 0 & p & 0 & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \end{array}$$

αφού

$$p_{i0} = P(X_{\nu+1} = 0 | X_\nu = i) = P(\text{αποτυχίας}) = q$$

$$p_{i,i+1} = P(X_{\nu+1} = i + 1 | X_\nu = i) = P(\text{επιτυχίας}) = p, \quad i = 0, 1, \ldots \ .$$

5) Τυχαίοι Περίπατοι

Το μοντέλο του τυχαίου περίπατου που περιγράψαμε στο Κεφάλαιο 1 μπορεί να τροποποιηθεί κατάλληλα προκειμένου να περιγράψει συγκεκριμένα προβλήματα όπως φαίνεται στη συνέχεια.

Αν θεωρήσουμε ότι το σωματίδιο μπορεί να παραμείνει στη θέση του και ότι ο χώρος καταστάσεων είναι $\Omega = \{0, 1, \ldots\}$, έχουμε τον εξής πίνακα πιθανοτήτων μεταπήδησης πρώτης τάξης.

$$\boldsymbol{P}_1 = \begin{bmatrix} r_0 & p_0 & 0 & 0 & \cdot & \cdots \\ q_1 & r_1 & p_1 & 0 & \cdot & \cdots \\ 0 & q_2 & r_2 & p_2 & 0 & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix},$$

όπου

$$\begin{aligned} &P(X_{\nu+1} = i + 1 | X_\nu = i) = p_i, \quad P(X_{\nu+1} = i - 1 | X_\nu = i) = q_i \\ &P(X_{\nu+1} = i | X_\nu = i) = r_i, \qquad i = 1, 2, \ldots \end{aligned}$$

και

$$P(X_{\nu+1}=0|X_\nu=0)=r_0, \quad P(X_{\nu+1}=1|X_\nu=0)=p_0.$$

με $p_i+r_i+q_i=1$, $i=1,2,\ldots$, και $r_0+p_0=1$.

Παραλλαγές του πίνακα $\boldsymbol{P}_1$ είναι οι εξής:

$$\boldsymbol{P}_2=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots \\ q & 0 & p & \cdots \\ 0 & & & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{P}_3=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & & \cdots & 0 \\ q & 0 & p & & \cdots & 0 \\ 0 & q & 0 & p & & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & & & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{P}_4=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & \cdot & 0 \\ q & 0 & p & 0 & \cdots & \cdot & 0 \\ 0 & q & 0 & p & \cdots & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & 0 \\ \cdot & 0 & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & 0 \\ \cdot & 0 & \cdot & \cdot & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Οι πίνακες $\boldsymbol{P}_3, \boldsymbol{P}_4$ έχουν χώρο καταστάσεων πεπερασμένο, έστω $\Omega=\{0,1,\ldots,N\}$.

Στην περίπτωση του $\boldsymbol{P}_2$ η κατάσταση $\{0\}$ καλείται κατάσταση απορρόφησης καθώς και οι καταστάσεις $\{0,N\}$ του $\boldsymbol{P}_3$, ενώ στον $\boldsymbol{P}_4$ οι καταστάσεις $(0,N)$ είναι ανακλαστικά φράγματα.

Οι ***τυχαίοι περίπατοι*** με πίνακες ***πιθανοτήτων μεταπήδησης*** $\boldsymbol{P}_2, \boldsymbol{P}_3$ μπορούν να περιγράψουν το κεφάλαιο ενός παίκτη ή και δύο παικτών.

2. Πιθανότητες μεταπήδησης ανωτέρας τάξεως - Εξισώσεις Chapman - Kolmogorov

Η πιθανότητα

$$p_{ij}(m,m+\nu)=P(X_{\nu+m}=j|X_m=i), \quad \begin{matrix} m\geq 0 \\ \nu\geq 0 \end{matrix} \tag{2.1}$$

καλείται ***πιθανότητα μεταπήδησης ν-οστής τάξης***.

Αν η αλυσίδα είναι ομογενής, τότε γράφουμε

$$p_{ij}(\nu)=P(X_{\nu+m}=j|X_m=i),\ m=0,1,\ldots,\ \nu\geq 1. \tag{2.2}$$

Με $\boldsymbol{P}^{(\nu)}$ συμβολίζουμε τον πίνακα πιθανοτήτων μεταπήδησης ν-οστής τάξης, ο οποίος για την περίπτωση που έχουμε ως χώρο καταστάσεων τον $\Omega = \{0, 1, \ldots\}$ είναι

$$\boldsymbol{P}^{(\nu)} = \begin{bmatrix} p_{00}(\nu) & p_{01}(\nu) & \cdots & p_{0i}(\nu) & \cdots \\ p_{10}(\nu) & p_{11}(\nu) & \cdots & p_{1i}(\nu) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ p_{i0}(\nu) & p_{i1}(\nu) & \cdots & p_{ii}(\nu) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}.$$

Η πιθανότητα

$$p_\kappa(\nu) = P(X_\nu = \kappa), \ \kappa \in \Omega, \ \nu \geq 1 \tag{2.3}$$

καλείται ***απόλυτη πιθανότητα***.

Αν γνωρίζουμε την αρχική κατανομή $\{\alpha_\kappa\}$ και τις $p_{ij}(\nu)$, τότε μπορούμε να προσδιορίσουμε τις απόλυτες πιθανότητες χρησιμοποιώντας το Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας. Είναι

$$p_\kappa(\nu) = \sum_{i \in \Omega} \alpha_i p_{i\kappa}(\nu). \tag{2.4}$$

Αν $\alpha_i = 1$, τότε $p_\kappa(\nu) = p_{i\kappa}(\nu)$.

Ο υπολογισμός των πιθανοτήτων $p_{ij}(\nu)$ διευκολύνεται σημαντικά με τη χρησιμοποίηση των εξισώσεων Chapman-Kolmogorov, οι οποίες μας επιτρέπουν να τις εκφράσουμε συναρτήσει των πιθανοτήτων μεταπήδησης πρώτης τάξης. Για τη γενική τους μορφή ισχύει το παρακάτω θεώρημα:

Θεώρημα 2.1. *Για κάθε $m < r < \nu$ και κάθε ζεύγος καταστάσεων (i, j) ισχύει η σχέση*

$$p_{ij}(m, \nu) = \sum_{\kappa \in \Omega} p_{i\kappa}(m, r) p_{\kappa j}(r, \nu). \tag{2.5}$$

Απόδειξη. Έστω τα ενδεχόμενα

$$A : X_\nu = j, \ B : X_m = i, \ A_\kappa : X_r = \kappa.$$

Είναι

$$p_{ij}(m,\nu) = P(X_\nu = j | X_m = i) = P(A|B) \overset{\text{Θ.Ο.Π.}}{=} \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{\sum_{\kappa \in \Omega} P(ABA_\kappa)}{P(B)}$$

$$\underset{\text{Markov}}{\overset{\text{ιδ.}}{=}} \sum_{\kappa \in \Omega} P(A_\kappa|B) P(A|A_\kappa) = \sum_{\kappa \in \Omega} p_{i\kappa}(m, r) p_{\kappa j}(r, \nu).$$

♦

Για ομογενείς αλυσίδες έχουμε

$$p_{ij}(2) = \sum_{\kappa \in \Omega} p_{i\kappa} p_{\kappa j}$$

$$p_{ij}(\nu) = \sum_{\kappa \in \Omega} p_{i\kappa} p_{\kappa j}(\nu - 1)$$

$$p_{ij}(m + \nu) = \sum_{\kappa \in \Omega} p_{i\kappa}(m) p_{\kappa j}(\nu).$$

Παρατηρούμε ότι, αν $\boldsymbol{P}^{(\nu)} = (p_{ij}(\nu))$ ο πίνακας πιθανοτήτων μεταπήδησης ν-οστής τάξεως, τότε οι παραπάνω σχέσεις είναι ισοδύναμες με

$$\boldsymbol{P}^{(2)} = \boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{P},\ \boldsymbol{P}^{(\nu)} = \boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{P}^{(\nu-1)},\ \boldsymbol{P}^{(m+\nu)} = \boldsymbol{P}^{(m)} \cdot \boldsymbol{P}^{(\nu)}.$$

Ισχύει δηλ. γενικά

$$\boldsymbol{P}^{(\nu)} = \boldsymbol{P}^{\nu}, \quad \nu = 1, 2, \ldots. \tag{2.6}$$

Σημειώνουμε ότι εξ ορισμού είναι

$$p_{ij}(0) = \begin{cases} 1 & \text{αν} \quad i = j \\ 0 & \text{αν} \quad i \neq j. \end{cases}$$

Στη συνέχεια θα γράφουμε για συντομία $C - K$ όταν αναφερόμαστε στις εξισώσεις Chapman-Kolmogorov.

Παρατήρηση: Οι εξισώσεις $C - K$ ισχύουν και για αλυσίδες σε συνεχή χρόνο. Στην περίπτωση αυτή γράφονται ως εξής:

$$p_{ij}(t + s) = \sum_{\kappa} p_{i\kappa}(t) p_{\kappa j}(s),\ t \geq 0, s \geq 0.$$

Παραδείγματα:

1. *Ροή Επιτυχιών*

Χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις $C - K$ θα υπολογίσουμε τον πίνακα $\boldsymbol{P}^{(2)}$. Είναι

$$\begin{aligned} p_{00} &\overset{\text{C-K}}{=} \sum_{\kappa} p_{0\kappa} p_{\kappa 0} = p_{00} p_{00} + p_{01} p_{10} \\ &= q \cdot q + pq = q(p + q) = q, \\ p_{01}(2) &\overset{\text{C-K}}{=} \sum_{\kappa} p_{0\kappa} p_{\kappa 1} = p_{00} p_{01} + p_{01} p_{11} = qp + 0 = qp, \\ p_{02}(2) &\overset{\text{C-K}}{=} \sum_{\kappa} p_{0\kappa} p_{\kappa 2} = p_{00} p_{02} + p_{01} p_{12} = 0 + p^2 = p^2 \end{aligned}$$

και γενικά για $i = 1, 2, \ldots$

$$\begin{aligned}
p_{i\,0}(2) &\overset{\text{C-K}}{=} \sum_{\kappa} p_{i\kappa} p_{\kappa 0} = p_{i\,0} p_{0\,0} + p_{i\,i+1} p_{i+1\,0} \\
&= q^2 + pq = q(p+q) = q, \\
p_{i\,1}(2) &\overset{\text{C-K}}{=} \sum_{\kappa} p_{i\kappa} p_{\kappa 1} = p_{i\,0} p_{0\,1} + p_{i\,i+1}, p_{i+1\,1} = qp + 0 = qp,
\end{aligned}$$

$$p_{i\,i+2}(2) \overset{\text{C-K}}{=} \sum_{\kappa} p_{i\kappa} p_{\kappa i+2} = p_{i\,0} p_{0\,i+2} + p_{i\,i+1} p_{i+1\,i+2} = 0 + p^2,$$

Άρα ο πίνακας $\boldsymbol{P}^{(2)}$ έχει τη μορφή

$$\boldsymbol{P}^{(2)} = \begin{bmatrix}
q & qp & p^2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots \\
q & qp & 0 & p^2 & 0 & \cdots & 0 & \cdots \\
q & qp & & & & \cdots & & \\
q & qp & & \cdot & \cdot & \cdot & & \\
\vdots & \vdots & & \cdot & \cdot & \cdot & & \\
q & qp & & \cdot & \cdot & \cdot & & \\
\vdots & \vdots & & & & & &
\end{bmatrix}.$$

Χρησιμοποιώντας τις παραπάνω πιθανότητες μπορούμε να υπολογίσουμε τον πίνακα $\boldsymbol{P}^{(3)}$. Για παράδειγμα,

$$\begin{aligned}
p_{00}(3) &\overset{\text{C-K}}{=} \sum_{\kappa} p_{0\kappa} p_{\kappa 0}(2) = p_{00} p_{00}(2) + p_{01} p_{10}(2) \\
&= qq + pq + q(q+p) = q \\
p_{i\,0}(3) &= \sum_{\kappa} p_{i\kappa} p_{\kappa 0}(2) = p_{i\,0} p_{00}(2) + p_{i\,i+1} p_{i+1\,0}(2) \\
&= qq + pq = q, \quad i = 1, 2, \ldots.
\end{aligned}$$

2) Τυχαίοι περίπατοι

Θεωρώντας τους πίνακες $\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_2, \boldsymbol{P}_3$ και $\boldsymbol{P}_4$ (σελ. 71) ας υπολογίσουμε την πιθανότητα $p_{11}(2)$.

α) Για τον $\boldsymbol{P}_1$ έχουμε

$$\begin{aligned}
p_{11}(2) &\overset{\text{C-K}}{=} \sum_{\kappa} p_{1\kappa} p_{\kappa 1} = p_{11} p_{11} + p_{10} p_{01} + p_{12} p_{21} \\
&= r_1^2 + q_1 p_0 + p_1 q_2.
\end{aligned}$$

β) Για τους $\boldsymbol{P}_2$ και $\boldsymbol{P}_3$ έχουμε

$$\begin{aligned} p_{11}(2) &\overset{\text{C-K}}{=} \sum_{\kappa} p_{1\kappa} p_{\kappa 1} = p_{10} p_{01} + p_{12} p_{21} \\ &= q \cdot 0 + p \cdot q = pq. \end{aligned}$$

γ) Για τον $\boldsymbol{P}_4$ είναι

$$\begin{aligned} p_{11}(2) &\overset{\text{C-K}}{=} \sum_{\kappa} p_{1\kappa} p_{\kappa 1} = p_{10} p_{01} + p_{12} p_{21} \\ &= q \cdot 1 + pq = q + pq. \end{aligned}$$

Ποια είναι η πιθανότητα $p_{11}(3)$ για τους παραπάνω τυχαίους περίπατους;

3. Δικατάστατες Αλυσίδες

Έστω μία Μαρκοβιανή αλυσίδα με χώρο καταστάσεων $\Omega = \{0, 1\}$ και πίνακα πιθανοτήτων μεταπήδησης πρώτης τάξης

$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} p_{00} & p_{01} \\ p_{10} & p_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - p_0 & p_0 \\ 1 - p_1 & p_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_0 & p_0 \\ q_1 & p_1 \end{bmatrix}.$$

Όπως φαίνεται από τον πίνακα $\boldsymbol{P}$ οι αντίστοιχες δοκιμές Bernoulli δεν είναι ανεξάρτητες, αφού π.χ. η πιθανότητα εμφάνισης επιτυχίας (κατάστασης 1) εξαρτάται από το αποτέλεσμα της προηγούμενης δοκιμής. Στη συνέχεια θα μελετήσουμε τον πίνακα $\boldsymbol{P}^{(\nu)}$ που, όπως ήδη αποδείξαμε, είναι $\boldsymbol{P}^{(\nu)} = \boldsymbol{P}^{\nu}$.

Για τον υπολογισμό του $\boldsymbol{P}^{\nu}$ ακολουθούμε τη γνωστή από τη *Γραμμική Άλγεβρα* διαδικασία. Γνωρίζουμε ότι

$$\boldsymbol{P}^{\nu} = Q \begin{pmatrix} \lambda_1^{\nu} & 0 \\ 0 & \lambda_2^{\nu} \end{pmatrix} Q^{-1}$$

όπου λ_1, λ_2 οι ιδιοτιμές του $\boldsymbol{P}$ και Q ο πίνακας των ιδιοδιανυσμάτων. Αναλυτικά έχουμε: Η χαρακτηριστική εξίσωση

$$\begin{vmatrix} 1 - p_0 - \lambda & p_0 \\ 1 - p_1 & p_1 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

ή $(1 - p_0 - \lambda)(p_1 - \lambda) - p_0(1 - p_1) = 0$ μας δίνει τις ιδιοτιμές $\lambda_1 = 1$ και $\lambda_2 = p_1 - p_0$.

Για τον προσδιορισμό των ιδιοδιανυσμάτων έχουμε:

$$\left[\begin{array}{cc} 1-p_0 & p_0 \\ 1-p_1 & p_1 \end{array}\right]\left[\begin{array}{c} q_{11} \\ q_{21} \end{array}\right] = \lambda_1 \left[\begin{array}{c} q_{11} \\ q_{21} \end{array}\right] \Rightarrow q_{11} = q_{21} = 1$$

και

$$\left[\begin{array}{cc} 1-p_0 & p_0 \\ 1-p_1 & p_1 \end{array}\right]\left[\begin{array}{c} q_{12} \\ q_{22} \end{array}\right] = \lambda_2 \left[\begin{array}{c} q_{12} \\ q_{22} \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{l} q_{12} = -p_0 \\ q_{22} = 1-p_1. \end{array}$$

Άρα ο Q δίνεται από τη σχέση

$$Q = \left[\begin{array}{cc} 1 & -p_0 \\ 1 & 1-p_1 \end{array}\right] \text{ με } AdjQ = \left[\begin{array}{cc} 1-p_1 & p_0 \\ -1 & 1 \end{array}\right]$$

και επομένως ο αντίστροφος του Q είναι

$$Q^{-1} = \frac{1}{|Q|} AdjQ = \frac{1}{1-p_1+p_0}\left[\begin{array}{cc} 1-p_1 & p_0 \\ -1 & 1 \end{array}\right].$$

Άρα

$$\boldsymbol{P}^{\nu} = \frac{1}{1-p_1+p_0}\left[\begin{array}{cc} 1 & -0_0 \\ 1 & 1-p_1 \end{array}\right]\left[\begin{array}{cc} 1^{\nu} & 0 \\ 0 & (p_1-p_0)^{\nu} \end{array}\right]\left[\begin{array}{cc} 1-p_1 & p_0 \\ -1 & 1 \end{array}\right].$$

Με βάση τα παραπάνω καταλήγουμε στην εξής μορφή για τον πίνακα ν-οστής τάξεως

$$\begin{aligned} \boldsymbol{P}^{(\nu)} &= \left[\begin{array}{cc} p_{00}(\nu) & p_{01}(\nu) \\ p_{10}(\nu) & p_{11}(\nu) \end{array}\right] \\ &= \boldsymbol{P}^{\nu} = \frac{1}{q_1+p_0}\left[\begin{array}{cc} q_1 & p_0 \\ q_1 & p_0 \end{array}\right] + \frac{(p_1-p_0)^{\nu}}{q_1+p_0}\left[\begin{array}{cc} p_0 & -p_0 \\ -q_1 & q_1 \end{array}\right] \end{aligned} \qquad (3.7)$$

Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

Περίπτωση 1: Αν $|p_1 - p_0| < 1$, τότε

$$\begin{array}{l} \lim_{\nu\to\infty} p_{00}(\nu) = \lim_{\nu\to\infty} p_{10}(\nu) = \frac{q_1}{q_1+p_0} \equiv \pi_0 \\ \lim_{\nu\to\infty} p_{01}(\nu) = \lim_{\nu\to\infty} p_{11}(\nu) = \frac{p_0}{q_1+p_0} \equiv \pi_1 \end{array} \quad , \qquad \pi_0 + \pi_1 = 1.$$

Χρησιμοποιώντας τη σχέση (2.4) έχουμε για τις απόλυτες πιθανότητες $p_i(\nu) = P(X_\nu = i)$, $i = 0, 1$

$$p_1(\nu) = \sum_{\kappa} \alpha_\kappa p_{\kappa 1}(\nu) = \alpha_0 p_{01}(\nu) + \alpha_1 p_{11}(\nu)$$

$$p_0(\nu) = \sum_{\kappa} \alpha_\kappa p_{\kappa 0}(\nu) = \alpha_0 p_{00}(\nu) + \alpha_1 p_{10}(\nu)$$

και

$$\lim_{\nu\to\infty} p_1(\nu) = (\alpha_0 + \alpha_1)\frac{p_0}{q_1 + p_0} = \frac{p_0}{q_1 + p_0} \equiv \pi_1$$

$$\lim_{\nu\to\infty} p_0(\nu) = (\alpha_0 + \alpha_1)\frac{q_1}{q_1 + p_0} = \frac{q_1}{q_1 + p_0} \equiv \pi_0,$$

αφού $\alpha_0 + \alpha_1 = 1$ (αρχική κατανομή).

Οι πιθανότητες π_0 και π_1 ορίζουν μία κατανομή που καλείται **Εργοδική**.

Περίπτωση 2. Αν $|p_1 - p_0| = 1$, τότε

ή

$p_1 = 1$ και $p_0 = 0$ δηλ. ο πίνακας $\boldsymbol{P}$ έχει τη μορφή

$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ άρα } \boldsymbol{P}^{(\nu)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

δηλ. το σύστημα ξεκινώντας από μία κατάσταση παραμένει σ' αυτήν για πάντα,

ή

$p_1 = 0$ και $p_0 = 1$ και ο πίνακας $\boldsymbol{P}$ είναι

$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \text{ άρα } \boldsymbol{P}^{(2\nu)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ και } \boldsymbol{P}^{(2\nu+1)} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

δηλ. το σύστημα σε άρτιο αριθμό βημάτων επιστρέφει στην ίδια κατάσταση, ενώ σε περιττό αριθμό βημάτων μεταπηδάει στην άλλη κατάσταση. Αυτό σημαίνει έλλειψη στατιστικής ισορροπίας ή εργοδικότητας.

Παράδειγμα. Η κατάσταση του Αττικού ουρανού κατά τη ν-οστή ημέρα, έστω X_ν $\nu = 1, 2, \ldots$, ορίζεται ως εξής:

$$X_\nu = \begin{cases} 0 & \text{αν ο Ουρανός της Αττικής είναι καθαρός} \\ 1 & \text{αν ο Ουρανός της Αττικής είναι συννεφιασμένος} \end{cases}$$

με

$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,6 & 0,4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{00} & p_{01} \\ p_{10} & p_{11} \end{bmatrix}.$$

Ας θεωρήσουμε ως αρχική κατάσταση την κατάσταση του ουρανού κατά την πρώτη Ιανουαρίου. Ποια είναι η πιθανότητα να είναι ο ουρανός συννεφιασμένος κατά την ημέρα των Φώτων, αν γνωρίζουμε ότι και κατά την Πρωτοχρονιά ο

ουρανός ήταν συννεφιασμένος; Αν δεν γνωρίζουμε την κατάσταση του ουρανού κατά την Πρωτοχρονιά, τότε ποια είναι η παραπάνω πιθανότητα;
Ζητάμε δηλ. την πιθανότητα $p_{11}(5)$, καθώς και την απόλυτη πιθανότητα $p_1(5)$.

Από τη σχέση (2.7) έχουμε

$$\boldsymbol{P}^{(5)} = \boldsymbol{P}^5 = \frac{1}{0,2+0,6}\begin{bmatrix} 0,6 & 0,2 \\ 0,6 & 0,2 \end{bmatrix} + \frac{(0,4-0,2)^5}{0,2+0,6}\begin{bmatrix} 0,2 & -0,2 \\ -0,6 & 0,6 \end{bmatrix}$$

άρα

$$p_{11}(5) = \frac{0,2}{0,2+0,6} + \frac{(0,4-0,2)^5}{0,2+0,6}\cdot 0,6 \approx \frac{0,2}{0,2+0,6} = \mathbf{0{,}25}.$$

Παρατηρούμε ότι σε μόλις 5 βήματα το σύστημα φθάνει σχεδόν σε κατάσταση ισορροπίας. Για την απόλυτη πιθανότητα έχουμε

$$\begin{aligned} p_1(5) &= \sum_{\kappa=0}^{1} P(X_1=\kappa)p_{\kappa 1}(5) = P(X_1=0)p_{01}(5) + P(X_1=1)P_{11}(5) \\ &\approx \frac{1}{2}\cdot 0,25 + \frac{1}{2}\cdot 0,25 = \mathbf{0{,}25}, \end{aligned}$$

όπως ήταν αναμενόμενο. (Θεωρούμε την αρχική κατανομή $\alpha_0 = \alpha_2 = 1/2$, αφού δεν γνωρίζουμε την κατάσταση του ουρανού κατά την 1η Ιανουαρίου).

4. Παραδείγματα

1) *Έστω X_ν ο αριθμός των επιτυχιών σε ν ανεξάρτητες δοκιμές Bernoulli. Για την αλυσίδα $\{X_\nu, \nu = 1,2,\ldots\}$, να υπολογισθούν οι πιθανότητες μεταπήδησης πρώτης και ν-οστής τάξης.*

Λύση. Έστω

$$Y_\nu = \begin{cases} 1 & \text{αν η } \nu\text{-οστή δοκιμή είναι Επιτυχία (Ε)} \\ 0 & \text{αν η } \nu\text{-οστή δοκιμή είναι Αποτυχία (Α)} \end{cases}$$

με $P(Y_\nu = 1) = p$ και $P(Y_\nu = 0) = q$. Τότε $X_\nu = Y_1 + \cdots + Y_\nu$ και $X_{\nu+1} = X_\nu + Y_{\nu+1}$ δηλ. η $X_{\nu+1}$ εξαρτάται από τη X_ν άρα η στ. αν. $\{X_\nu, \nu = 1,2,\ldots\}$ έχει την ιδιότητα Markov. Ο χώρος καταστάσεων είναι $\Omega = \{0,1,\ldots,\nu\}$.

Οι πιθανότητες μεταπήδησης πρώτης τάξης υπολογίζονται από τη σχέση

$$\begin{aligned} p_{ij} &= P(X_{\nu+1} = j | X_\nu = i) = P(X_\nu + Y_{\nu+1} = j | X_\nu = i) \\ &= P(Y_{\nu+1} = j - i),\ i,j \in \Omega. \end{aligned}$$

Άρα

$$\begin{aligned} p_{ii} &= P(Y_{\nu+1}=0)=q \\ p_{ii+1} &= P(Y_{\nu+1}=1)=p \end{aligned} \quad , \quad p_{i\kappa}=0, \quad \forall\, \kappa \neq i, i+1$$

και ο πίνακας έχει ως εξής

$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} q & p & 0 & 0 & & \cdots \\ 0 & q & p & 0 & & \cdots \\ 0 & 0 & q & p & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

Για τις πιθανότητες μεταπήδησης ν-οστής τάξης έχουμε

$$\begin{aligned} p_{ij}(\nu) =& P(X_{\kappa+\nu}=j|X_\kappa=i) \\ =& P(X_\kappa+Y_{\kappa+1}+\cdots+Y_{\kappa+\nu}=j|X_\kappa=i) \\ =& P(Y_{\kappa+1}+\cdots+Y_{\kappa+\nu}=j-i)=\binom{\nu}{j-i}p^{j-i}q^{\nu-(j-i)}, \end{aligned}$$

για $j=i,i+1,\ldots,i+\nu$, αφού το άθροισμα ανεξάρτητων διτίμων Bernoulli ακολουθεί τη Διωνυμική κατανομή.

2) *Ρίχνουμε ένα ζάρι κατ' επανάληψη. Έστω $\{X_\nu, \nu \geq 1\}$ ο μικρότερος από τους αριθμούς που εμφανίστηκαν στις πρώτες ν ρίψεις. Να υπολογισθούν οι πιθανότητες μεταπήδησης πρώτης και δευτέρας τάξης.*
Λύση. Έστω Y_ν το αποτέλεσμα της ν-οστής ρίψης, $\nu = 1,2,\ldots$. Τότε $X_\nu = \min\{Y_1,\ldots,Y_\nu\}$ και άρα $X_{\nu+1} = \min\{X_\nu, Y_{\nu+1}\}$, δηλ. η $\{X_\nu, \nu \geq 1\}$ έχει την ιδιότητα Markov αφού η γνώση της X_ν μας καθορίζει την κατανομή της $X_{\nu+1}$. Ο χώρος καταστάσεων είναι $\Omega = \{1,2,\ldots,6\}$. Εφαρμόζοντας στοιχειώδεις πιθανότητες έχουμε:

α) Για τις πιθανότητες μεταπήδησης πρώτης τάξης

$$\begin{aligned} p_{ij} &= 0, \ \ \forall\, j>i \\ p_{ii} &= P(X_{\nu+1}=i|X_\nu=i)=P(\min(X_\nu,Y_{\nu+1})=i|X_\nu=i) \\ &= P(\min(i,Y_{\nu+1})=i)=P(Y_{\nu+1}\geq i) \\ &= \frac{6-(i-1)}{6}=\frac{7-i}{6},\ i=1,\ldots,6 \text{ και} \\ p_{ij} &= P(X_{\nu+1}=j|X_\nu=i)=P(\min(i,Y_{\nu+1})=j) \\ &= P(Y_{\nu+1}=j)=\frac{1}{6},\ j<i. \end{aligned}$$

β) Για τις δευτέρας τάξης πιθανότητες έχουμε

$$
\begin{aligned}
p_{ij}(2) &= 0 \quad j > i \\
p_{ii}(2) &= P(X_{\nu+2} = i | X_\nu = i) = P(\min(i, Y_{\nu+1}, Y_{\nu+2}) = i) \\
&= P(Y_{\nu+1} \geq i, Y_{\nu+2} \geq i) \overset{\text{ανεξ.}}{\underset{\text{τ.μ.}}{=}} P(Y_{\nu+1} \geq i) P(Y_{\nu+2} \geq i) \\
&= \left(\frac{7-i}{6}\right)^2, \quad i = 1, 2, \ldots, 6, \quad \text{και} \\
p_{ij}(2) &= P(X_{\nu+2} = j | X_\nu = i) = P(\min(i, Y_{\nu+1}, Y_{\nu+2}) = j) \\
&= P(\min(Y_{\nu+1}, Y_{\nu+2}) = j) \\
&= P(\min(Y_{\nu+1}, Y_{\nu+2}) \geq j) - P(\min(Y_{\nu+1}, Y_{\nu+2}) \geq j+1), \\
&= \left(\frac{7-j}{6}\right)^2 - \left(\frac{7-j-1}{6}\right)^2, \quad j < i.
\end{aligned}
$$

Τις παραπάνω πιθανότητες μπορούμε να τις υπολογίσουμε εφαρμόζοντας τις εξισώσεις $C-K$ για συγκεκριμένες καταστάσεις. Για παράδειγμα,

$$
\begin{aligned}
p_{42}(2) &= \sum_\kappa p_{4\kappa} p_{\kappa 2} = p_{44}p_{42} + p_{43}p_{32} + p_{42}p_{22} + p_{41}p_{12} \\
&= \frac{7-4}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{7-2}{6} + \frac{1}{6} \cdot 0 = \frac{1}{4}
\end{aligned}
$$

$$
\left[p_{42}(2) = \left(\frac{7-2}{6}\right)^2 - \left(\frac{7-2-1}{6}\right)^2 = \frac{1}{4} \right]
$$

$$
p_{44}(2) = \sum_\kappa p_{4\kappa} p_{\kappa 4} = p_{44}p_{44} = \frac{1}{4} = \left(\frac{7-4}{6}\right)^2 \ \text{κ.λπ.}
$$

Οι αντίστοιχοι πίνακες είναι

$$
\boldsymbol{P} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} 1 & \;\;2\;\; & \;\;3\;\; & \;\;4\;\; & \;\;5\;\; & \;\;6\;\; \end{array} \\
\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1/6 & 5/6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1/6 & 1/6 & 4/6 & 0 & 0 & 0 \\
1/6 & 1/6 & 1/6 & 3/6 & 0 & 0 \\
1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 2/6 & 0 \\
1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

$$
\boldsymbol{P}^{(2)} = \boldsymbol{P}^2 = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\
\left[\begin{array}{cccccc}
1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
1-(5/6)^2 & (5/6)^2 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & (1/6)^2
\end{array}\right]
\end{array}.
$$

Παρατηρούμε ότι η κατάσταση 1 είναι κατάσταση απορρόφησης, δηλ. αν το σύστημα βρεθεί στην κατάσταση 1 δεν μπορεί να φύγει από αυτήν ποτέ.

3) *Έστω $\{\xi_\nu\}$ ακολουθία ανεξάρτητων δοκιμών Bernoulli με*

$$P(\xi_\nu = 1) = p,\ P(\xi_\nu = 0) = q,\ p + q = 1 \quad \nu = 1, 2, \ldots.$$

Για $\nu = 2, 3, \ldots$ ορίζουμε την στοχαστική ανέλιξη

$$X_\nu = \begin{cases} 0 & \alpha\nu \quad \xi_{\nu-1} = \xi_\nu = 1 \\ 1 & \alpha\nu \quad \xi_{\nu-1} = 1, \xi_\nu = 0 \\ 2 & \alpha\nu \quad \xi_{\nu-1} = 0, \xi_\nu = 1 \\ 3 & \alpha\nu \quad \xi_{\nu-1} = 0, \xi_\nu = 0 \end{cases}.$$

Να δειχθεί ότι η $\{X_\nu,\ \nu = 2, 3, \ldots\}$ έχει τη Μαρκοβιανή ιδιότητα. Να υπολογισθεί ο πίνακας πιθανοτήτων μεταπήδησης $\boldsymbol{P}$, καθώς και η πιθανότητα $p_{00}(3)$.

Λύση. Η στοχαστική ανέλιξη $\{X_\nu,\ \nu = 2, 3, \ldots\}$ έχει χώρο καταστάσεων $\Omega = \{0, 1, 2, 3\}$. Αν γνωρίζουμε την κατάσταση της X_ν που εξαρτάται από τις τυχαίες μεταβλητές $(\xi_{\nu-1}, \xi_\nu)$, τότε μπορούμε να προσδιορίσουμε την κατανομή της $X_{\nu+1}$ που εξαρτάται από τις $(\xi_\nu, \xi_{\nu+1})$. Άρα η $\{X_\nu,\ \nu = 2, 3, \ldots\}$ είναι Μαρκοβιανή αλυσίδα.

Για τις πιθανότητες μεταπήδησης πρώτης τάξης έχουμε για παράδειγμα

$$
\begin{aligned}
p_{00} &= P(X_{\nu+1} = 0 | X_\nu = 0) \\
&= P(\xi_{\nu+1} = \xi_\nu = 1 | \xi_{\nu-1} = \xi_\nu = 1) \\
&= \frac{P(\xi_{\nu-1} = \xi_\nu = \xi_{\nu+1} = 1)}{P(\xi_{\nu-1} = \xi_\nu = 1)} \overset{\text{ανεξ.}}{\underset{\text{τ.μ.}}{=}} P(\xi_{\nu+1} = 1) = p \\
p_{01} &= P(X_{\nu+1} = 1 | X_\nu = 0) = P(\xi_{\nu+1} = 0) = q \\
p_{02} &= 0, \quad p_{03} = 0, \quad p_{04} = 0.
\end{aligned}
$$

Όμοια προσδιορίζονται οι υπόλοιπες πιθανότητες και ο πίνακας πιθανοτήτων μεταπήδησης πρώτης τάξης είναι

$$\boldsymbol{P} = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc} p & q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & q \\ p & q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & q \end{array}\right] \end{array}.$$

Χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις $C-K$ υπολογίζουμε την $p_{00}(3)$ ως εξής:

$$\begin{aligned} p_{00}(3) &= \sum_{\kappa} p_{0\kappa}p_{\kappa 0}(2) = p_{00}p_{00}(2) + p_{01}p_{10}(2) \\ &= p_{00}(p_{00}p_{00} + p_{01}p_{10}) + p_{01}(p_{12}p_{20} + p_{13}p_{30}) \\ &= p \cdot p^2 + qp^2 = p^2. \end{aligned}$$

4) *Συνέχεια του Παραδείγματος 3.*
Έστω ότι η $\{X_\nu,\ \nu = 2,3,\ldots\}$ ορίζεται ως εξής:

$$X_\nu = \begin{cases} 0, & \text{αν} \quad \xi_{\nu-1} = \xi_\nu = 1 \\ 1, & \text{αν} \quad \text{διαφορετικά} \end{cases}.$$

Να δειχθεί ότι η $X_\nu,\ \nu = 2,3,\ldots\}$ **δεν έχει** *τη Μαρκοβιανή ιδιότητα.*

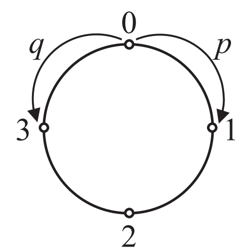
Λύση. Η $\{X_\nu,\ \nu = 2,3,\ldots\}$ δεν έχει την ιδιότητα Markov αφού π.χ.

$$\begin{aligned} p_{10} =& P(X_{\nu+1} = 0 | X_\nu = 1) \\ =& \frac{P((\xi_\nu, \xi_{\nu+1} = (1,1) \text{ και } (\xi_{\nu-1}) \neq (1,1))}{P((\xi_{\nu-1}, \xi_\nu) \neq (1,1))} \\ =& \frac{P(\xi_{\nu+1} = \xi_\nu = 1, \xi_{\nu-1} = 0)}{P((\xi_{\nu-1}, \xi_\nu) \neq (1,1))} = \frac{qp^2}{1-p^2}, \end{aligned}$$

ενώ

$$\begin{aligned} &P(X_{\nu+1} = 0 | X_\nu = 1, X_{\nu-1} = 0) \\ &= \frac{P((\xi_\nu, \xi_{\nu+1}) = (1,1), (\xi_{\nu-1}, \xi_\nu) \neq (1,1), (\xi_{\nu-2}, \xi_{\nu-1}) = (1,1))}{P((\xi_{\nu-2}, \xi_{\nu-1}) = (1,1) \text{ και } (\xi_{\nu-1}, \xi_\nu) \neq (1,1))} \\ &= \frac{P(\emptyset)}{P(\xi_{\nu-2} = \xi_{\nu-1} = 1, \xi_\nu = 0)} = \frac{0}{qp^2}. \end{aligned}$$

5) *Ένα σωματίδιο εκτελεί τυχαίο περίπατο στα σημεία* $0, 1, 2$ *και* 3 *ενός κύκλου, κάνοντας ένα βήμα δεξιά με πιθανότητα* p *ή ένα βήμα αριστερά με πιθανότητα* $q = 1 - p$, *όπως φαίνεται στο σχήμα. Έστω* $\{X_\nu,\ \nu \geq 1\}$ *η θέση του σωματιδίου μετά από* ν *βήματα. Να προσδιορισθεί ο πίνακας πιθανοτήτων μεταπήδησης πρώτης τάξης της αλυσίδας.*



Σχήμα 1

Λύση. Εύκολα προσδιορίζεται ο πίνακας $\boldsymbol{P}$ που είναι ο ακόλουθος

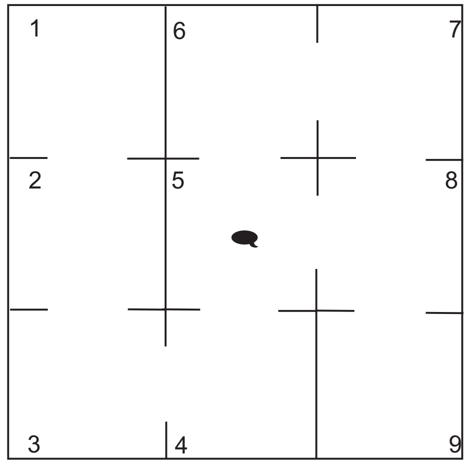
$$\begin{array}{c} \\ \boldsymbol{P} = \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc} 0 & p & 0 & q \\ q & 0 & p & 0 \\ 0 & q & 0 & p \\ p & 0 & q & 0 \end{array}\right] \end{array} .$$

Αν $\alpha_\kappa = P(X_0 = \kappa) = \frac{1}{4}$, $\kappa = 0, 1, 2, 3$, τότε η απόλυτη πιθανότητα $p_3(2) = P(X_2 = 3)$ είναι

$$\begin{aligned} p_3(2) &= \sum_\kappa \alpha_\kappa p_{\kappa 3}(2) = \frac{1}{4}[p_{03}(2) + p_{13}(2) + p_{23}(2) + p_{33}(2)] \\ &= \frac{1}{4}[0 + (p^2 + q^2) + 0 + 2pq] = \frac{1}{4}(p^2 + q^2 + 2pq) = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι ο $\boldsymbol{P}$ είναι διπλά στοχαστικός.

6) *Σύμφωνα με το παρακάτω σχήμα, ένα ποντίκι κινείται σε εννέα διαμερίσματα ως εξής: Αν τη χρονική στιγμή* ν *βρίσκεται στο* i *διαμέρισμα, τότε επιλέγει τυχαία ένα από τα διαμερίσματα με τα οποία επικοινωνεί το* i *διαμέρισμα για να μετακινηθεί την επόμενη χρονική στιγμή,* $\nu = 1, 2, \ldots$, $i = 1, \ldots, 9$. *Έστω* X_ν *ο αριθμός του διαμερίσματος στο* *οποίο βρίσκεται το ποντίκι κατά τη χρονική στιγμή* ν, $\nu = 1, 2, \ldots$. *Να προσδιορισθεί ο πίνακας* $\boldsymbol{P}$ *και να υπολογισθεί η* $p_{65}(3)$. *Αν* $\alpha_1 = P(X_0 = 1) = 1$ *να υπολογισθεί η απόλυτη πιθανότητα* $p_5(3)$.



Σχήμα 2

Λύση. Ο πίνακας πιθανοτήτων μεταπήδησης πρώτης τάξης είναι ο ακόλουθος

$$\boldsymbol{P} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccccccc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \end{array}.$$

Εφαρμόζοντας τις εξισώσεις $C - K$ έχουμε

$$\begin{aligned} p_{65}(3) &= \sum_{\kappa} p_{6\kappa} p_{\kappa 5}(2) = p_{65} p_{55}(2) + p_{67} p_{75}(2) \\ &= p_{65}(p_{54}p_{45} + p_{56}p_{65} + p_{58}p_{85}) + p_{67}(p_{76}p_{65} + p_{78}p_{85}) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{9} + \frac{1}{2}\frac{5}{12} = \frac{93}{216}. \end{aligned}$$

7) "Το πρόβλημα των 4 ψευτών του Eddington."
Οι A_0, A_1, A_2 και A_3 λένε ψέματα με πιθανότητα $2/3$. Αν ο A_3 ***επιβεβαιώνει*** *ότι ο A_2* ***αρνείται*** *ότι A_1 ο* ***δηλώνει*** *ότι ο A_0* ***λέει ψέμα***, *ποια η πιθανότητα ο A_0 να λέει την αλήθεια;*

Λύση. Το πρόβλημα έχει λυθεί από τον W. Feller στη γενική μορφή του στην εργασία "The problem of n liars and Markov chains", Amer. Math. Monthly, vol. 58 (1951), pp. 606-608.
Έστω

$$X_0 = \begin{cases} 1 & \text{αν ο } A_0 \text{ λέει αλήθεια} \\ 0 & \text{αν ο } A_0 \text{ λέει ψέματα} \end{cases}$$

και

$$X_\nu = \begin{cases} 1 & \textbf{ό,τι} \text{ λέει ο } A_\nu \text{ συνεπάγεται ότι ο } A_0 \text{ λέει αλήθεια} \\ 0 & \textbf{ό,τι} \text{ λέει ο } A_\nu \text{ συνεπάγεται ότι ο } A_0 \text{ λέει ψέματα} \end{cases}.$$

Στην περίπτωσή μας έχουμε τη X_ν, $\nu = 0, 1, 2, 3$ που είναι Μαρκοβιανή αλυσίδα με αρχικές πιθανότητες

$$p_0(0) = P(X_0 = 0) = q, \quad p_1(0) = P(X_0 = 1) = p$$

$p + q = 1$ και πίνακα πιθανοτήτων μεταπήδησης

$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} p_{00} & p_{01} \\ p_{10} & p_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p & q \\ q & p \end{bmatrix}.$$

Ζητάμε την $P(X_0 = 1 | X_3 = 1)$.
Είναι

$$\begin{aligned} P(X_0 = 1 | X_3 = 1) &= \frac{P(X_0 = 1, X_3 = 1)}{P(X_3 = 1)} \\ &= \frac{P(X_0 = 1) P(X_3 = 1 | X_0 = 1)}{P(X_3 = 1)} \\ &= \frac{p_1(0) p_{11}(3)}{p_1(3)}. \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας την αρχική κατανομή και εφαρμόζοντας τις εξισώσεις $C - K$ υπολογίζουμε τις πιθανότητες $p_1(3)$ και $p_{11}(3)$.

Είναι

$$
\begin{aligned}
p_1(3) &= \sum_{\kappa=0}^{1} p_\kappa(0) p_{\kappa 1}(3) = p_0(0)p_{01}(3) + p_1(0)p_{11}(3) \\
&= q p_{01}(3) + p p_{11}(3) \\
p_{01}(3) &\overset{C-K}{=} \sum_{\kappa} p_{0\kappa} p_{\kappa 1}(2) = p_{00}p_{01}(2) + p_{01}p_{11}(2) \\
&= p_{00}(p_{00}p_{01} + p_{01}p_{11}) + p_{01}(p_{10}p_{01} + p_{11}p_{11}) \\
&= p(pq + qp) + q(q \cdot q + p \cdot p) \\
&= 3p^2 q + q^3
\end{aligned}
$$

όμοια

$$p_{11}(3) = 3pq^2 + p^3.$$

Άρα

$$P(X_0 = 1 | X_3 = 1) = \frac{p(3pq^2 + p^3)}{q(3p^2 q + q^3) + p(3pq^2 + p^3)}.$$

Αν $p = \frac{1}{3}$ ή $\frac{1}{2}$ ή $\frac{2}{3}$, τότε οι αντίστοιχες πιθανότητες είναι $\frac{13}{41}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{28}{41}$.

5. Ταξινόμηση Καταστάσεων

Α. Επικοινωνικότητα

Ορισμός 5.1. *Έστω μία Μαρκοβιανή αλυσίδα $\{X_\nu,\ \nu = 0, 1, 2, \ldots\}$ με χώρο καταστάσεων Ω. Μία κατάσταση $j \in \Omega$ καλείται* ***Προσιτή*** *από την κατάσταση $i \in \Omega$, αν $p_{ij}(\nu) > 0$ για κάποιο $\nu \geq 0$. Τότε σημειώνουμε $i \to j$. Αν και η j κάνει προσιτή την i δηλ. αν $j \to i$, τότε οι καταστάσεις i, j* **επικοινωνούν** *και σημειώνουμε $i \longleftrightarrow j$.*

Πρόταση 5.1. *Η επικοινωνικότητα είναι σχέση ισοδυναμίας.*

Απόδειξη. Ισχύουν οι ιδιότητες

1) ανακλαστική δηλ. $i \leftrightarrow i$ αφού $p_{ii}(0) = 1$ εξ' ορισμού.

2) Συμμετρίας δηλ, η $i \leftrightarrow j$ συνεπάγεται ότι $j \leftrightarrow i$

3) μεταβατικότητας δηλ. αν $i \leftrightarrow j$ και $j \leftrightarrow \kappa$, τότε $i \leftrightarrow \kappa$, αφού από το ότι $i \leftrightarrow j$ και $j \leftrightarrow \kappa$ έχουμε

$$p_{ij}(m) > 0 \text{ και } p_{j\kappa}(n) > 0 \text{ για κάποια } m, n \geq 0$$

άρα

$$p_{i\kappa}(m+n) \stackrel{C-K}{=} \sum_r p_{ir}(m)p_{r,\kappa}(n) \geq p_{ij}(m)p_{j\kappa}(n) > 0$$

δηλ. $i \to \kappa$. Όμοια, αφού $\kappa \to j$ και $j \to i$ έχουμε ότι $p_{\kappa j}(n') > 0$, $p_{ji}(m') > 0$, για κάποια $m', n' > 0$ και άρα

$$p_{\kappa i}(n'+m') \stackrel{C-K}{=} \sum_r p_{\kappa r}(n')p_{ri}(m') \geq p_{\kappa j}(n')p_{ji}(m') > 0$$

δηλ. $\kappa \to i$. Συνεπώς $i \leftrightarrow \kappa$. ♦

Συμπερασματικά: Το σύνολο των καταστάσεων της αλυσίδας Ω **διαμερίζεται** σε κλάσεις ισοδυναμίας δηλ.

$$\Omega = C_1 \cup C_2 \cup \cdots \cup C_r \cup \ldots, \tag{5.1}$$

όπου

$$C_i C_j = \emptyset, \quad i \neq j.$$

Σημειώνουμε ότι είναι δυνατό μία κατάσταση που ανήκει στην C_i να κάνει προσιτή μία κατάσταση που ανήκει στην C_j, αλλά όχι αντίστροφα, γιατί τότε οι δύο αυτές καταστάσεις θα ανήκαν στην ίδια κλάση ισοδυναμίας.

Ορισμός 5.2. *Μία αλυσίδα Markov καλείται* ***απλή ή ανάγωγη*** *αν* $i \leftrightarrow j$ $\forall\, i, j \in \Omega$.

Ορισμός 5.3. *Μία κλάση ισοδυναμίας K καλείται* ***κλειστή ή κλειστό σύνολο καταστάσεων*** *αν*

$$p_{ij}(\nu) = 0 \quad \forall\, i \in K, \quad j \notin K, \quad \nu \geq 1.$$

Ορισμός 5.4. *Αν $K = \{i\}$ και K κλειστό, τότε η κατάσταση i καλείται* ***κατάσταση απορρόφησης****.*

Για την καλύτερη κατανόηση των παραπάνω ορισμών δίνουμε τα επόμενα παραδείγματα.

Παραδείγματα:

1. Έστω η αλυσίδα Markov $\{X_\nu, \nu \geq 1\}$ με χώρο καταστάσεων $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$. Για την αλυσίδα αυτή θεωρούμε τέσσερις διαφορετικούς πίνακες πιθανοτήτων μεταπήδησης πρώτης τάξης και σε κάθε περίπτωση κατατάσσουμε τις καταστάσεις σύμφωνα με τους προηγούμενους ορισμούς.

α)

$$\boldsymbol{P} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \end{array}\right] \end{array}$$

Η κατάσταση **1** είναι ***κατάσταση απορρόφησης*** αφού $p_{11} = 1$. Η κατάσταση 2 κάνει προσιτή μόνο την κατάσταση 1 και όταν συμβεί αυτό σε κάποιο βήμα $\nu \geq 1$, τότε απορροφάται απ' αυτήν. Άρα $\mathbf{\{2\}}$ ***όχι κλειστό***. Οι καταστάσεις 3,4 επικοινωνούν δηλ. $3 \leftrightarrow 4$, αλλά κάνουν προσιτές τις καταστάσεις 1 και 2, άρα το σύνολο $\mathbf{\{3, 4\}}$ αποτελεί μία κλάση ισοδυναμίας, αλλά ***όχι κλειστό*** σύνολο καταστάσεων.

β)

$$\boldsymbol{P} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \end{array}\right] \end{array}$$

Παρατηρούμε ότι $p_{13} = 1$ και $p_{31} = \frac{1}{2}$, άρα $1 \leftrightarrow 3$. Ακόμα $p_{21} = 1$ και $p_{12}(2) = p_{13}p_{32} = \frac{1}{2}$ άρα $1 \leftrightarrow 2$. Λόγω της μεταβατικής ιδιότητας έχουμε $2 \leftrightarrow 3$ (ή από το γεγονός ότι $p_{32} = \frac{1}{2}$ και $p_{23}(2) = p_{21}p_{13} = 1$). Επίσης καμία από τις καταστάσεις $1, 2, 3$ κάνει προσιτή την 4, ενώ η 4 κάνει προσιτές τις $1, 2, 3$. Άρα το σύνολο $\mathbf{\{1, 2, 3\}}$ είναι ***κλειστό***, ενώ το $\mathbf{\{4\}}$ όχι κλειστό.

γ)

$$\boldsymbol{P} = \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \end{array}\right].$$

Όπως και προηγούμενα παρατηρούμε ότι έχουμε το $\mathbf{\{1\}}$ ***κατάσταση απορρόφησης*** και τα ***όχι κλειστά*** $\mathbf{\{2\}, \{3\}}$, *και* $\mathbf{\{4\}}$.

δ)

$$\boldsymbol{P} = \left[\begin{array}{cccc} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \end{array}\right].$$

Στην περίπτωση αυτή εύκολα διαπιστώνουμε ότι όλες οι καταστάσεις επικοινωνούν δηλ. η αλυσίδα είναι ***απλή***.

2. Έστω η Μαρκοβιανή αλυσίδα $\{X_\nu, \nu \geq 1\}$ με $\Omega = \{1,2,3,4\}$ και πίνακα πιθανοτήτων μεταπήδησης

$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ p & q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Παρατηρούμε ότι $p_{14} = 1$ άρα $1 \to 4$ και $p_{41}(2) = p_{43}p_{31} = p > 0$ άρα $4 \to 1$. Επομένως $1 \leftrightarrow 4$.

Από το ότι $p_{43} = 1$ και $p_{34}(2) > p_{32}p_{24} = q > 0$ έπεται ότι $4 \leftrightarrow 3$. Επίσης, αφού $p_{24} = 1$ και $p_{42}(2) = p_{43}p_{32} = q > 0$ έχουμε ότι $2 \leftrightarrow 4$. Λόγω της μεταβατικής ιδιότητας συμπεραίνουμε ότι ότι όλες οι καταστάσεις επικοινωνούν μεταξύ τους, άρα η αλυσίδα είναι απλή με μοναδικό κλειστό σύνολο το Ω.

3. Έστω η αλυσίδα Markov $\{X_\nu, \nu \geq 1\}$ με χώρο καταστάσεων $\Omega = \{1,2,3\}$ και

$$\boldsymbol{P} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} p & 0 & q \\ 0 & 1 & 0 \\ q & 0 & p \end{bmatrix} \end{array}.$$

Είναι φανερό ότι η **2** είναι ***κατάσταση απορρόφησης***, ενώ το σύνολο $\boldsymbol{\{1,3\}}$ είναι ***κλειστό σύνολο***. Ο πίνακας $\boldsymbol{P}$ μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$\boldsymbol{P} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 3 \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 3 & 2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} p & q & 0 \\ q & p & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{P}_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

όπου ο υποπίνακας $\boldsymbol{P}_1$ αφορά το κλειστό σύνολο καταστάσεων. Παρατηρούμε ότι

$$\boldsymbol{P}^{(\nu)} = \boldsymbol{P}^\nu = \begin{bmatrix} \boldsymbol{P}_1^\nu & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Γενικά μία κλειστή κλάση ισοδυναμίας μπορεί να μελετηθεί ανεξάρτητα από τις υπόλοιπες κλάσεις γεγονός που διευκολύνει σημαντικά την όλη μελέτη της αλυσίδας και ιδιαίτερα την οριακή συμπεριφορά της δηλ. τις πιθανότητες $\lim_{\nu\to\infty} p_{ij}(\nu)$. Αυτό ισχύει και όταν έχουμε περισσότερες της μίας κλειστές κλάσεις ισοδυναμίας. Το επόμενο παράδειγμα αναφέρεται στην περίπτωση αυτή.

4. Έστω η Μαρκοβιανή αλυσίδα $\{X_\nu, \nu \geq 1\}$ με $\Omega = \{1,2,3,4,5\}$ και

$$\boldsymbol{P} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} p & 0 & 1-p & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 \\ 1-p & 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q & 1-q \\ 0 & 0 & 0 & 1-q & q \end{bmatrix} \end{array}.$$

Εύκολα έχουμε την εξής κατάταξη: Τα σύνολα $\boldsymbol{\{1,3\}}$ και $\boldsymbol{\{4,5\}}$ είναι ***κλειστά***, ενώ το $\boldsymbol{\{2\}}$ ***όχι κλειστό***.

Αλλάζοντας τις θέσεις των καταστάσεων ο πίνακας $\boldsymbol{P}$ μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$\boldsymbol{P} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 3 & 4 & 5 & 2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} p & 1-p & 0 & 0 & 0 \\ 1-p & p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q & 1-q & 0 \\ 0 & 0 & 1-q & q & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 0 & 0 & 1/3 \end{bmatrix} \end{array}$$

και αν θέσουμε $\boldsymbol{P_1}= \begin{bmatrix} p & 1-p \\ 1-p & p \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{P_2}= \begin{bmatrix} q & 1-q \\ 1-q & q \end{bmatrix}$, τότε

$$\boldsymbol{P^{(\nu)} = P^{\nu}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{P_1^{\nu}} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{P_2^{\nu}} & \boldsymbol{0} \\ \star & \boldsymbol{0} & \star \end{bmatrix},$$

όπου $\star$ οι πιθανότητες μεταπήδησης ν-οστής τάξης $p_{2i}(\nu)$, $i = 1,3,2$.

5. Ροή Επιτυχιών (σελ. 70)

$$\boldsymbol{P} = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & \end{array} \\ \begin{bmatrix} q & p & 0 & 0 & \cdots \\ q & 0 & p & 0 & \cdots \\ q & 0 & 0 & p & \cdots \\ q & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ q & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdot \end{bmatrix} \end{array}.$$

Παρατηρούμε ότι για $i = 1, 2, \ldots$ έχουμε $p_{i0} = q > 0$, άρα $i \to 0$ και

$$p_{0i}(i) = p_{01}p_{12} \cdots p_{i-1\ i} = p^i > 0, \quad \text{άρα} \;\; 0 \to i.$$

Επομένως

$$0 \leftrightarrow i, \quad i = 1, 2, \ldots$$

και λόγω της μεταβατικής ιδιότητας όλες οι καταστάσεις της αλυσίδας επικοινωνούν δηλ. η ροή επιτυχιών αποτελεί ***απλή*** αλυσίδα Markov.

6. Τυχαίος Περίπατος (σελ. 71). Έστω ο τυχαίος περίπατος με $\Omega = \{0, 1, \ldots, N\}$ και πίνακα

$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & & \cdots & 0 \\ q & 0 & p & & \cdots & 0 \\ 0 & q & 0 & p & \cdots & 0 \\ & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$

Είναι προφανές ότι οι καταστάσεις **0 *και είναι καταστάσεις απορρόφησης***, ενώ οι υπόλοιπες ανήκουν σε μία κλάση ισοδυναμίας, αφού επικοινωνούν, αλλά ***όχι κλειστή***.

Β. Επαναληπτικότητα

Έστω η Μαρκοβιανή αλυσίδα αλυσίδα $\{X_\nu, \nu \geq 1\}$ με χώρο καταστάσεων Ω. Η πιθανότητα

$$f_j(\nu) = P(X_\nu = j, X_r \neq j \; r = 1, \ldots, \nu - 1 | X_0 = j), \quad j \in \Omega \tag{5.2}$$

καλείται ***πιθανότητα πρώτης επανόδου*** στην j μετά από ακριβώς ν βήματα. Η πιθανότητα

$$f_j = \sum_{\nu=1}^{\infty} f_j(\nu) \tag{5.3}$$

καλείται ***πιθανότητα να γυρίσει κάποτε το σύστημα στην j***. Με βάση την πιθανότητα f_j έχουμε την εξής κατάταξη.

Ορισμός 5.5.

α) Αν $f_j = 1$, τότε η j καλείται ***έμμονη***

β) Αν $f_j < 1$, τότε η j καλείται ***μεταβατική***.

Στην περίπτωση α) έχουμε ότι με πιθανότητα 1 το σύστημα ξεκινώντας από την j επιστρέφει στην j τουλάχιστον μία φορά και οι $\{f_j(\nu),\ \nu = 1, 2, \dots\}$ ορίζουν την κατανομή του χρόνου πρώτης επανόδου.

Ας θεωρήσουμε το μέσο χρόνο επανόδου στην j δηλ. το μέγεθος

$$\mu_j = \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu f_j(\nu). \tag{5.4}$$

Ορισμός 5.6.

α) Αν $\mu_j < \infty$, τότε η j καλείται ***θετική***

β) Αν $\mu_j = \infty$, τότε η j καλείται ***μηδενική****.*

Στην περίπτωση μεταβατικής κατάστασης έχουμε $\mu_j = \infty$.

Ορισμός 5.7. Περίοδος, *έστω $d(j)$, μιας κατάστασης $j \in \Omega$ είναι ο μέγιστος κοινός διαιρέτης των ακεραίων $\nu \geq 1$ για τους οποίους*

$$p_{jj}(\nu) > 0.$$

Στην περίπτωση που $d(j) = 1$, τότε η j καλείται ***απεριοδική****.*

Ορισμός 5.8. *Μία κατάσταση j που είναι έμμονη, θετική και απεριοδική καλείται* ***εργοδική****.*

Ας θεωρήσουμε τις καταστάσεις $i, j \in \Omega$. Η πιθανότητα

$$f_{ij}(\nu) = P(X_\nu = j, X_r \neq j,\ r = 1, \dots, \nu - 1 | X_0 = i) \tag{5.5}$$

καλείται ***πιθανότητα πρώτου περάσματος στην κατάσταση j όταν το σύστημα έχει ξεκινήσει από την κατάσταση i***

Όπως και προηγούμενα έστω η πιθανότητα

$$f_{ij} = \sum_{\nu=1}^{\infty} f_{ij}(\nu),$$

που εκφράζει την πιθανότητα το σύστημα ξεκινώντας από την κατάσταση $\boldsymbol{i}$ να επισκεφθεί για πρώτη φορά την κατάσταση $\boldsymbol{j}$ κάποτε. Όμοια έχουμε ότι αν $f_{ij} = \sum_{\nu=1}^{\infty} f_{ij}(\nu) < 1$, τότε $\mu_{ij} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu f_{ij}(\nu) = \infty$, ενώ αν $f_{ij} = 1$, τότε οι $\{f_{ij}(\nu),\ \nu = 1, 2, \dots\}$, ορίζουν την κατανομή του χρόνου πρώτου περάσματος του συστήματος στην j δεδομένου ότι έχει ξεκινήσει από την i.

Παραδείγματα:

1) Ροή επιτυχιών

$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} q & p & 0 & 0 & \cdots \\ q & 0 & p & 0 & \cdots \\ q & 0 & 0 & p & \cdots \\ q & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ q & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}.$$

Σε προηγούμενο παράδειγμα δείξαμε ότι η αλυσίδα που περιγράφει τη ροή επιτυχιών είναι απλή. Αργότερα θα δείξουμε ότι: ***οι καταστάσεις που επικοινωνούν έχουν ακριβώς τις ίδιες ιδιότητες (ή είναι του ιδίου τύπου δηλ. έμμονες ή μεταβατικές, περιοδικές με την ίδια περίοδο ή απεριοδικές)***. Άρα αρκεί να εξετάσουμε μία κατάσταση π.χ. την 0. Έχουμε

$$\begin{aligned} f_0(\nu) &= P(X_\nu = 0, X_r \neq 0,\ r = 1, \ldots, \nu-1 | X_0 = 0) \\ &= p_{01}p_{12}p_{23}\cdots p_{\nu-2\nu-1}p_{\nu-10} = p^{\nu-1}q,\ \nu = 1, 2, \ldots \end{aligned}$$

και

$$f_0 = \sum_{\nu=1}^{\infty} f_0(\nu) = \sum_{\nu=1}^{\infty} qp^{\nu-1} = \frac{q}{1-p} = 1,$$

άρα η 0 είναι ***έμμονη***.

Ο μέσος χρόνος επανόδου είναι

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \nu f_0(\nu) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu qp^{\nu-1} = \frac{1}{q},$$

άρα η 0 είναι ***θετική***. Σημειώνουμε ότι η κατανομή $\{f_0(\nu),\ \nu = 1, 2, \ldots\}$ είναι Γεωμετρική.

Ως προς την περιοδικότητα παρατηρούμε ότι $p_{00}(1) > 0, p_{00}(2) > 0, \ldots, p_{00}(\nu) > 0, \ldots$. Ο Μ.Κ.Δ. των $\{1, 2, 3, \ldots, \nu, \ldots\}$ είναι ο αριθμός 1, άρα η 0 είναι ***απεριοδική*** δηλ. η 0 είναι ***εργοδική*** και σύμφωνα με την πρόταση που αναφέραμε όλες οι καταστάσεις είναι ***εργοδικές***.

Τα επόμενα δύο παραδείγματα αφορούν πάλι ροή επιτυχιών στις οποίες οι δοκιμές Bernoulli είναι εξαρτημένες.

2) Έστω η ροή επιτυχιών με πίνακα πιθανοτήτων μεταπήδησης

$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \cdots \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \cdots \\ \frac{3}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \cdots \\ & & & & \end{bmatrix},$$

γενικά έχουμε $p_{\kappa 0} = \frac{\kappa+1}{\kappa+2}$, $\quad p_{\kappa,\kappa+1} = \frac{1}{\kappa+2}$, $\kappa = 0, 1, \ldots$.

Όπως και στο προηγούμενο παράδειγμα εξετάζουμε πάλι την κατάσταση 0, αφού η αλυσίδα είναι απλή. Είναι

$$\begin{aligned} f_0(1) &= p_{00} = \frac{1}{2} \\ f_0(2) &= p_{01}p_{10} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \\ f_0(3) &= p_{01}p_{12}p_{20} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} \\ &\vdots \\ f_0(\nu) &= p_{01}p_{12} \cdots p_{\nu-2\ \nu-1}p_{\nu-1\ 0} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdots \frac{1}{\nu} \cdot \frac{\nu}{\nu+1}, \quad \nu = 2, 3, \ldots \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} f_0 = \sum_{\nu=1}^{\infty} f_0(\nu) &= \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu!} \left(1 - \frac{1}{\nu+1}\right) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\nu!} - \frac{1}{(\nu+1)!}\right) \\ &= \lim_{\nu\to\infty} \sum_{\kappa=1}^{\nu} \left(\frac{1}{\kappa!} - \frac{1}{(\kappa+1)!}\right) = \lim_{\nu\to\infty} \left(1 - \frac{1}{(\nu+1)!}\right) = 1, \end{aligned}$$

άρα η 0 είναι ***έμμονη***.

Για το μέσο χρόνο επανόδου έχουμε

$$\begin{aligned} \mu_0 = \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu f_0(\nu) &= \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu \left(\frac{1}{\nu!} - \frac{1}{(\nu+1)!}\right) \\ &= \lim_{\nu\to\infty} \sum_{\kappa=1}^{\nu} \kappa \left(\frac{1}{\kappa!} - \frac{1}{(\kappa+1)!}\right) \\ &= \lim_{\nu\to\infty} \sum_{\kappa=0}^{\nu} \frac{1}{(\kappa+1)!} = \sum_{\kappa=0}^{\infty} \frac{1}{(\kappa+1)!} = e - 1, \end{aligned}$$

άρα η 0 είναι ***θετική***. ''Οπως είδαμε στο προηγούμενο παράδειγμα η 0 είναι ***απεριοδική***, δηλ. η 0 είναι ***εργοδική*** και όλες οι καταστάσεις είναι ***εργοδικές***.

3) Έστω η ροή επιτυχιών με πιθανότητα μεταπήδησης πρώτης τάξεως

$$p_{\kappa,0} = \frac{1}{\kappa+2},\ p_{\kappa,\kappa+1} = \frac{\kappa+1}{\kappa+2},\ \kappa = 0, 1, \ldots .$$

Η αλυσίδα είναι απλή και άρα εξετάζουμε όπως και προηγούμενα την κατάσταση 0. Είναι

$$f_0(1) = \frac{1}{2},\ f_{00}(2) = p_{01}p_{10} = \frac{1}{2}\frac{1}{3},\ f_0(3) = p_{01}p_{12}p_{20} = \frac{1}{2}\frac{2}{3}\frac{1}{4}$$

και γενικά

$$\begin{aligned} f_0(\nu) &= p_{01}p_{12}p_{23}\cdots p_{\nu-2,\nu-1}p_{\nu-1,0} = \frac{1}{2}\frac{2}{3}\frac{3}{4}\cdots\frac{\nu-1}{\nu}\frac{1}{\nu+1} \\ &= \frac{1}{2}\frac{2}{3}\cdots\frac{\nu-1}{\nu}\left(1-\frac{\nu}{\nu+1}\right) = \frac{1}{\nu} - \frac{1}{\nu+1},\ \nu = 1, 2, \ldots . \end{aligned}$$

Είναι

$$\begin{aligned} f_0 &= \sum_{\nu=1}^{\infty} f_0(\nu) = \sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\nu} - \frac{1}{\nu+1}\right) = \lim_{\nu\to\infty}\sum_{\kappa=1}^{\nu}\left(\frac{1}{\kappa} - \frac{1}{\kappa+1}\right) \\ &= \lim_{\nu\to\infty}\left(1 - \frac{1}{\nu+1}\right) = 1, \end{aligned}$$

που σημαίνει ότι η 0 είναι ***έμμονη***.

Ο μέσος χρόνος επανόδου είναι

$$\mu_0 = \sum_{\nu=1}^{\infty}\nu f_{00}(\nu) = \sum_{\nu=1}^{\infty}\nu\left(\frac{1}{\nu} - \frac{1}{\nu+1}\right) = \sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu+1} = \infty,$$

άρα η 0 είναι ***μηδενική***.

Αφού η αλυσίδα είναι απλή έχουμε ότι όλες οι καταστάσεις είναι ***έμμονες***, ***μηδενικές*** και ***απεριοδικές***.

4) Έστω η ροή επιτυχιών με πίνακα πιθανοτήτων μεταπήδησης

$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} p_0 & 1-p_0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot \\ p_1 & 0 & 1-p_1 & 0 & 0 & \cdot & \cdot \\ p_2 & 0 & 0 & 1-p_2 & 0 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}.$$

Θα δείξουμε ότι η αλυσίδα είναι έμμονη αν και μόνο αν $\sum_{i=0}^{\infty} p_i = \infty$. Είναι

$$\begin{aligned} f_0(1) &= p_0 = 1 - (1 - p_0) \\ f_0(\nu) &= (1 - p_0)(1 - p_1)\cdots(1 - p_{\nu-2})p_{\nu-1} \\ &= \prod_{i=0}^{\nu-2}(1 - p_i)[1 - (1 - p_{\nu-1})], \\ &= \prod_{i=0}^{\nu-2}(1 - p_i) - \prod_{i=0}^{\nu-1}(1 - p_i). \end{aligned}$$

Έστω η ακολουθία

$$u_\nu = (1 - p_0)\cdots(1 - p_\nu), \; \nu \geq 0 \text{ και } u_{-1} = 1.$$

Είναι

$$\begin{aligned} f_0 = \sum_{\nu=1}^{\infty} f_0(\nu) &= \lim_{N\to\infty} \sum_{\nu=1}^{N+1} f_0(\nu) = \lim_{N\to\infty} \sum_{\nu=1}^{N+1} (u_{\nu-2} - u_{\nu-1}) \\ &= \lim_{N\to\infty} (1 - u_N). \end{aligned}$$

Θα δείξουμε ότι $\lim_{N\to\infty} u_N = 0$ αν και μόνο αν $\sum_{i=0}^{\infty} p_i = \infty$.

α) Έστω ότι $\sum_{i=0}^{\infty} p_i = \infty$. Ισχύει η σχέση

$$e^{-p_i} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-p_i)^\nu}{\nu!} = 1 - p_i + \frac{p_i^2}{2!} - \frac{p_i^3}{3!} + \cdots, > 1 - p_i \; i = 0, 1, 2, \ldots$$

δηλ. $\prod_{i=0}^{N}(1 - p_i) < e^{-\sum_{i=0}^{N} p_j}$ και από το $\lim_{N\to\infty} \sum_{i=0}^{N} p_i = \infty$, έπεται ότι

$$\lim_{N\to\infty} u_N = \lim_{N\to\infty} \prod_{i=0}^{N}(1 - p_i) = 0.$$

β) Έστω τώρα ότι $\lim_{N\to\infty} u_N = 0$. Ισχύει η σχέση

$$\prod_{i=j}^{N}(1 - p_i) > 1 - p_j - p_{j+1} - \cdots - p_N$$

για κάθε j και $N = j+1, j+2, \ldots$. Υποθέτοντας ότι $\sum_{i=1}^{\infty} p_i < \infty$, τότε $0 < \sum_{i=j}^{\infty} p_i < 1$ για κάποιο $j > 1$, άρα

$$\lim_{N\to\infty} \prod_{i=j}^{N} (1-p_i) > \lim_{N\to\infty} \left(1 - \sum_{i=j}^{N} p_j\right) > 0,$$

που είναι άτοπο αφού $\lim_{N\to\infty} \prod_{i=0}^{N}(1-p_i) = 0$.

Ο μέσος χρόνος επανόδου είναι

$$\begin{aligned} \mu &= \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu f_0(\nu) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu(u_{\nu-2} - u_{\nu-1}) \\ &= (1-u_0) + (2u_0 - 2u_1) + (3u_1 - 3u_2) + \cdots \\ &= 1 + u_0 + +u_1 + \cdots + = 1 + \sum_{\nu=0}^{\infty} u_\nu \end{aligned}$$

άρα η 0 είναι μηδενική αν $\sum_{\nu=0}^{\infty} u_\nu = \infty$, διαφορετικά είναι θετική.

Παρατήρηση: Θεωρώντας το παράδειγμα 2 έχουμε

$$u_N = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdots \frac{1}{N+2} = \frac{1}{(N+2)}!$$

και

$$\lim_{N\to\infty} u_N = 0, \text{ άρα η 0 είναι έμμονη.}$$

Επίσης $\displaystyle\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{(\nu+2)!} = e - 2$, άρα $\mu_0 = e - 1$.
Για το παράδειγμα 3 έχουμε αντίστοιχα

$$u_N = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdots \frac{N}{N+1} \frac{N+1}{N+2} = \frac{1}{N+2}$$

και

$$\lim_{N\to\infty} u_N = 0, \ \sum_{N=0}^{\infty} \frac{1}{N+2} = \infty.$$

5) Είδαμε σε προηγούμενο παράδειγμα ότι η αλυσίδα Markov με πίνακα πιθανοτήτων μεταπήδησης πρώτης τάξεως

$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ p & q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

είναι ***απλή***. Εξετάζουμε την κατάσταση 0 ως προς την ***περιοδικότητα***. Είναι

$$\begin{array}{lll} p_{00} = 0, & p_{00}(2) = 0, & p_{00}(3) = p_{03}p_{32}p_{20} = p > 0 \\ p_{00}(4) = 0, & p_{00}(5) = 0, & p_{00}(6) \geq p_{03}p_{32}p_{21}p_{13}p_{32}p_{20} = qp > 0 \end{array}$$

κ.λ.π. Έχουμε δηλ. ότι $p_{00}(3\nu) > 0$, $\nu = 1, 2, \ldots$, άρα η 0 έχει περίοδο 3 και επειδή η αλυσίδα είναι απλή όλες οι καταστάσεις έχουν την ίδια περίοδο.

Εξετάζουμε τηη κατάσταση 0 ως προς την ***επαναληπτικότητα***. Είναι

$$\begin{aligned} &f_0(1) = 0, \quad f_0(2) = 0, \quad f_0(3) = p_{03}p_{32}p_{20} = 1 \cdot 1 \cdot p \\ &f_0(4) = 0, \quad f_0(5) = 0, \quad f_0(6) = p_{03}p_{32}p_{21}p_{13}p_{32}p_{20} \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad\;\; = 1 \cdot 1 \cdot q \cdot 1 \cdot 1 \cdot p = qp, \end{aligned}$$

ακόμα

$$\begin{aligned} f_0(9) &= p_{03}p_{32}p_{21}p_{13}p_{32}p_{21}p_{13}p_{32}p_{20} \\ &= 1 \cdot 1 \cdot q \cdot 1 \cdot 1 \cdot q \cdot 1 \cdot 1 \cdot p = q^2 p \end{aligned}$$

και γενικά

$$f_0(3\nu) = q^{\nu-1}p, \quad \nu = 1, 2, \ldots.$$

Είναι

$$f_0 = \sum_{\nu=1}^{\infty} f_0(3\nu) = \sum_{\nu=1}^{\infty} q^{\nu-1}p = 1$$

και

$$\mu_0 = \sum_{\nu=1}^{\infty} (3\nu) f_0(3\nu) = \sum_{\nu=1}^{\infty} 3\nu q^{\nu-1}p = 3 \cdot \frac{1}{p},$$

συνεπώς η 0 είναι ***έμμονη θετική*** και αφού η αλυσίδα είναι απλή όλες οι καταστάσεις είναι έμμονες θετικές.

Αργότερα θα δείξουμε την εξής πρόταση: ***Σε μία πεπερασμένη απλή αλυσίδα Markov όλες οι καταστάσεις είναι έμμονες θετικές***.

Με βάση αυτήν την πρόταση συμπεραίνουμε ότι η αλυσίδα του παραπάνω παραδείγματος είναι έμμονη, θετική, χωρίς να είναι απαραίτητο να υπολογισθούν τα παραπάνω μεγέθη.

6) Έστω η αλυσίδα Markov με πίνακα πιθανοτήτων μεταπηδήσεως

$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ q & 0 & p & 0 \\ 0 & q & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ και } \Omega = \{0,1,2,3\}.$$

Παρατηρούμε ότι η 0 και η 3 είναι καταστάσεις απορρόφησης ενώ οι καταστάσεις 1, 2 επικοινωνούν, αλλά αποτελούν ένα όχι κλειστό σύνολο καταστάσεων. Είναι προφανές ότι οι 0 και 3 είναι έμμονες θετικές απεριοδικές. Ας εξετάσουμε την 1. Είναι

$$f_1(1) = 0,\ f_1(2) = p_{12}p_{21} = pq,\ f_1(\nu) = 0,\ \nu > 2$$

δηλ. $f_1 = \sum_{\nu=1}^{\infty} f_1(\nu) = qp < 1$, άρα η 1 είναι ***μεταβατική***, όπως είναι αναμενόμενο αφού είναι πιθανό να απορροφηθεί από την 0 ή από την 3. Το ίδιο ισχύει και για τη 2.

6. Κριτήρια Επαναληπτικότητας

Στην παράγραφο αυτή παραθέτουμε βασικά θεωρήματα των Μαρκοβιανών αλυσίδων σε διακριτό χρόνο καθώς και οριακά θεωρήματα. Τα θεωρήματα αυτά μας επιτρέπουν να αποφανθούμε αν μια κατάσταση είναι έμμονη ή μεταβατική σε περιπτώσεις που η εφαρμογή του ορισμού είναι επίπονη. Για την απόδειξη αυτών των αποτελεσμάτων χρησιμοποιούνται θεωρήματα που αφορούν στη σύγκλιση ακολουθιών και των οποίων οι αποδείξεις παραλείπονται. Ωστόσο ο αναγνώστης μπορεί να ανατρέξει στη σχετική βιβλιογραφία.

Πρόταση 6.1. *Οι πιθανότητες μεταπήδησης ν-οστής τάξης και οι πιθανότητες πρώτου περάσματος ικανοποιούν την ακόλουθη σχέση*

$$p_{ij}(\nu) = \sum_{r=1}^{\nu} f_{ij}(r) p_{jj}(\nu - r), \quad \nu = 1, 2, \ldots. \tag{6.1}$$

Απόδειξη. Έστω τα ενδεχόμενα:

$$A : X_\nu = j,\ B : X_0 = i \text{ και } A_r : X_r = j,\ X_\kappa \neq j,\ \kappa = 1, \ldots, r-1.$$

Εφαρμόζοντας το θεώρημα ολικής πιθανότητας και επικαλούμενοι τη Μαρκοβιανή ιδιότητα έχουμε

$$\begin{aligned} p_{ij}(\nu) &= P(X_\nu = j|X_0 = i) = P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{\sum_{r=1}^{\nu} P(ABA_r)}{P(B)} \\ &= \frac{\sum_{r=1}^{\nu} P(A|A_rB)P(A_r|B)P(B)}{P(B)} = \sum_{r=1}^{\nu} P(A_r|B)P(A|A_r) \\ &= \sum_{r=1}^{\nu} f_{ij}(r)p_{jj}(\nu - r). \end{aligned}$$

♦

Ορισμός 6.1. *Οι γεννήτριες συναρτήσεις των πιθανοτήτων* $\{p_{ij}(\nu)\}$ *και* $\{f_{ij}(\nu)\}$ *ορίζονται από τις σχέσεις*

$$P_{ij}(s) = \delta_{ij} + \sum_{\nu=1}^{\infty} s^\nu p_{ij}(\nu),\ \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$
$$F_{ij}(s) = \sum_{\nu=1}^{\infty} s^\nu f_{ij}(\nu),\ |s| < 1. \tag{6.2}$$

Το επόμενο λήμμα, γνωστό ως Λήμμα του Abel, αποτελεί το κλειδί της απόδειξης του θεωρήματος που ακολουθεί. Για την απόδειξη του λήμματος συστήνουμε το βιβλίο των Karlin και Taylor.

Λήμμα 6.1. (Abel) *Έστω* $\{\alpha_\nu\}$ *μία ακολουθία μη αρνητικών πραγματικών αριθμών με γεννήτρια συνάρτηση*

$$A(s) = \sum_{\nu=0}^{\infty} s^\nu \alpha_\nu, \quad |s| < 1.$$

Είναι

$$\lim_{\nu\to\infty} \sum_{\kappa=0}^{\nu} \alpha_\kappa = M \leq \infty,$$

αν και μόνο αν

$$\lim_{s\to 1^-} A(s) = M.$$

Θεώρημα 6.1. *Μία κατάσταση* j *είναι μεταβατική, αν και μόνο αν*

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} p_{jj}(\nu) < \infty. \tag{6.3}$$

Μία κατάσταση j είναι έμμονη αν και μόνο αν

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} p_{jj}(\nu) = \infty. \tag{6.4}$$

Απόδειξη. Οι σχέσεις (6.1) και (6.2) για $i = j$ γράφονται

$$p_{jj}(\nu) = \sum_{r=1}^{\nu} f_{jj}(r) p_{jj}(\nu - r) \tag{6.5}$$

και

$$\begin{aligned} P_{jj}(s) &= 1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} s^{\nu} p_{jj}(\nu) \\ F_{jj}(s) &= \sum_{\nu=1}^{\infty} s^{\nu} f_{jj}(\nu), \ |s| < 1. \end{aligned} \tag{6.6}$$

Πολλαπλασιάζοντας την (6.5) επί s^{ν}, αθροίζοντας για όλα τα ν έχουμε

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=1}^{\infty} s^{\nu} p_{jj}(\nu) &= \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{r=1}^{\nu} f_{jj}(r) s^{r+(\nu-r)} p_{jj}(\nu - r) \\ &= \left[\sum_{\nu=1}^{\infty} s^{\nu} f_{jj}(\nu) \right] \left[\sum_{\nu=0}^{\infty} s^{\nu} p_{jj}(\nu) \right] \end{aligned}$$

και λαμβάνοντας υπόψη τις (6.6) έχουμε

$$P_{jj}(s) - 1 = F_{jj}(s) P_{jj}(s)$$

ή

$$P_{jj}(s) = \frac{1}{1 - F_{jj}(s)}. \tag{6.7}$$

Έστω ότι η j είναι μεταβατική δηλ. $f_j = \sum_{\nu=1}^{\infty} f_{jj}(\nu) < 1$, τότε από το Λήμμα 6.1 έχουμε ότι $\lim_{s \to 1^-} F_{jj}(s) < 1$, από την (6.7) ότι $\lim_{s \to 1^-} P_{jj}(s) < \infty$ και από το Λήμμα 6.1 ότι $\sum_{\nu=0}^{\infty} p_{jj}(\nu) < \infty$.

Όμοια έχουμε ότι αν η j είναι έμμονη, δηλ., $f_j = \sum_{\nu=1}^{\infty} f_{jj}(\nu) = 1$, τότε $\sum_{\nu=0}^{\infty} p_{jj}(\nu) = \infty$. ♦

Το επόμενο θεώρημα έχει ήδη χρησιμοποιηθεί σε παραδείγματα προηγουμένων παραγράφων και είναι ιδιαίτερα χρήσιμο αφού δηλώνει ότι οι καταστάσεις που ανήκουν στην ίδια κλάση ισοδυναμίας, δηλ. επικοινωνούν, είναι του ίδιου τύπου.

Θεώρημα 6.2. *Έστω j έμμονη (μεταβατική) και $j \leftrightarrow \kappa$. Τότε και η κ είναι έμμονη (μεταβατική). Αν η j είναι περιοδική, τότε και η κ είναι περιοδική με την ίδια περίοδο.*

Απόδειξη. Από το ότι η j κάνει προσιτή την κ ($j \to \kappa$) έχουμε ότι $\exists\, m > 0 :$ $p_{j\kappa}(m) = \alpha > 0$ και από το ότι $\kappa \to j$ ότι $\exists\, n > 0 : p_{\kappa j}(n) = \beta > 0$.
Εφαρμόζοντας τις εξισώσεις Chapman - Kolmogorov καταλήγουμε στη σχέση

$$\begin{aligned} p_{jj}(m+\nu+n) &= \sum_r p_{jr}(m+\nu)p_{rj}(n) \geq p_{j\kappa}(m+\nu)p_{\kappa j}(n) \\ &\geq p_{j\kappa}(m)p_{\kappa\kappa}(\nu)p_{\kappa j}(n) = \alpha\beta p_{\kappa\kappa}(\nu) \end{aligned} \tag{6.8}$$

και όμοια

$$p_{\kappa\kappa}(m+\nu+n) \geq p_{\kappa j}(n)p_{jj}(\nu)p_{j\kappa}(m) = \alpha\beta p_{jj}(\nu) \tag{6.9}$$

για κάθε $\nu \geq 0$. Αθροίζοντας τις (6.8) και (6.9) για όλα τα ν έχουμε

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=0}^{\infty} p_{jj}(m+\nu+n) &\geq \alpha\beta \sum_{\nu=0}^{\infty} p_{\kappa\kappa}(\nu) \\ \sum_{\nu=0}^{\infty} p_{\kappa\kappa}(m+\nu+n) &\geq \alpha\beta \sum_{\nu=0}^{\infty} p_{jj}(\nu). \end{aligned}$$

Οι σχέσεις αυτές δείχνουν ότι αν $\sum_{\nu=0}^{\infty} p_{jj}(\nu) = \infty$ $(< \infty)$, τότε $\sum_{\nu=0}^{\infty} p_{\kappa\kappa}(\nu) = \infty$ $(< \infty)$, δηλ. αν j έμμονη (μεταβατική), τότε και η κ έμμονη (μεταβατική).

Από την (6.8) για $\nu = 0$ έχουμε $p_{jj}(m+n) \geq \alpha\beta > 0$. Αυτό σημαίνει ότι ο αριθμός $m+n$ είναι πολλαπλάσιο της περιόδου της j, έστω d. Επίσης ότι $p_{jj}(m+\nu+n) = 0$ εκτός αν ν είναι πολλαπλάσιο του d.

Από την (6.9) για $\nu = 0$ έχουμε $p_{\kappa\kappa}(m+n) \geq \alpha\beta$, δηλ. ο αριθμός $m+n$ είναι πολλαπλάσιο της περιόδου της κ, έστω $d^\star$ και για ν πολλαπλάσιο του d

έχουμε $p_{\kappa\kappa}(m+\nu+n)>0$ δηλ. ο αριθμός $(m+\nu+n)$ είναι πολλαπλάσιο του d αλλά και του $d^\star$. Άρα ο d είναι πολλαπλάσιο του $d^\star$. Όμοια έχουμε ότι ο $d^\star$ είναι πολλαπλάσιο του d. Άρα $d=d^\star$. ♦

Άμεση συνέπεια είναι το επόμενο

Πόρισμα 6.1. *Οι καταστάσεις μιας κλάσεως ισοδυναμίας είναι όλες έμμονες ή μεταβατικές, απεριοδικές ή περιοδικές με την ίδια περίοδο.*

Τα παραπάνω αποτελέσματα θα εφαρμοσθούν στον τυχαίο περίπατο, ο οποίος είναι χαρακτηριστικό παράδειγμα Μαρκοβιανής αλυσίδας στην οποία οι ορισμοί της επαναληπτικότητας είναι δύσχρηστοι. Παρουσιάζονται οι περιπτώσεις του μονοδιάστατου, διδιάστατου και τρισδιάστατου τυχαίου περίπατου.

Α. Μονοδιάστατος Τυχαίος Περίπατος

Στον ελεύθερο τυχαίο περίπατο έχουμε ότι η Μαρκοβιανή αλυσίδα X_ν, έχει χώρο καταστάσεων $\Omega=\{\ldots-2,-1,0,1,2,\ldots\}$ δηλ. όλους τους αρνητικούς και θετικούς ακέραιους με πιθανότητες μεταπήδησης πρώτης τάξεως $p_{i,i+1}=p$, $p_{i,i-1}=q$, $p+q=1\ \forall\ i\in\Omega$.

Παρατηρούμε ότι η αλυσίδα είναι απλή, άρα σύμφωνα με το Θεώρημα 6.2 αρκεί να εξετάσουμε μία κατάσταση π.χ. την κατάσταση 0. Είναι

$$p_{00}(2\nu+1)=0,\ \nu=0,1,2,\ldots \quad p_{00}(2\nu)=\binom{2\nu}{\nu}p^\nu q^\nu,\ \nu=1,2,\ldots$$

δηλ. η 0 επιστρέφει στον εαυτό της σε άρτιο αριθμό βημάτων, αυτό σημαίνει ότι έχει περίοδο 2 και άρα όλες οι καταστάσεις είναι περιοδικές με περίοδο 2. Χρησιμοποιώντας τον τύπο του Stirling

$$\nu!\sim\nu^{\nu+\frac{1}{2}}e^{-\nu}\sqrt{2\pi}$$

έχουμε ότι

$$\begin{aligned}p_{00}(2\nu)&=\frac{(2\nu)!}{\nu!\nu!}p^\nu q^\nu\approx\frac{(2\nu)^{2\nu+\frac{1}{2}}e^{-2\nu}\sqrt{2\pi}}{\left(\nu^{\nu+\frac{1}{2}}e^{-\nu}\sqrt{2\pi}\right)^2}p^\nu q^\nu\\&=\frac{(4pq)^\nu}{\sqrt{\pi\nu}}.\end{aligned}$$

Αλλά $pq=p(1-p)\leq\frac{1}{4}$ με $p(1-p)=\frac{1}{4}$ αν $p=\frac{1}{2}$. Άρα

1) Αν $p=\frac{1}{2}$, τότε $p_{00}(2\nu)\approx\frac{1}{\sqrt{\pi\nu}}$ και $\sum_{\nu=0}^{\infty}p_{00}(2\nu)\approx\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{\pi\nu}}=\infty$ δηλ. η 0 είναι έμμονη και επομένως όλες οι καταστάσεις είναι έμμονες.

2) Αν $p \neq \frac{1}{2}$, τότε η 0 είναι μεταβατική, υπάρχει δηλ. πιθανότητα το σωματίδιο ξεκινώντας από την 0 να παρασυρθεί στο $+\infty$ αν $p > \frac{1}{2}$, ή στο $-\infty$ αν $p < \frac{1}{2}$ χωρίς να επιστρέψει στην κατάσταση 0 ποτέ.

Ας εξετάσουμε τώρα το ίδιο πρόβλημα χρησιμοποιώντας τις γεννήτριες συναρτήσεις.

Η γεννήτρια συνάρτηση των πιθανοτήτων $p_{00}(2\nu)$ είναι

$$\begin{aligned}
P_{00}(s) &= \sum_{\nu=0}^{\infty} s^{2\nu} p_{00}(2\nu) = \sum_{\nu=0}^{\infty} s^{2\nu} \binom{2\nu}{\nu} p^{\nu} q^{\nu} \\
&= \sum_{\nu=0}^{\infty} s^{2\nu} (-1)^{\nu} \binom{-\frac{1}{2}}{\nu} 2^{2\nu} (pq)^{\nu} \\
&= \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{\nu} (4pqs^2)^{\nu} (-1)^{\nu} = (1-4pqs^2)^{-\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Από τη σχέση (6.7) έχουμε

$$F_{00}(s) = \sum_{\nu=1}^{\infty} s^{2\nu} f_{00}(2\nu) = 1 - \frac{1}{P_{00}(s)} = 1 - (1-4pqs^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Αλλά

$$\lim_{s \to 1^-} F_{00}(s) = F_{00}(1) = \sum_{\nu=1}^{\infty} f_{00}(2\nu) = 1 - (1-4pq)^{\frac{1}{2}} = 1 - |p-q|,$$

άρα αν $p = q = \frac{1}{2}$, τότε $F_{00}(1) = f_0 = 1$ και η 0 είναι έμμονη, διαφορετικά μεταβατική. Ακόμα, αν $p = q = \frac{1}{2}$, τότε ο μέσος χρόνος επανόδου είναι

$$\mu_0 = \left[\frac{d}{ds} F_{00}(s)\right]_{s=1} = [4pqs(1-4pqs^2)^{-\frac{1}{2}}]_{s=1} = \infty,$$

δηλ. η 0 είναι έμμονη μηδενική και σύμφωνα με το Θεώρημα 6.2 όλες οι καταστάσεις είναι έμμονες μηδενικές.

Β. Διδιάστατος Τυχαίος Περίπατος

Στον ελεύθερο διδιάστατο τυχαίο περίπατο το σωματίδιο κινείται αριστερά ή δεξιά, πάνω ή κάτω στο ***επίπεδο*** κατά μία μονάδα σε κάθε χρονική στιγμή. Έστω X_ν η θέση του σωματιδίου αμέσως μετά τη χρονική στιγμή $\nu \geq 1$. Η $\{X_\nu \ \nu = 1, 2, \ldots\}$ είναι αλυσίδα Markov με χώρο καταστάσεων όλα τα σημεία του επιπέδου με ακέραιες συντεταγμένες. Έστω ότι οι μετακινήσεις του είναι ισοπίθανες, δηλ. έχουμε συμμετρικό τυχαίο περίπατο με πιθανότητα μετακίνησης $\frac{1}{4}$, σε κάθε χρονική στιγμή. Εξετάζουμε την κατάσταση $(0,0)$, αφού πάλι η αλυσίδα είναι απλή και θα γράφουμε για συντομία 0.

Ορίζουμε τις τυχαίες μεταβλητές:
X^+: αριθμός μετακινήσεων προς τα δεξιά στον άξονα των τεταγμένων
X^-: αριθμός μετακινήσεων προς τα αριστερά στον άξονα των τεταγμένων
Y^+: αριθμός μετακινήσεων προς τα πάνω στον άξονα των τετμημένων
Y^-: αριθμός μετακινήσεων προς τα κάτω στον άξονα των τετμημένων.

Εφαρμόζοντας την πολυωνυμική κατανομή έχουμε

$$\begin{aligned} p_{00}(2\nu) &= \sum_{2(i+j)=2\nu} P(X^+ = i, X^- = i, Y^+ = j, Y^- = j) \\ &= \sum \frac{(2\nu)!}{i!i!j!j!} \left(\frac{1}{4}\right)^{2\nu}, \quad \nu = 1, 2, \ldots . \end{aligned}$$

Πολλαπλασιάζοντας αριθμητή και παρανομαστή με ν^2 παίρνουμε

$$p_{00}(2\nu) = \left(\frac{1}{4}\right)^{2\nu} \binom{2\nu}{\nu} \sum_{i=0}^{\nu} \binom{\nu}{i} \binom{\nu}{\nu - i} = \left(\frac{1}{4}\right)^{2\nu} \binom{2\nu}{\nu} \binom{2\nu}{\nu},$$

και χρησιμοποιώντας τον τύπο του Stirling έχουμε

$$p_{00}(2\nu) \sim \frac{1}{\pi\nu} \text{ και άρα } \sum_{\nu=0}^{\infty} p_{00}(2\nu) = \infty$$

που σημαίνει σύμφωνα με το Θεώρημα 6.1 ότι η κατάσταση $(0,0)$ είναι έμμονη. (Είναι φανερό ότι $p_{00}(2\nu+1) = 0,\ \nu = 0, 1, \ldots$).

Γ. Τρισδιάστατος Τυχαίος Περίπατος

Θεωρώντας το συμμετρικό τυχαίο περίπατο στις τρεις διαστάσεις, δηλ. με πιθανότητα $\frac{1}{6}$, προς κάθε κατεύθυνση στους τρεις άξονες έχουμε πάλι μία Μαρκοβιανή αλυσίδα $\{X_\nu,\ \nu = 1, 2, \ldots\}$ που περιγράφει τη θέση του σωματιδίου αμέσως μετά από ν μετακινήσεις. Η αλυσίδα είναι απλή και εξετάζουμε την κατάσταση $(0,0,0)$ (για συντομία γράφουμε 0). Παρόμοια διαδικασία μ' εκείνη του διδιάστατου τυχαίου περίπατου μας δίνει $p_{00}(2\nu+1) = 0$, $\nu = 0, 1, \ldots$ και

$$\begin{aligned} p_{00}(2\nu) = \sum_{(i,j):0 \le i+j \le \nu} P(&X^+ = i, X^- = i, Y^+ = j, Y^- = j, \\ &Z^+ = \nu - i - j, Z^- = \nu - i - j). \end{aligned}$$

Εφαρμόζοντας την πολυωνυμική κατανομή έχουμε

$$
\begin{aligned}
p_{00}(2\nu) &= \sum_{(i,j):0\le i+j\le \nu} \frac{(2\nu)!}{(i!)^2(j!)^2[(\nu-i-j)!]^2}\left(\frac{1}{6}\right)^{2\nu} \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^{2\nu}\binom{2\nu}{\nu}\sum\left[\frac{\nu!}{i!j!(\nu-i-j)!}\right]^2\left(\frac{1}{3}\right)^{2\nu} \\
&\le \left(\frac{1}{2}\right)^{2\nu}\binom{2\nu}{\nu}\left(\frac{1}{3}\right)^{\nu} C_\nu \underbrace{\sum \frac{\nu!}{i!j!(\nu-i-j)!}\left(\frac{1}{3}\right)^{\nu}}_{1} \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^{2\nu}\binom{2\nu}{\nu}\left(\frac{1}{3}\right)^{\nu} C_\nu,
\end{aligned}
$$

όπου $C_\nu = \max_{(i,j):0\le i+j\le n} \dfrac{\nu!}{i!j!(\nu-i-j)!}$.

Θα δείξουμε ότι για μεγάλο ν η τιμή του C_ν επιτυγχάνεται για $i = j \sim \frac{\nu}{3}$. Έστω i_0, j_0, για τα οποία επιτυγχάνεται το max. Τότε ισχύουν οι εξής σχέσεις

$$
\begin{aligned}
&\frac{\nu!}{(i_0-1)!j_0(\nu-i_0+1-j_0)!} \le C_\nu, \quad \frac{\nu!}{(i_0+1)!j_0(\nu-i_0-1-j_0)!} \le C_\nu \\
&\frac{\nu!}{i_0!(j_0-1)!(\nu-i_0-j_0+1)!} \le C_\nu \quad \frac{\nu!}{i_0!(j_0+1)!(\nu-i_0-j_0-1)!} \le C_\nu
\end{aligned}
$$

ή

$$
\begin{aligned}
\nu - i_0 - 1 \le 2j_0 \le \nu - i_0 + 1 \\
\nu - j_0 - 1 \le 2i_0 \le \nu - j_0 + 1
\end{aligned}
$$

ή

$$
\begin{aligned}
1 - \frac{i_0}{\nu} - \frac{1}{\nu} \le 2\frac{j_0}{\nu} \le 1 - \frac{i_0}{\nu} + \frac{1}{\nu} \\
1 - \frac{j_0}{\nu} - \frac{1}{\nu} \le 2\frac{i_0}{\nu} \le 1 - \frac{j_0}{\nu} + \frac{1}{\nu}
\end{aligned}
$$

και για ν μεγάλο έχουμε τις σχέσεις

$$
\begin{aligned}
1 - \frac{i_0}{\nu} \le 2\frac{j_0}{\nu} \le 1 - \frac{i_0}{\nu} \\
1 - \frac{j_0}{\nu} \le 2\frac{i_0}{\nu} \le 1 - \frac{j_0}{\nu}
\end{aligned}
$$

ή

$$2\frac{j_0}{\nu} = 1 - \frac{i_0}{\nu},\ 2\frac{i_0}{\nu} = 1 - \frac{j_0}{\nu},\ 2j_0 = \nu - i_0,\ 2i_0 = \nu - j_0$$

δηλ. για μεγάλα ν έχουμε

$$i_0 \sim \frac{\nu}{3}\, \kappa\alpha\iota\, j_0 \sim \frac{\nu}{3}.$$

Για τις τιμές αυτές έχουμε ότι

$$p_{00}(2\nu) \leq \binom{2\nu}{\nu} \frac{\nu!}{\left(\frac{\nu}{3}\right)!\left(\frac{\nu}{3}\right)!\left(\frac{\nu}{3}\right)! 2^{2\nu} 3^{\nu}}$$

και χρησιμοποιώντας τον τύπο του Stirling

$$p_{00}(2\nu) \approx \frac{3\sqrt{3}}{2\pi^{3/2}\nu^{3/2}}.$$

Αλλά

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{3\sqrt{3}}{2\pi^{3/2}\nu^{3/2}} < \infty,$$

άρα

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} p_{00}(2\nu) < \infty,$$

το οποίο σημαίνει ότι η κατάσταση 0 είναι μεταβατική και όλες οι καταστάσεις μεταβατικές σε αντίθεση με το μονοδιάστατο και διδιάστατο τυχαίο περίπατο.

Θεώρημα 6.3. *Έστω j μία έμμονη κατάσταση. Τότε υπάρχει μοναδικό μη αναγώγιμο κλειστό σύνολο καταστάσεων K που περιέχει την j, τέτοιο ώστε για όλες τις $i, \kappa \in K$ να είναι*

$$f_{i\kappa} = 1 \quad \kappa\alpha\iota \quad f_{\kappa i} = 1.$$

Απόδειξη. Η j είναι έμμονη δηλ. $f_j = 1$. Έστω ότι $j \to \kappa$, τότε $P(X_\nu = \kappa, X_r \neq j, \quad \kappa, r = 1, \ldots, \nu - 1 | X_0 = j) = \alpha > 0$, για κάποιο $\nu > 0$.

Έστω ότι το σύστημα ξεκινώντας από την κατάσταση j δεν επιστρέφει σ' αυτήν ποτέ. Τότε έχουμε ότι
P (μη επανόδου στην j (ξεκινώντας από την j)) $= 1 - f_j$ και $1 - f_j \geq \alpha(1 - f_{\kappa j})$, όπου $f_{\kappa j} = \sum_{\nu=1}^{\infty} f_{\kappa j}(\nu)$. Αλλά $f_j = 1$ και $\alpha > 0$, άρα

$$1 - f_{\kappa j} = 0 \ \text{ ή } \ f_{\kappa j} = 1 \ \text{ δηλ. } \ \kappa \leftrightarrow j,$$

άρα $j \leftrightarrow j$. Έστω τώρα το σύνολο $K_j = \{i : j \to i\}$ και $i, \kappa \in K_j$. Έχουμε σύμφωνα με τα παραπάνω ότι $f_{\kappa j} = 1$ δηλ. $j \leftrightarrow \kappa$ και από το ότι $j \to i$ έπεται ότι $\kappa \to i$. Με τον ίδιο συλλογισμό έχουμε ότι $i \to \kappa$, άρα $i \leftrightarrow \kappa$ και όλες οι καταστάσεις του K_j επικοινωνούν. Από το Θ. 4.2 έχουμε ότι όλες είναι του ιδίου τύπου, δηλ. έμμονες όπως η j και το σύνολο K_j είναι μη αναγώγιμο κλειστό σύνολο. Έχουμε δηλ.

$$f_{i\kappa} = 1 \;\text{ και }\; f_{\kappa i} = 1 \;\; \forall\, i, \kappa \in K_j. \qquad \blacklozenge$$

Πόρισμα 6.2. *Αν η j είναι έμμονη και κ μεταβατική, τότε $j \nrightarrow \kappa$.*

Με βάση τα παραπάνω παρατηρούμε ότι ο πίνακας πιθανοτήτων μεταπήδησης πρώτης τάξης $\boldsymbol{P}$ μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{E} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{M_1} & \boldsymbol{M} \end{bmatrix},$$

όπου , τετραγωνικοί πίνακες που αντιστοιχούν στις έμμονες και μεταβατικές καταστάσεις αντίστοιχα, ενώ $\boldsymbol{M_1}$ είναι πίνακας που περιέχει τις πιθανότητες μεταπήδησης των μεταβατικών καταστάσεων στις έμμονες.

Ο πίνακας μπορεί να διαμεριστεί σε άλλους υποπίνακες στοχαστικούς που αντιστοιχούν στα κλειστά σύνολα καταστάσεων, που αφορούν τις έμμονες που επικοινωνούν.

Γενικά μπορεί να διατυπωθεί το εξής θεώρημα **διαμέρισης** του συνόλου των καταστάσεων μιας Μαρκοβιανής αλυσίδας.

Θεώρημα 6.4. *Το σύνολο Ω των καταστάσεων μπορεί να διαιρεθεί κατά μοναδικό τρόπο ως εξής:*

$$\boldsymbol{\Omega = M \cup K_1 \cup K_2 \cup \ldots},$$

όπου $\boldsymbol{M}$ το σύνολο των μεταβατικών καταστάσεων και $\boldsymbol{K_i}$ $i = 1, 2, \ldots$ τα κλειστά σύνολα καταστάσεων που αντιστοιχούν στις έμμονες.

Παράδειγμα 6.1. *Ο τυχαίος περίπατος με $\Omega = \{0, 1, \ldots, N\}$ και $p_{00} = p_{NN} = 1$, $p_{i,i-1} = 1 - p$, $p_{i,i+1} = p$, έχει τις καταστάσεις 0 και N έμμονες (καταστάσεις απορρόφησης), ενώ τις $\{1, \ldots, N-1\}$ μεταβατικές. Έτσι έχουμε τη* **διαμέριση** $\boldsymbol{\Omega = \{1, \ldots, \; - 1\} \cup \{0\} \cup \{\}}$ *και αναδιατάσσοντας τις καταστάσεις ο πίνακας $\boldsymbol{P}$ γράφεται*

$$\begin{array}{c} \\ \boldsymbol{P} = \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 0 & N & 1 & 2 & \cdots & N-1 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1-p & 0 & 0 & p & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1-p & 0 & \cdots & 0 \\ & & & & & \\ 0 & p & 0 & 0 & \cdots \; 1-p & 0 \end{array}\right] \end{array}$$

$$= \left[\begin{array}{ccccc} \boldsymbol{K_1} & 0 & & \cdots & 0 \\ 0 & \boldsymbol{K_2} & 0 & \cdots & 0 \\ & & & & \\ & \boldsymbol{M_1} & \boldsymbol{M} & & \\ & & & & \end{array}\right].$$

Παράδειγμα 6.2. *Έστω η Μαρκοβιανή αλυσίδα με $\Omega = \{0, 1, \ldots, 5\}$ και πίνακα πιθανοτήτων μεταπήδησης*

$$\boldsymbol{P} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccccc} 1/3 & 2/3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2/3 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 & 3/4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/5 & 4/5 & 0 & 0 \\ 1/4 & 0 & 1/4 & 0 & 1/4 & 1/4 \\ 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 \end{array}\right] \end{array},$$

ο οποίος γράφεται ως

$$P = \left[\begin{array}{ccc} E_1 & 0 & 0 \\ 0 & E_2 & 0 \\ M_1 & M_2 & M \end{array}\right],$$

όπου

$$E_1 = \left[\begin{array}{cc} 1/3 & 2/3 \\ 2/3 & 1/3 \end{array}\right], \quad E_2 = \left[\begin{array}{cc} 1/4 & 3/4 \\ 1/5 & 4/5 \end{array}\right], \quad M = \left[\begin{array}{cc} 1/4 & 1/4 \\ 1/6 & 1/6 \end{array}\right]$$
$$M_1 = \left[\begin{array}{cc} 1/4 & 0 \\ 1/6 & 1/6 \end{array}\right], \quad M_2 = \left[\begin{array}{cc} 1/4 & 0 \\ 1/6 & 1/6 \end{array}\right].$$

Από το Θεώρημα 6.3 έχουμε ότι

$$f_{i\kappa} = 1 \;\; \forall\, i, \kappa \in E_1 \;\; \text{και} \;\; f_{js} = 1 \;\; \forall\, j, s \in E_2.$$

Ο αναγνώστης παροτρύνεται να δείξει ότι $f_0 = 1$, $f_2 = 1$ και $f_5 < 1$ χρησιμοποιώντας τους σχετικούς ορισμούς και να υπολογίσει τους μέσους χρόνους επανόδου μ_0 και μ_2. Για παράδειγμα, έχουμε

$$f_{00}(1) = \frac{1}{3},\ f_{00}(2) = \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3},\ f_{00}(3) = \frac{2}{3}\frac{1}{3}\frac{2}{3}, \dots$$
$$f_{00}(\nu) = \frac{2}{3}\frac{1}{3}\frac{1}{3}\cdots\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3} = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{\nu-2}\frac{2}{3}$$
$$f_0 = \sum_{\nu=1}^{\infty} f_{00}(\nu) = \frac{1}{3} + \sum_{\nu=2}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^{\nu-2} = 1$$

και

$$\mu_0 = \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu f_{00}(\nu) = \frac{1}{3} + \sum_{\nu=2}^{\infty}\nu\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^{\nu-2} = 2.$$

Οι πιθανότητες $f_{j\kappa}$ όπου $j \in M$ και $\kappa \in E_1$ ή E_2 δεν είναι τόσο εύκολα υπολογίσιμες με όσα γνωρίζουμε ως τώρα, π.χ.

$$f_{40}(1) = \frac{1}{4},\ f_{40}(2) = p_{44}p_{40} + p_{45}p_{50} = \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{6}$$
$$f_{40}(3) = p_{44}p_{44}p_{40} + p_{45}p_{55}p_{50} + p_{45}p_{51}p_{10} = \left(\frac{1}{4}\right)^3 + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{6}\right)^2 + \frac{1}{4}\frac{1}{6}\frac{2}{3}$$
$$\begin{aligned} f_{40}(4) = &p_{44}p_{44}p_{44}p_{40} + p_{45}p_{55}p_{55}p_{50} + p_{45}p_{55}p_{51}p_{10} \\ &+ p_{45}p_{51}p_{11}p_{11}p_{10} = \dots \end{aligned}$$

Το Θεώρημα 7.5 της επόμενης παραγράφου μας επιτρέπει τον προσδιορισμό τους.

Χρησιμοποιώντας τα προηγούμενα θεωρήματα μπορούμε να καταλήξουμε σ' ενδιαφέροντα συμπεράσματα ως προς τον αριθμό των επισκέψεων του συστήματος στις καταστάσεις της Μαρκοβιανής αλυσίδας που το περιγράφει. Για το σκοπό αυτό ορίζουμε τις τυχαίες μεταβλητές

$$\begin{matrix} \xi_\nu = 1, & \text{αν } X_\nu = i \text{ και } X_0 = i \\ & & \nu = 1, 2, \dots . \\ \xi_\nu = 0, & \text{διαφορετικά} \end{matrix}$$

Τότε το άθροισμα $\sum_{\nu=1}^{\infty}\xi_\nu$ ισούται με τον αριθμό των επανόδων στην i. Είναι $E(\xi_\nu) = 1\cdot p_{ii}(\nu) + 0\cdot(1 - p_{ii}(\nu)) = p_{ii}(\nu)$ και

$$E\left(\sum_{\nu=1}^{\infty}\xi_\nu\right) = \sum_{\nu=1}^{\infty}E(\xi_\nu) = \sum_{\nu=1}^{\infty}p_{ii}(\nu).$$

Το τελευταίο αποτέλεσμα σε συνδυασμό με το Θεώρημα 6.1 μας δίνει το ακόλουθο πόρισμα:

Πόρισμα 6.3. *Μια κατάσταση i είναι έμμονη (μεταβατική) αν και μόνο αν ο μέσος αριθμός επανόδων στην i είναι άπειρος (πεπερασμένος).*

Ορίζουμε τώρα τις εξής πιθανότητες
$g_{ii}(N) = P$ (το σύστημα επιστρέφει στην i τουλάχιστον N φορές), $i \in \Omega$.
Τότε
$g_{ii} = \lim_{N\to\infty} g_{ii}(N)$ είναι η πιθανότητα απείρων επανόδων στην i κατάσταση.

Πόρισμα 6.4. *Μία κατάσταση i είναι έμμονη ή μεταβατική ανάλογα αν $g_{ii} = 1$ ή*

Απόδειξη. Με διαδοχικές εφαρμογές του θεωρήματος ολικής πιθανότητας ως προς το χρόνο πρώτης επανόδου στην i έχουμε

$$\begin{aligned} g_{ii}(N) &= \sum_{\nu=1}^{\infty} f_{ii}(\nu) g_{ii}(N-1) = g_{ii}(N-1) \sum_{\nu=1}^{\infty} f_{ii}(\nu) \\ &= g_{ii}(N-1) f_i = \cdots = g_{ii}(1) f_i^{N-1} = f_i^N \end{aligned}$$

αφού εξ ορισμού

$$g_{ii}(1) = P \ \ (\text{τουλάχιστον μία φορά επιστρέφει στην } \ i) \ \ \text{δηλ.} \ \ g_{ii}(1) = f_i.$$

Αφού $\lim_{N\to\infty} g_{ii}(N) = g_{ii}$, έχουμε ότι $g_{ii} = 1$ ή 0 αναλόγως του αν $f_i = 1$ ή $f_i < 1$ αντίστοιχα δηλ. αναλόγως του αν η κατάσταση i είναι έμμονη ή μεταβατική. ♦

Πόρισμα 6.5. *Αν $i \leftrightarrow j$ και j έμμονη, τότε με πιθανότητα 1 το σύστημα ξεκινώντας από την i επισκέπτεται την j άπειρες φορές.*

Απόδειξη. Έστω οι πιθανότητες

$$\begin{aligned} g_{ij}(N) = P(&\text{τουλάχιστον } N \text{ φορές το σύστημα ξεκινώντας από την } i \\ &\text{επισκέπτεται την } j), \quad N = 1, 2, \ldots. \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας το θεώρημα ολικής πιθανότητας έχουμε

$$g_{ij}(N) = \sum_{\nu=1}^{\infty} f_{ij}(\nu) g_{jj}(N-1) = g_{jj}(N-1) f_{ij}$$

και

$$g_{ij} = \lim_{N\to\infty} g_{ij}(N) = f_{ij} \lim_{N\to\infty} g_{jj}(N-1) = f_{ij} g_{jj}.$$

Αλλά η j είναι έμμονη, άρα από Πόρισμα 6.4 είναι $g_{jj} = 1$, και αφού $i \leftrightarrow j$ από Θεώρημα 6.2 έχουμε $f_{ij} = 1$. Επομένως

$$g_{ij} = 1.$$ ♦

Στη συνέχεια αναφέρουμε μερικές στοιχειώδεις συνέπειες της περιοδικότητας, οι οποίες είναι χρήσιμες στην οριακή συμπεριφορά των πιθανοτήτων μεταπήδησης.

Έστω μία ανάγωγη αλυσίδα Markov με περίοδο d και έστω οι καταστάσεις της i και j. Αφού είναι ανάγωγη (απλή) έχουμε ότι $i \leftrightarrow j$, $\forall\, i, j \in \Omega$ και άρα $\exists\, m$, οι ακέραιοι: $p_{ij}(m) > 0$ και $p_{ji}(n) > 0$. Αλλά $p_{ii}(m+n) \geq p_{ij}(m)p_{ji}(n) > 0$ άρα $m + n$ πολλαπλάσιο του d. Κρατώντας σταθερό το n παρατηρούμε ότι κάθε ακέραιος m που είναι τέτοιος ώστε $p_{ij}(m) > 0$ είναι της μορφής $m = r + \nu d$, $0 \leq r \leq d$, $\nu = 0, 1, \ldots$. Με βάση την i κατάσταση, ο αριθμός r είναι χαρακτηριστικός της κατάστασης j (ίσως και άλλων καταστάσεων), δηλ. τότε κάθε κατάσταση ανήκει σε μία από τις κατηγορίες $G_0, G_1, \ldots, G_{d-1}$, όπου

$$G_r = \{j : p_{ij}(m) = 0, \;\; \text{εκτός αν} \;\; m = r + \nu d\}.$$

Τα σύνολα $G_0, \ldots, G_{d-1}$ είναι ξένα μεταξύ τους και αποτελούν μία διαμέριση του συνόλου Ω των καταστάσεων της αλυσίδας.

Έστω, για παράδειγμα, η αλυσίδα Markov με $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ και πίνακα πιθανοτήτων μεταπήδησης πρώτης τάξης

$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 1/3 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 & 0 & 3/4 & 0 \end{bmatrix}.$$

Η αλυσίδα είναι απλή και έχει περίοδο $d = 3$. Θα προσδιορίσουμε τα σύνολα καταστάσεων G_0, G_1, G_2, με βάση την κατάσταση 1.

Οι πίνακες πιθανοτήτων μεταπήδησης 2ας και 3ης τάξης είναι

$$\boldsymbol{P}^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7/12 & 0 & 5/12 & 0 \\ 1/3 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

και

$$\boldsymbol{P}^{(3)} = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7/12 & 0 & 5/12 & 0 \\ 1/3 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 7/12 & 0 & 5/12 & 0 \\ 1/3 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 \end{bmatrix}.$$

Από τους παραπάνω πίνακες έχουμε τα σύνολα

$$\begin{aligned} G_0 &= \{j : p_{1j}(3\nu) > 0 \quad \text{για κάποιο } \nu\} = \{1,4,6\} \\ G_1 &= \{j : p_{1j}(3\nu+1) > 0 \quad \text{για κάποιο } \nu\} = \{3,5\} \\ G_2 &= \{j : p_{1j}(3\nu+2) > 0 \quad \text{για κάποιο } \nu\} = \{2\} \end{aligned}$$

Αν π.χ. είχαμε πάρει ως βάση την κατάσταση 2, τότε θα είχαμε

$$G_0 = \{2\}, \quad G_1 = \{1,4,6\}, \quad G_2 = \{3,5\}.$$

Παρατήρηση: Παρατηρώντας την αλυσίδα τις στιγμές 3, $2 \cdot 3$, $\ldots$, νd, τότε έχουμε μία νέα αλυσίδα με πίνακα πιθανοτήτων μεταπήδησης πρώτης τάξης τον $\boldsymbol{P}^{(3)}$, ο οποίος μας δείχνει ότι κάθε σύνολο G_r ορίζει μία ανάγωγη απεριοδική υποαλυσίδα. Αυτό ισχύει γενικά. Στο παράδειγμά μας έχουμε τις υποαλυσίδες με πίνακες πιθανοτήτων μεταπήδησης πρώτης τάξης

$$\boldsymbol{P} = \begin{array}{c} \begin{matrix} 1 & 4 & 6 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{bmatrix} \end{array}, \quad \boldsymbol{P}_1 = \begin{array}{c} \begin{matrix} 3 & 5 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 7/12 & 5/12 \\ 7/12 & 5/12 \end{bmatrix} \end{array}, \quad \boldsymbol{P}_2 = p_{22} = 1.$$

7. Ασυμπτωτική συμπεριφορά των πιθανοτήτων μεταπήδησης

Το ακόλουθο θεώρημα αποτελεί το κλειδί για την απόδειξη των οριακών θεωρημάτων που θα ακολουθήσουν. Η απόδειξή του είναι πέρα από το σκοπό αυτού του συγγράμματος και παραλείπεται. Ωστόσο ο αναγνώστης παραπέμπεται στο βιβλίο των Karlin και Taylor, Κεφ.3 για περαιτέρω λεπτομέρειες.

Ανανεωτικό θεώρημα σε διακριτό χρόνο.

Έστω η ακολουθία των μη αρνητικών όρων $\{\alpha_\nu\}$ με $\sum_\nu \alpha_\nu = 1$.
Έστω d ο Μ.Κ.Δ. των ακεραίων $\nu : \alpha_\nu > 0$ και

$$\kappa_\nu = \alpha_1\kappa_{\nu-1} + \alpha_2\kappa_{\nu-2} + \cdots + \alpha_\nu\kappa_0, \quad \nu \geq 1, \quad \kappa_0 = 1.$$

Τότε

$$\lim_{\nu\to\infty} \kappa_{\nu d} = \frac{d}{\mu}, \quad \textit{όπου} \quad \mu = \sum_{\nu} \nu\alpha_\nu.$$

Θεώρημα 7.1. *α) Αν η j είναι μεταβατική ή έμμονη μηδενική, τότε*

$$\lim_{\nu\to\infty} p_{jj}(\nu) = 0. \tag{7.1}$$

β) Αν η j είναι εργοδική, τότε

$$\lim_{\nu\to\infty} p_{jj}(\nu) = \frac{1}{\mu_j}. \tag{7.2}$$

γ) Αν η j είναι έμμονη θετική με περίοδο d, τότε

$$\lim_{\nu\to\infty} p_{jj}(\nu) = \frac{d}{\mu_j}. \tag{7.3}$$

Απόδειξη. α) Αν η j είναι μεταβατική, τότε $\sum_{\nu=0}^{\infty} p_{jj}(\nu) < \infty$, άρα $p_{jj}(\nu) \to 0$ όταν $\nu \to \infty$.
β) Από τη σχέση $p_{jj}(\nu) = \sum_{r=1}^{\nu} f_{jj}(r) p_{jj}(\nu - r)$ και το ανανεωτικό θεώρημα έχουμε

$$\lim_{\nu\to\infty} p_{jj}(\nu) = \frac{1}{\mu_j}, \quad \text{όπου} \quad \mu_j = \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu f_{jj}(\nu).$$

Αν $\mu_j = \infty$, τότε $\lim_{\nu\to\infty} p_{jj}(\nu) = 0$.
γ) Αφού η j είναι περιοδική με περίοδο d έπεται ότι ο Μ.Κ.Δ. των ακεραίων $r > 0 : f_{jj}(r) > 0$ είναι ο αριθμός d. Άρα από το ανανεωτικό θεώρημα έχουμε ότι

$$\lim_{\nu\to\infty} p_{jj}(\nu) = \frac{d}{\mu_j}.$$ ♦

Το επόμενο λήμμα είναι χρήσιμο για την απόδειξη του επόμενου θεωρήματος.

Λήμμα 7.1. *Έστω η ακολουθία*

$$y_\nu = \sum_{\kappa=0}^{\nu} \beta_\kappa x_{\nu-\kappa}, \quad \nu = 0, 1, \dots\ ,$$

όπου $\beta_\nu \geq 0$, $\sum_{\nu=0}^{\infty} \beta_\nu = \beta < \infty$ και $\lim_{\nu\to\infty} x_\nu = x$. Τότε

$$\lim_{\nu\to\infty} y_\nu = \beta x.$$

Θεώρημα 7.2. *α) Αν η j είναι μεταβατική ή έμμονη μηδενική, τότε*

$$\lim_{\nu\to\infty} p_{ij}(\nu) = 0, \quad \forall\, i \in \Omega. \tag{7.4}$$

β) Αν η j είναι εργοδική, τότε

$$\lim_{\nu\to\infty} p_{ij}(\nu) = \frac{1}{\mu_j} f_{ij}, \quad \forall\, i \in \Omega. \tag{7.5}$$

γ) Αν η j είναι έμμονη θετική με περίοδο d_j και $i \leftrightarrow j$ με $i \in G_r$, τότε

$$\begin{aligned} \lim_{\nu\to\infty} p_{ij}(\nu) = \lim_{m\to\infty} p_{ij}(md_j + s) &= \frac{d_j}{\mu_j} \quad \textit{αν} \;\; j \in G_{r+s} \\ &= 0 \qquad \textit{διαφορετικά.} \end{aligned} \tag{7.6}$$

Απόδειξη. α) Από τη σχέση

$$p_{ij}(\nu) = \sum_{r=1}^{\nu} f_{ij}(r) p_{jj}(\nu - r)$$

και αφού η j είναι μεταβατική ή έμμονη μηδενική έχουμε από την (7.1) του Θεωρήματος 7.1 και το Λήμμα 7.1 ότι

$$\lim_{\nu\to\infty} p_{ij}(\nu) = 0.$$

β) Αφού η j είναι εργοδική έχουμε από την (7.2) του Θεωρήματος 7.1 ότι $\lim_{\nu\to\infty} p_{jj}(\nu) = \frac{1}{\mu_j}$ και από το Λήμμα 7.1 ότι

$$\lim_{\nu\to\infty} p_{ij}(\nu) = \frac{1}{\mu_j} f_{ij}, \quad \text{όπου} \quad f_{ij} = \sum_{\nu=1}^{\infty} f_{ij}(\nu) < \infty.$$

γ) Έστω $i \in G_r$. Αν $j \in G_r$, τότε η υποαλυσίδα που έχει καταστάσεις το σύνολο G_r και μονοβηματικές πιθανότητες, τις πιθανότητες d_j τάξης αποτελεί, όπως είδαμε στο τέλος της προηγούμενης παραγράφου, μία ανάγωγη απεριοδική αλυσίδα και επειδή η j είναι έμμονη θετική η υποαλυσίδα είναι εργοδική. Άρα από το β) έχουμε

$$\lim_{m\to\infty} p_{ij}(md_j) = \frac{1}{\mu_j^{\star}} f_{ij}^{\star}.$$

Όμως $f^\star_{ij} = 1$ αφού $i, j \in G_r$ έμμονες και

$$\mu^\star_j = \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu f^\star_{jj}(\nu) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu f_{jj}(\nu d_j) = \frac{1}{d_j} \sum_{\nu=1}^{\infty} (\nu d_j) f_{jj}(\nu d_j)$$
$$= \frac{\mu_j}{d_j}.$$

Επομένως

$$\lim_{m\to\infty} p_{ij}(md_j) = \frac{d_j}{\mu_j}.$$

Έστω τώρα η σχέση $p_{ij}(\nu+1) \overset{C-K}{=} \sum_\kappa p_{i\kappa} p_{\kappa j}(\nu)$. Έχουμε

$$\lim_{\nu\to\infty} p_{ij}(\nu+1) = \lim_{m\to 0} p_{ij}(md_j+1) = \sum_\kappa p_{i\kappa} \lim_{m\to 0} p_{\kappa j}(md_j)$$
$$= \frac{d_j}{\mu_j} \quad \text{αν} \quad j \in G_{r+1}$$
$$= 0 \quad \text{αν} \quad j \notin G_{r+1},$$

αφού η άθροιση γίνεται για όλα τα κ που ανήκουν στο G_{r+1} σύνολο. Όμοια έχουμε από τη σχέση $p_{ij}(\nu+2) \overset{C-M}{=} \sum_\kappa p_{i\kappa}(2) p_{\kappa j}(\nu)$ ότι

$$\lim_{\nu\to\infty} p_{ij}(\nu+2) = \lim_{m\to\infty} p_{ij}(md_j+2) = \sum_\kappa p_{i\kappa}(2) \lim_{m\to\infty} p_{\kappa j}(md_j)$$
$$= \frac{d_j}{\mu_j} \quad \text{αν} \quad j \in G_{r+2}$$
$$= 0 \quad \text{αν} \quad j \notin G_{r+2}$$

αφού, όπως και προηγούμενα οι $p_{i\kappa}(2)$ είναι μη μηδενικές για τις καταστάσεις κ του συνόλου G_{r+2}. Γενικά δηλ. έχουμε ότι

$$\lim_{\nu\to\infty} p_{ij}(\nu) = \lim_{m\to\infty} p_{ij}(md_j+s) = \frac{d_j}{\mu_j}, \quad \text{αν} \quad j \in G_{r+s}$$
$$= 0, \quad \text{αν} \quad j \notin G_{r+s}.$$

♦

Τα παραπάνω αποτελέσματα οδηγούν στο εξής πολύ χρήσιμο για τις εφαρμογές πόρισμα.

Πόρισμα 7.1. *Σε πεπερασμένη αλυσίδα δεν υπάρχουν μηδενικές καταστάσεις και είναι αδύνατο να είναι όλες μεταβατικές.*

8. Στάσιμη Κατανομή

Ορισμός 8.1. *Μία συνάρτηση πιθανότητας* $\{\upsilon_j, j = 0, 1, \ldots\}$ *καλείται* ***στάσιμη*** *για μία αλυσίδα Markov με πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης πρώτης τάξης* $\boldsymbol{P} = (p_{ij})$ *και* $\Omega = \{0, 1, \ldots\}$ *αν ισχύει η σχέση*

$$\upsilon_j = \sum_{i=0}^{\infty} \upsilon_i p_{ij}, \quad i, j \in \Omega. \tag{8.1}$$

Αν θεωρήσουμε τη στάσιμη κατανομή ως διάνυσμα-γραμμή δηλ. $U = (\upsilon_0, \upsilon_1, \ldots, \upsilon_j, \ldots)$, τότε η (8.1) γράφεται σε μορφή πινάκων

$$\boldsymbol{U} = \boldsymbol{U}\boldsymbol{P}. \tag{8.2}$$

Παρατηρούμε τα εξής:

1. Πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη της (8.2) με τον πίνακα $\boldsymbol{P}$ έχουμε

$$\boldsymbol{U} = \boldsymbol{U}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{U}\boldsymbol{P}^{\mathbf{2}} = \boldsymbol{U}\boldsymbol{P}^{(\mathbf{2})}$$

και επαγωγικά ότι

$$\boldsymbol{U} = \boldsymbol{U}\boldsymbol{P}^{(\boldsymbol{\nu})}$$

ή

$$\upsilon_j = \sum_{i=0}^{\infty} \upsilon_i p_{ij}(\nu). \tag{8.3}$$

2. Γνωρίζουμε ότι οι απόλυτες πιθανότητες δίνονται από τη σχέση

$$P(X_\nu = j) = p_j(\nu) = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i p_{ij}(\nu), \tag{8.4}$$

όπου $\{\alpha_i\}$, $i \in \Omega$ η αρχική κατανομή.
Αν $\lim_{\nu\to\infty} p_{ij}(\nu) = \pi_j$, τότε από την (8.4) έχουμε

$$\lim_{\nu\to\infty} p_j(\nu) = \pi_j \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i = \pi_j. \tag{8.5}$$

3. Αν υποτεθεί ότι η αρχική κατάνομή $\{\alpha_\kappa\}$, $\kappa = 0, 1, \ldots$ είναι στάσιμη για την αλυσίδα δηλ. αν ισχύει η σχέση

$$\alpha_j = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i p_{ij}(\nu), \tag{8.6}$$

συμπεραίνουμε από τις (8.4), (8.5) και (8.6) ότι

$$p_j(\nu) = \alpha_j \quad \text{και} \quad \lim_{\nu\to\infty} p_j(\nu) = \alpha_j, \quad j = 0, 1, \ldots\ , \tag{8.7}$$

δηλ. η αρχική κατανομή παραμένει **αναλλοίωτη** ως προς το χρόνο, κι αυτό δικαιολογεί τον όρο ***Στάσιμη***.

Θεώρημα 8.1. *Έστω μία ανάγωγη (απλή) και απεριοδική αλυσίδα Markov με πιθανότητες μεταπήδησης $\{p_{ij}\}$. Η αλυσίδα έχει στάσιμη κατανομή αν και μόνο αν είναι εργοδική. Τότε η στάσιμη κατανομή είναι μοναδική και συμπίπτει με την οριακή κατανομή $\{\pi_j\}$, όπου*

$$\pi_j = \lim_{\nu\to\infty} p_{ij}(\nu) = \lim_{\nu\to\infty} p_j(\nu) > 0, \quad \forall\, i \in \Omega.$$

Απόδειξη. Έστω ότι υπάρχει η στάσιμη κατανομή $\{\upsilon_j\}$ $j = 0, 1, \ldots$. Θα δείξουμε ότι η αλυσίδα είναι εργοδική. Αφού η αλυσίδα είναι ανάγωγη όλες οι καταστάσεις είναι του ιδίου τύπου. Έστω ότι είναι μεταβατικές ή έμμονες μηδενικές, τότε

$$\lim_{\nu\to\infty} p_{ij}(\nu) = 0, \quad \forall\, i, j \in \Omega.$$

Από τη σχέση $\upsilon_j = \sum_{i=0}^{\infty} \upsilon_i p_{ij}(\nu)$ έχουμε ότι $\forall\, i, j \in \Omega$, $\upsilon_j = \sum_{i=0}^{\infty} \upsilon_i = 0$, το οποίο είναι άτοπο αφού $\sum_{i=0}^{\infty} \upsilon_i = 1$. Άρα όλες οι καταστάσεις είναι έμμονες θετικές.

Έστω τώρα ότι η αλυσίδα είναι εργοδική. Τότε

$$\lim_{\nu\to\infty} p_{ij}(\nu) = \frac{1}{\mu_j} = \pi_j, \quad \forall\, j \in \Omega.$$

Για κάθε ν και M έχουμε $\sum_{j=0}^{M} p_{ij}(\nu) \leq \sum_{j=0}^{\infty} p_{ij}(\nu) = 1$ και $\sum_{j=0}^{M} \pi_j \leq \lim_{\nu\to\infty} \sum_{j=0}^{M} p_{ij}(\nu) \leq$

1. Άρα $\sum_{j=0}^{\infty} \pi_j \leq 1$. Έστω τώρα η σχέση

$$p_{ij}(\nu+1) = \sum_{\kappa=0}^{\infty} p_{i\kappa}(\nu) p_{\kappa j} \geq \sum_{\kappa=0}^{M} p_{i\kappa}(\nu) p_{\kappa j}$$

και για $\nu \to \infty$ ότι

$$\pi_j = \lim_{\nu\to\infty} p_{ij}(\nu+1) \geq \sum_{\kappa=0}^{M} \pi_\kappa p_{\kappa j} forall\ M \quad \acute{\eta} \quad \pi_j \geq \sum_{\kappa=0}^{\infty} \pi_\kappa p_{\kappa j}$$

και αθροίζοντας ως προς j έχουμε

$$1 \geq \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j \geq \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{\kappa=0}^{\infty} \pi_\kappa p_{\kappa j} = \sum_{\kappa=0}^{\infty} \pi_\kappa \sum_{j=0}^{\infty} p_{\kappa j} = \sum_{\kappa=0}^{\infty} \pi_\kappa.$$

Άρα

$$\pi_j = \sum_{\kappa=0}^{\infty} \pi_\kappa p_{\kappa j}$$

ή

$$\pi_j = \sum_{\kappa=0}^{\infty} \pi_\kappa p_{\kappa j}(\nu).$$

Για $\nu \to \infty$ έχουμε $\pi_j = \sum_{\kappa=0}^{\infty} \pi_\kappa \lim_{\nu\to\infty} p_{\kappa j}(\nu)$, αφού $\sum_{\kappa=0}^{\infty} \pi_\kappa$ συγκλίνει και $p_{\kappa j}$ είναι ομοιόμορφα φραγμένη.
Άρα

$$\pi_j = \pi_j \sum_{\kappa=0}^{\infty} \pi_\kappa \quad \forall\, j \in \Omega$$

δηλ. $\sum_{\kappa=0}^{\infty} \pi_\kappa = 1$, αφού $\pi_\kappa > 0$ λόγω του ότι έχουμε έμμονες θετικές καταστάσεις.

Για τη μοναδικότητα τώρα έστω, ότι υπάρχει εκτός της στάσιμης κατανομής $\{\pi_j\}$ και η $\{x_j\}$, τότε

$$x_j = \sum_{i=0}^{\infty} x_i p_{ij}(\nu)$$

και

$$x_j = \sum_{i=0}^{\infty} x_i \lim_{\nu\to\infty} p_{ij}(\nu) = \pi_j \sum_{i=0}^{\infty} x_i = \pi_j \quad \forall\, j \in \Omega. \qquad \blacklozenge$$

Πόρισμα 8.1. *Αν η αλυσίδα είναι απλή, απεριοδική με πεπερασμένο αριθμό καταστάσεων, έστω $|\Omega| = S$, και πίνακα πιθανοτήτων μεταπήδησης διπλά στοχαστικό, τότε*

$$\lim_{\nu\to\infty} p_{ij}(\nu) = \pi_j = \frac{1}{S}, \quad j = 1, \ldots, S.$$

Απόδειξη. Από τις υποθέσεις που έχουμε συμπεραίνουμε ότι η αλυσίδα είναι εργοδική, άρα υπάρχει η στάσιμη κατανομή και συμπίπτει με την οριακή. Έχουμε $\pi_j = \sum_{i=1}^{S} \pi_i p_{ij}$ και από τη σχέση $\sum_{i=1}^{S} p_{ij} = 1$ (διπλά στοχαστικός), συνάγεται ότι για $\pi_j = c$, $j = 1, \ldots, S$ ικανοποιείται η σχέση της στάσιμης κατανομής δηλ. $c = \sum_{i=1}^{S} c p_{ij} = c \cdot 1 = c$. Από τη σχέση $\sum_{j=1}^{S} \pi_j = 1$ έπεται $\sum_{j=1}^{S} c = 1 \Rightarrow c = \frac{1}{S}$, δηλ. $\pi_j = \frac{1}{S}$, $j = 1, \ldots, S$. ♦

Θεώρημα 8.2. *Μία ανάγωγη περιοδική αλυσίδα Markov έχει στάσιμη κατανομή αν και μόνο αν οι καταστάσεις της είναι έμμονες θετικές. Τότε $\pi_j > 0$ $\forall\, j \in \Omega$ και η $\{\upsilon_j\}$ είναι μοναδική και η σχέση της με την οριακή κατανομή είναι*

$$\lim_{m\to\infty} p_{ij}(md + s) = \lim_{m\to\infty} p_j(md + s) = \pi_j = d\upsilon_j, \quad i \in G_r, \quad j \in G_{r+s}.$$

Παραδείγματα:

1) Ροή επιτυχιών. Όπως γνωρίζουμε η αλυσίδα ορίζεται από τις σχέσεις

$$p_{\kappa 0} = q, \quad p_{\kappa,\kappa+1} = p, \quad \kappa = 0, 1, \ldots\ , \quad p + q = 1$$

και είναι εργοδική, άρα υπάρχει η στάσιμη κατανομή.
Είναι

$$\upsilon_1 = \sum_{\kappa} \upsilon_\kappa p_{\kappa 1} = \upsilon_0 p_{01} = \upsilon_0 p$$
$$\upsilon_2 = \sum_{\kappa} \upsilon_\kappa p_{\kappa 2} = \upsilon_1 p = \upsilon_0 p^2$$

και επαγωγικά

$$\upsilon_\nu = \sum_{\kappa} \upsilon_\kappa p_{\kappa\nu} = \upsilon_0 p^\nu.$$

Από το ότι $\sum_{\nu=0}^{\infty} \upsilon_\nu = 1$ έχουμε

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \upsilon_0 p^\nu = 1 \quad ή \quad \upsilon_0 = 1 - p$$

και γενικά

$$\upsilon_\nu = (1-p)p^\nu, \quad \nu = 0, 1, 2, \ldots .$$

Παρατήρηση: Από το Θεώρημα 7.1 έχουμε ότι

$$\lim_{\nu\to\infty} p_{i0}(\nu) = \lim_{\nu\to\infty} p_0(\nu) = \pi_0 = \upsilon_0 = \frac{1}{\mu_0}.$$

όπου

$$\mu_0 = \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu f_{00}(\nu) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu q p^{\nu-1} = \frac{1}{q} = \frac{1}{1-p}.$$

2) Η Μαρκοβιανή αλυσίδα με $\Omega = \{0, 1, 2\}$ και πίνακα

$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} 0 & p & q \\ q & 0 & p \\ p & q & 0 \end{bmatrix}$$

είναι εργοδική και ο πίνακας διπλά στοχαστικός $(p + q = 1)$. Σύμφωνα με το Θεώρημα 8.1 και το Πόρισμα 8.1 έχουμε

$$\lim_{\nu\to\infty} p_{ij}(\nu) = \lim_{\nu\to\infty} p_j(\nu) = \pi_j = \upsilon_j = \frac{1}{3}, \quad j = 0, 1, 2.$$

3. Τυχαίος Περίπατος. Έστω ο τυχαίος περίπατος με $\Omega = \{0, 1, \ldots\}$ και πίνακα πιθανοτήτων μεταπήδησης πρώτης τάξης

$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} r_0 & p_0 & 0 & & \cdots & 0 & \cdots \\ q_1 & r_1 & p_1 & & \cdots & 0 & \cdots \\ 0 & q_2 & r_2 & p_2 & \cdots & 0 & \cdots \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \end{bmatrix}.$$

Είναι δηλ.

$$p_{00} = r_0, \quad p_{01} = p_0, \; r_0 + p_0 = 1$$

και

$$p_{i,i} = r_i, \quad p_{i,i-1} = q_i, \quad p_{i,i+1} = p_i, \quad r_i + p_i + q_i = 1, \quad i = 1, 2, \ldots .$$

Η αλυσίδα είναι απλή και απεριοδική. Ζητάμε τη στάσιμη κατανομή

$$\upsilon_j = \sum_{\kappa} \upsilon_\kappa p_{\kappa j}.$$

Από τη σχέση

$$\upsilon_0 = \sum_{\kappa} \upsilon_\kappa p_{\kappa 0} = \upsilon_0 r_0 + \upsilon_1 q_1$$

και

$$\upsilon_j = \sum_{\kappa} \upsilon_\kappa p_{\kappa j} = \upsilon_{j-1} p_{j-1} + \upsilon_j r_j + \upsilon_{j+1} q_{j+1}, \quad j = 1, 2, \dots.$$

Αφού $r_0 = 1 - p_0$ και $r_j = 1 - p_j - q_j$ έχουμε

$$\left\{ \begin{array}{l} \upsilon_1 q_1 - \upsilon_0 p_0 = 0 \\ \upsilon_{j+1} q_{j+1} - \upsilon_j p_j = \upsilon_j q_j - \upsilon_{j-1} p_{j-1} \end{array} \right\}$$

ή

$$\upsilon_{j+1} q_{j+1} - \upsilon_j p_j = \upsilon_j q_j - \upsilon_{j-1} p_{j-1} = \cdots = \upsilon_1 q_1 - \upsilon_0 p_0 = 0.$$

Από τα παραπάνω παίρνουμε την εξής γενική σχέση

$$\upsilon_{\kappa+1} q_{\kappa+1} = \upsilon_\kappa p_\kappa, \quad \kappa = 0, 1, \dots$$

η οποία μας δίνει

$$\upsilon_\kappa = \upsilon_0 \frac{p_0 p_1 \cdots p_{\kappa-1}}{q_1 q_2 \cdots q_\kappa}, \quad \kappa = 1, \dots. \tag{8.8}$$

Από τη σχέση $\sum_{\kappa=0}^{\infty} \upsilon_\kappa = 1$ έχουμε

$$\upsilon_0 \left(1 + \sum_{\kappa=1}^{\infty} \frac{p_0 p_1 \cdots p_{\kappa-1}}{q_1 q_2 \cdots q_\kappa} \right) = 1 \Rightarrow \upsilon_0 = \left(1 + \sum \frac{p_0 p_1 \cdots p_{\kappa-1}}{q_1 q_2 \cdots q_\kappa} \right)^{-1}$$

αν $\displaystyle\sum_{\kappa=1}^{\infty} \frac{p_0 p_1 \cdots p_{\kappa-1}}{q_1 q_2 \cdots q_\kappa} < \infty$, οπότε η στάσιμη κατανομή προσδιορίζεται από τη σχέση (8.8).

Στην ειδική περίπτωση που είναι $p_i = p$, $q_i = q$, $r_i = 1 - p - q$, $i = 1, 2, \dots$, $r_0 = 1 - p$, $p_0 = p$ έχουμε

$$\upsilon_0 \left(1 + \sum_{\kappa=1}^{\infty} \left(\frac{p}{q} \right)^{\kappa} \right) = 1$$

και αν $p < q$, τότε

$$\upsilon_0 \left(1 + \frac{1}{1 - p/q} - 1 \right) = 1 \Rightarrow \upsilon_0 = \frac{q-p}{q} = 1 - \frac{p}{q}$$

και γενικά

$$\upsilon_\kappa = \left(1 - \frac{p}{q} \right) \left(\frac{p}{q} \right)^\kappa, \quad \kappa = 0, 1, \ldots .$$

Άρα η στάσιμη κατανομή ακολουθεί την τροποποιημένη Γεωμετρική κατανομή.

4. Έστω η αλυσίδα Markov με πιθανότητες μεταπήδησης πρώτης τάξης

$$p_{\kappa,\kappa-1} = \frac{\kappa}{\alpha}, \quad p_{\kappa,\kappa+1} = \frac{\alpha - \kappa}{\alpha}, \quad \kappa = 0, 1, \ldots, \alpha.$$

Η αλυσίδα είναι απλή και πεπερασμένη με περίοδο 2. Η στάσιμη κατανομή είναι:

$$\upsilon_0 = \sum_\kappa \upsilon_\kappa p_{\kappa 0} = \upsilon_1 p_{10} = \upsilon_1 \frac{1}{\alpha} \Rightarrow \upsilon_1 = \alpha \upsilon_0$$

$$\upsilon_1 = \sum_\kappa \upsilon_\kappa p_{\kappa 1} = \upsilon_0 p_{01} + \upsilon_2 p_{21} = \upsilon_0 + \upsilon_2 \frac{2}{\alpha} \Rightarrow \upsilon_2 = \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} \upsilon_0$$

και γενικά

$$\begin{aligned} \upsilon_i = \sum_\kappa \upsilon_\kappa p_{\kappa i} &= \upsilon_{i-1} p_{i-1\, i} + \upsilon_{i+1} p_{i+1\, i} \\ &= \upsilon_{i-1} \frac{\alpha - i + 1}{\alpha} + \upsilon_{i+1} \frac{i+1}{\alpha} \Rightarrow \upsilon_i = \binom{\alpha}{i} \upsilon_0. \end{aligned}$$

Από το ότι $\sum_{i=0}^{\alpha} \upsilon_i = 1$ έχουμε

$$\upsilon_0 \sum_{i=0}^{\alpha} \binom{\alpha}{i} = 1, \quad \upsilon_0 (1+1)^\alpha = 1 \Rightarrow \upsilon_0 = \frac{1}{2^\alpha}.$$

Άρα η στάσιμη κατανομή είναι

$$\upsilon_i = \binom{\alpha}{i} \left(\frac{1}{2} \right)^i \left(\frac{1}{2} \right)^{\alpha - i}, \quad i = 0, 1, \ldots .$$

Άρα η στάσιμη κατανομή ακολουθεί τη Διωνυμική κατανομή.

5. Έστω η αλυσίδα με χώρο καταστάσεων $\Omega = \{0, 1, 2, 3\}$ και πίνακα πιθανοτήτων μεταπήδησης πρώτης τάξης

$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ p & q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Η αλυσίδα είναι απλή και περιοδική με περίοδο $d = 3$. Είναι

$$\boldsymbol{P^{(2)}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p+q \\ p & q & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{P^{(3)}} = \begin{bmatrix} p & q & 0 & 0 \\ p & q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p+q & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p+q \end{bmatrix}, \quad p+q=1.$$

Παρατηρούμε ότι με βάση την "0" έχουμε τις εξής κατηγορίες $G_0 = \{0, 1\}$, $G_1 = \{3\}$, $G_2 = \{2\}$. Υπολογίζουμε τη στάσιμη κατανομή από τη σχέση $\upsilon_j = \sum_i \upsilon_j p_{ij}$. Είναι $\upsilon_0 = \upsilon_2 p$, $\upsilon_1 = \upsilon_2 q$, $\upsilon_2 = \upsilon_3$, $\upsilon_3 = \upsilon_0 + \upsilon_1$ και από το ότι $\upsilon_0 + \upsilon_1 + \upsilon_2 + \upsilon_3 = 1$ έχουμε ότι $\upsilon_0(1 + \frac{q}{p} + \frac{1}{p} + \frac{1}{p} = 1$ και άρα $\upsilon_0 = \frac{1}{3}p$, $\upsilon_1 = \frac{1}{3}q$, $\upsilon_2 = \upsilon_3 = \frac{1}{3}$.

Εφαρμόζοντας τα Θεωρήματα 7.2 και 8.2 οι οριακές πιθανότητες είναι

$$\lim_{m\to\infty} p_{ij}(3m) = \frac{1}{\mu_j} d_j \quad \forall\, i, j \in G_0, \quad d_j = d = 3$$

δηλ.

$$\lim_{m\to\infty} p_{00}(3m) = \frac{1}{\mu_0} d = d\upsilon_0 = 3\frac{1}{3}p = p$$

και

$$\begin{aligned} \lim p_{10}(3m) &= \frac{1}{\mu_0} d = p \\ \lim_{m\to\infty} p_{11}(3m) &= \frac{1}{\mu_1} d = q, \\ \lim_{m\to\infty} p_{01}(3m) &= \frac{1}{\mu_1} d = q \\ \lim_{m\to\infty} p_{22}(3m) &= 1 = \lim_{m\to\infty} p_{33}(3m) = 1. \end{aligned}$$

Δηλ.

$$\lim_{m\to\infty} \boldsymbol{P^{(3m)}} = \begin{bmatrix} p & q & 0 & 0 \\ p & q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

και με τον ίδιο τρόπο έχουμε ότι

$$\lim_{m\to\infty} \boldsymbol{P}^{(\mathbf{3m+1})} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ p & q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\lim_{m\to\infty} \boldsymbol{P}^{(\mathbf{3m+2})} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p+q \\ p & q & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

9. Πιθανότητες Απορρόφησης

Είδαμε στις προηγούμενες παραγράφους ότι αν i, j είναι έμμονες καταστάσεις και ανήκουν στο ίδιο κλειστό σύνολο, τότε $f_{ij} = f_{ji} = 1$. Ετσι εφαρμόζοντας την σχέση (7.5) του Θεωρήματος 7.2 προσδιορίζουμε τις οριακές πιθανότητες για τις παραπάνω καταστάσεις. Είναι φανερό ότι $f_{ij} = 0$ αν οι i, j δεν ανήκουν στο ίδιο κλειστό σύνολο εμμόνων. Για να συμπληρωθεί η μελέτη των οριακών πιθανοτήτων είναι αναγκαίο να προσδιορισθούν οι πιθανότητες f_{ij}, $i \in M$, $j \in K_j$, όπου M είναι το σύνολο των μεταβατικών καταστάσεων και K_j το κλειστό σύνολο που περιέχει την j καθώς και όλες τις έμμονες με τις οποίες επικοινωνεί. Κάτω από τις παραπάνω συνθήκες ισχύει το παρακάτω θεώρημα την απόδειξη του οποίου παραλείπουμε.

Θεώρημα 9.1. *Έστω η έμμονη κατάσταση j, τότε οι πιθανότητες f_{ij}, $i \in M$ ικανοποιούν τις σχέσεις*

$$\begin{aligned} f_{ij} &= \sum_{\kappa\in M} p_{i\kappa} f_{\kappa j} + \sum_{\kappa\in K_j} p_{i\kappa} f_{\kappa j} \\ &= \sum_{\kappa\in M} p_{i\kappa} f_{\kappa j} + \sum_{\kappa\in K_j} p_{i\kappa}. \end{aligned}$$

Στη συνέχεια θα εφαρμόσουμε το παραπάνω θεώρημα στον τυχαίο περίπατο, που όπως αναφέραμε στην σελίδα 71 μπορεί να περιγράψει την περιουσία παικτών που παίζουν συγκεκριμένα παιχνίδια. Οι πιθανότητες απορρόφησης είναι συνήθως οι πιθανότητες καταστροφής τους. Περιγράφουμε ένα τέτοιο παιχνίδι στον ακόλουθο τυχαίο περίπατο με πίνακα πιθανοτήτων μεταπήδησης πρώτης τάξης

$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} r_0 & p_0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ q_1 & r_1 & p_1 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & q_2 & r_2 & p_2 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}.$$

Έστω ο παίκτης (Πέτρος) που παίζει μ' έναν αντίπαλο που διαθέτει άπειρη περιουσία (καζίνο). Ο παραπάνω πίνακας σημαίνει ότι αν η περιουσία του Πέτρου είναι k τότε υπάρχει πιθανότητα p_k να κερδίσει μια μονάδα, q_k να χάσει μια μονάδα και r_k να διατηρήσει την περιουσία του.

Στην περίπτωση που $p_k = p$, $q_k = q$, $r_k = 0$, $k = 1, 2, \ldots$ και
α. $p > q$, τότε το παιχνίδι είναι ευνοϊκό για τον Πέτρο
β. $p < q$, τότε το παιχνίδι είναι ευνοϊκό για τον αντίπαλό του
γ. $p = q$, τότε το παιχνίδι είναι δίκαιο.

Για τα r_0, p_0 έχουμε τα εξής:

1. $r_0 = 1$, $p_0 = 0$ (που σημαίνει ότι ο αντίπαλος του Πέτρου έχει ως σκοπό να του πάρει την περιουσία και μόλις συμβεί αυτό σταματάει το παιχνίδι).

2. $r_0 > 0$, $p_0 > 0$ (που σημαίνει ότι ο αντίπαλος του Πέτρου παίζει γιατί του αρέσει το παιχνίδι και επιτρέπει στον Πέτρο να συνεχίσει το παίξιμο και χωρίς περιουσία).

Στην πρώτη περίπτωση η κατάσταση 0 είναι κατάσταση απορρόφησης και η πιθανότητα f_{j0} είναι η πιθανότητα να καταστραφεί ο Πέτρος δοθέντος ότι η αρχική του περιουσία ήταν j. Οι $\{f_{j\,0},\ j = 0, 1, 2, \ldots\}$ ικανοποιούν τις εξισώσεις

$$\begin{aligned} f_{j0} &= \sum_{i=0}^{\infty} p_{ji} f_{i0}, \quad j = 1, 2, \ldots \\ f_{00} &= 1. \end{aligned} \tag{9.1}$$

Υποθέτουμε, για $j \geq 1$, ότι

$$p_{ji} = \begin{cases} p_j > 0 & \text{αν} \quad i = j + 1 \\ r_j \geq 0 & \text{αν} \quad i = j \\ q_j > 0 & \text{αν} \quad i = j - 1 \\ 0 & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

Οι (9.1) γράφονται

$$f_{j0} = q_j f_{j-1\,0} + r_j f_{j0} + p_j f_{j+1\,0}, \quad j = 1, 2, \ldots$$

και αφού $r_j = 1 - q_j - p_j$ έχουμε ότι

$$p_j(f_{j+1\,0} - f_{j0}) = q_j(f_{j0} - f_{j-1\,0}), \quad j = 1, 2, \ldots .$$

Η τελευταία σχέση μας δίνει για $m > j \geq 1$

$$f_{m+1\,0} - f_{m\,0} = \frac{q_m \cdots q_j}{p_m \cdots p_j}(f_{j\,0} - f_{j-1\,0}).$$

Ας ορίσουμε τις εξής ποσότητες

$$\rho_0 = 1, \quad \rho_m = \frac{q_m \cdots q_1}{p_m \cdots p_1}, \quad m = 1, 2, \ldots .$$

Τότε

$$f_{m+1\,0} - f_{m0} = \rho_m(f_{10} - 1), \quad m \geq 0.$$

Παρατηρούμε ότι

$$\sum_{m=0}^{k}(f_{m+1\,0} - f_{m0}) = f_{k+1\,0} - 1,$$

άρα

$$f_{k+1\,0} - 1 = (f_{10} - 1)\sum_{m=0}^{k}\rho_m, \quad k = 0, 1, \ldots \tag{9.2}$$

δηλ. έχουμε προσδιορίσει τις $f_{k\,0}$ συναρτήσει της $f_{1\,0}$, την οποία θα προσδιορίσουμε στη συνέχεια. Για να το επιτύχουμε ας υποθέσουμε επιπλέον ότι

$$q_K = 0, \quad r_K = 1, \quad p_K = 0$$

δηλ. το παιχνίδι σταματάει όταν η περιουσία του Πέτρου φθάσει ένα προκαθορισμένο ποσό K. Τότε οι $\{f_{j\,0},\ j = 0, 1, \ldots, K\}$ ικανοποιούν τις εξισώσεις

$$f_{j0} = \sum_{i=0}^{K} p_{ji} f_{i0}, \quad j = 1, \ldots, K-1, \quad f_{00} = 1, \quad f_{K0} = 0. \tag{9.3}$$

Σε πεπερασμένη αλυσίδα μπορούμε να προσδιορίσουμε την f_{10} χωρίς δυσκολία. Από το ότι $f_{K\,0} = 0$ έχουμε από την (9.2) για $k = K - 1$ ότι

$$f_{10} = 1 - \left[\sum_{m=0}^{K-1} \rho_m\right]^{-1} = \frac{\displaystyle\sum_{m=1}^{K-1} \rho_m}{\displaystyle\sum_{m=0}^{K-1} \rho_m}. \tag{9.4}$$

Από τις σχέσεις (9.2) και (9.4) έχουμε για έναν τυχαίο περίπατο με πίνακα πιθανοτήτων μεταπήδησης πρώτης τάξης τον παραπάνω $\boldsymbol{P}$ όπως διαμορφώθηκε, δηλ. με τις καταστάσεις 0 και K να είναι καταστάσεις απορρόφησης, και χώρο καταστάσεων $\Omega = \{0, 1, \ldots, K\}$, ότι οι πιθανότητες απορρόφησης από την κατάσταση 0 ικανοποιούν τις σχέσεις

$$1 - f_{j\,0} = \frac{\displaystyle\sum_{m=0}^{j-1} \rho_m}{\displaystyle\sum_{m=0}^{K-1} \rho_m}, \quad j = 1, \ldots, K. \tag{9.5}$$

Για να προσδιορίσουμε τις πιθανότητες απορρόφησης για τον αρχικό μας τυχαίο περίπατο είναι λογικό να θεωρήσουμε ότι στις (9.5) το K τείνει στο άπειρο. Στην περίπτωση αυτή ισχύουν τα εξής: Αν

$$\sum_{m=0}^{\infty} \rho_m < \infty,$$

τότε

$$1 - f_{j\,0} = \frac{\displaystyle\sum_{m=0}^{j-1} \rho_m}{\displaystyle\sum_{m=0}^{\infty} \rho_m}, \quad j = 1, \ldots, \infty\ . \tag{9.6}$$

Αντίστοιχα, αν

$$\sum_{m=0}^{\infty} \rho_m = \infty,$$

τότε

$$f_{j\,0} = 1, \quad j = 1, 2, \ldots\ .$$

Για να κατανοήσουμε τα παραπάνω αποτελέσματα ας εξετάσουμε την απλή περίπτωση όπου $p = q$ και ο Πέτρος καθώς και ο αντίπαλός του μπορούν να φθάσουν το συνολικό ποσό K ο καθένας. Στην περίπτωση αυτή τα παραπάνω μεγέθη γίνονται

$$\rho_m = \left(\frac{q}{p}\right)^m$$

και η (9.5) μας δίνει

$$\begin{aligned} f_{j0} &= 1 - \frac{\dfrac{1-(q/p)^j}{1-q/p}}{\dfrac{1-(q/p)^K}{1-q/p}} = \frac{(q/p)^j - (q/p)^K}{1-(q/p)^K}, \quad \text{αν} \;\; p \neq q \\ &= 1 - \frac{j}{K} = \frac{K-j}{K}, \quad \text{αν} \;\; p = q. \end{aligned}$$

Αν $K \to \infty$, τότε

$$\begin{aligned} f_{j0} &= \left(\frac{q}{p}\right)^j, \quad \text{αν} \;\; p > q \\ &= 1, \qquad\quad \text{αν} \;\; p \leq q. \end{aligned}$$

Οι τελευταίες σχέσεις σημαίνουν ότι, αν το παιχνίδι είναι δίκαιο ή άδικο για τον Πέτρο και ο αντίπαλος έχει πολύ μεγαλύτερη περιουσία από τον Πέτρο, τότε ο Πέτρος σίγουρα καταστρέφεται. Αν όμως το παιχνίδι είναι ευνοϊκό για τον Πέτρο, τότε υπάρχει θετική πιθανότητα ο αντίπαλός του να καταστραφεί ακόμα κι' αν διαθέτει μεγαλύτερη περιουσία.

Με τις μεταβατικές καταστάσεις συνδέονται οι τυχαίες μεταβλητές που περιγράφουν το χρόνο που απαιτείται για να απορροφηθούν από τις έμμονες. Ένδιαφέρον παρουσιάζει ο προσδιορισμός της κατανομής τους. Δίνουμε μερικά στοιχεία για το πρόβλημα αυτό και πως μπορούν αυτά να εφαρμοσθούν στον τυχαίο περίπατο. Είναι απαραίτητοι οι ακόλουθοι ορισμοί:

Έστω $N_k(\nu)$ ο χρόνος κατάληψης της κατάστασης k στα πρώτα ν βήματα. Η τυχαία μεταβλητή

$$N_k(\infty) = \lim_{\nu\to\infty} N_k(\nu)$$

εκφράζει τον ολικό χρόνο κατάληψης της κατάστασης k.

Για κάθε κατάσταση κ και $\nu = 1, 2, \ldots$ ορίζουμε την τ.μ.

$$\begin{aligned} Z_k(\nu) &= 1 \;\; \text{αν} \;\; X_\nu = k \\ &= 0 \;\; \text{αν} \;\; X_\nu \neq k \;, \end{aligned}$$

τότε

$$N_k(\nu) = \sum_{m=1}^{\nu} Z_k(m), \quad N_k(\infty) = \sum_{m=1}^{\infty} Z_k(m)$$

και

$$E\{N_k(\infty)|X_0 = j\} = E\left\{\sum_{m=1}^{\infty} Z_k(m)|X_0 = j\right\}$$
$$= \sum_{m=1}^{\infty} E(Z_k(m)|X_0 = j) = \sum_{m=1}^{\infty} p_{jk}(m). \tag{9.7}$$

Ο χρόνος πριν την απορρόφηση είναι ο χρόνος που ξοδεύει η αλυσίδα κινούμενη ανάμεσα στις μεταβατικές καταστάσεις, έστω N', που είναι

$$N' = \sum_{i \in M} N_i(\infty). \tag{9.8}$$

Συνεπώς ο χρόνος για την απορρόφηση, έστω N, είναι

$$N = N' + 1. \tag{9.9}$$

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει το μέγεθος

$$m_j = E\{N|X_0 = j\}, \tag{9.10}$$

δηλ. ο μέσος χρόνος απορρόφησης όταν η αλυσίδα ξεκινάει από την κατάσταση j, $j \in M$. Η σχέση (9.10) λόγω της (9.9) γράφεται

$$m_j = 1 + E\{N'|X_0 = j\}. \tag{9.11}$$

Ισχύει το ακόλουθο θεώρημα για τους μέσους m_j, $j \in M$.

Θεώρημα 9.2. *Για $j \in M$ ισχύουν οι σχέσεις*

$$m_j = 1 + \sum_{i \in M} \sum_{\nu=1}^{\infty} p_{ji}(\nu) \tag{9.12}$$

$$m_j = 1 + \sum_{k \in M} p_{ik} m_k. \tag{9.13}$$

Απόδειξη. Η (9.11) λόγω των (9.7) και (9.8) γράφεται

$$\begin{aligned} m_j &= 1 + E\left\{\sum_{i\in M} N_i(\infty)|X_0 = j\right\} \\ &= 1 + \sum_{i\in M}\sum_{n=1}^{\infty} p_{ji}(n). \end{aligned}$$

Από το θεώρημα ολικής πιθανότητας έχουμε

$$\begin{aligned} m_j = E\{N|X_0 = j\} &= \sum_{k\in\Omega} p_{jk} E\{N|X_1 = k\} \\ &= \sum_{k\in M} p_{jk}[1 + E\{N|X_0 = k\}] + \sum_{k\in M^C} p_{jk} \\ &= 1 + \sum_{k\in M} p_{jk} m_k, \end{aligned}$$

όπου M^C το σύνολο όλων των έμμονων καταστάσεων. ♦

Παρατήρηση: Σε πεπερασμένες αλυσίδες οι χρόνοι απορρόφησης είναι πεπερασμένοι και το σύστημα (9.13) έχει μοναδική λύση. Σε μία αλυσίδα με άπειρες μεταβατικές καταστάσεις οι μέσοι χρόνοι απορρόφησης μπορεί να είναι άπειροι. Μπορεί να δειχθεί ότι αν οι χρόνοι απορρόφησης είναι πεπερασμένοι με πιθανότητα 1, τότε το σύστημα (9.13) έχει μοναδική λύση.

Στη συνέχεια θα προσδιορίσουμε τα παραπάνω μεγέθη στον τυχαίο περίπατο, που οι καταστάσεις 0 και K είναι καταστάσεις απορρόφησης ενώ οι $\{1,\ldots,K-1\}$ είναι μεταβατικές. Στην περίπτωση αυτή ο χρόνος απορρόφησης N είναι η διάρκεια του παιχνιδιού και $m_j = E\{N|X_0 = j\}$ είναι η μέση διάρκεια του παιχνιδιού δοθέντος ότι ο Πέτρος έχει περιουσία j στην αρχή του παιχνιδιού. Οι μέσοι χρόνοι απορρόφησης $\{m_j,\ j = 1,\ldots,k-1\}$ είναι η μοναδική λύση του συστήματος των εξισώσεων

$$m_j = 1 + \sum_{k=1}^{K-1} p_{jk} m_k, \quad j = 1,\ldots,K-1.$$

Αν ορίσουμε $m_0 = m_K = 0$ και χρησιμοποιήσουμε τις πιθανότητες μεταπήδησης πρώτης τάξης η προηγούμενη σχέση μας δίνει

$$m_j = 1 + q_j m_{j-1} + r_j m_j + p_j m_{j+1}, \quad j = 1,\ldots,K-1\ .$$

Θέτοντας

$$M_j = m_j - m_{j-1}, \quad j = 1,\ldots,K-1.$$

έχουμε

$$p_j M_{j+1} = q_j M_j - 1, \quad j = 1, 2, \ldots, K-1 \ .$$

Η τελευταία σχέση είναι μια πρώτης τάξης εξίσωση διαφορών από την οποία εύκολα παίρνουμε

$$\begin{aligned} M_{j+1} =& \frac{q_j}{p_j} \cdot \frac{q_{j-1}}{p_{j-1}} \cdots \frac{q_{j-m}}{q_{j-m}} M_{j-m} \\ & - \frac{1}{p_j}\left(1 + \frac{q_j}{p_{j-1}} + \cdots + \frac{q_j \cdots q_{j-m+1}}{p_{j-1} \cdots p_{j-m}}\right). \end{aligned} \tag{9.14}$$

Η τελευταία σχέση μας επιτρέπει τον προσδιορισμό των μέσων τιμών m_j, $j = 1, \ldots, K-1$.

Για να γίνει περισσότερο κατανοητή η παραπάνω διαδικασία ας θεωρήσουμε την περίπτωση του απλού τυχαίου περιπάτου, δηλ. με $p_i = p$, $q_i = q$ $i = 1, 2, \ldots, k-1$. Έχουμε

$$\begin{aligned} M_{j+1} &= \left(\frac{q}{p}\right)^j M_1 - \frac{1}{p}\left\{1 + \frac{q}{p} + \cdots + \left(\frac{q}{p}\right)^{j-1}\right\} = \\ &= \begin{cases} \left(\frac{q}{p}\right)^j M_1 - \left(\frac{1}{p-q}\right)\left\{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^j\right\} & \text{αν} \quad p \neq q \\ \\ M_1 - \frac{1}{p} j, & \text{αν} \quad p = q. \end{cases} \end{aligned} \tag{9.15}$$

Αλλά

$$\sum_{j=0}^{i-1} M_{j+1} = \sum_{j=0}^{i-1} (m_{j+1} - m_j) = m_i - m_0$$

και από την (9.15) έχουμε

$$m_i - m_0 = \begin{cases} \left\{M_1 + \left(\frac{1}{p-q}\right)\right\} \dfrac{1-\left(\frac{q}{p}\right)^i}{1-\dfrac{q}{p}} - \dfrac{i}{p-q} & \text{αν} \quad p \neq q \\ \\ iM_1 - \dfrac{1}{p}\dfrac{i(i-1)}{2}, & \text{αν} \quad p = q. \end{cases}$$

Αυτό που μένει είναι ο προσδιορισμός του M_1. Από το ότι $m_0 = m_K = 0$ έχουμε ότι για $p = q$

$$0 = m_K = KM_1 - \frac{1}{p}\frac{K(K-1)}{2} \quad \text{και άρα} \quad M_1 = \frac{K-1}{2p}.$$

Όμοια για $p \neq q$. Η λύση επομένως είναι

$$m_j = \begin{cases} \dfrac{j(K-j)}{2p}, & \text{αν} \quad p = q \\ \\ \dfrac{j}{q-p} - \dfrac{K}{q-p} \dfrac{1-\left(\frac{q}{p}\right)^j}{1-\left(\dfrac{q}{p}\right)^K}, & \text{αν} \quad p \neq q. \end{cases}$$

Αν $K \to \infty$, τότε

$$\begin{aligned} m_j &= \frac{j}{q-p} \quad \text{αν} \;\; q > p \\ &= \infty \qquad\; \text{αν} \;\; p = q. \end{aligned}$$

Τελειώνουμε το κεφάλαιο παραθέτοντας ένα απλό παράδειγμα στο οποίο μπορούμε να εφαρμόσουμε σχεδόν όλες τις έννοιες που μελετήσαμε.

Γενικό παράδειγμα. Έστω η Μαρκοβιανή αλυσίδα με $\Omega = \{0, 1, \ldots, 5\}$ και πίνακα πιθανοτήτων μεταπήδησης πρώτης τάξης

$$\boldsymbol{P} = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccccc} 1/2 & 2/3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2/3 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 & 3/4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/5 & 4/5 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 1/3 & 1/3 & 0 \end{array}\right] \end{array}.$$

Παρατηρούμε ότι υπάρχουν τα εξής δύο κλειστά σύνολα $K_1 = \{0, 1\}$, $K_2 = \{2, 3\}$ και οι μεταβατικές καταστάσεις $M = \{4, 5\}$.

Θα υπολογίσουμε τις οριακές πιθανότητες $\lim_{\nu \longrightarrow \infty} p_{ij}(\nu), \; i, j \in \Omega$.

1. Η υποαλυσίδα που αντιστοιχεί στο K_1 είναι εργοδική και έχει διπλά στοχαστικό πίνακα πιθανοτήτων μεταπήδησης πρώτης τάξης. Σύμφωνα με το Πόρισμα 8.1 έχουμε

$$\lim_{\nu \to \infty} p_{ij}(\nu) = \frac{1}{2} \;\; \forall \, i, j \in K_1.$$

2. Για το K_2 έχουμε

$$\boldsymbol{P}_{K_2} = \begin{array}{c} \\ 2 \\ 3 \end{array} \!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cc} 2 & 3 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cc} 1/4 & 3/4 \\ 1/5 & 4/5 \end{array}\right] \end{array}.$$

Η στάσιμη κατανομή είναι:

$$\upsilon_2 = \upsilon_2\frac{1}{4} + \upsilon_3\frac{1}{5},\ \upsilon_3 = \upsilon_2\frac{3}{4} + \upsilon_3\frac{4}{5} \Rightarrow \left(\upsilon_2 = \frac{4}{19}, \upsilon_3 = \frac{15}{19}\right)$$

και από το Θεώρημα 8.1 έχουμε

$$\lim_{\nu\to\infty} p_{i2}(\nu) = \frac{4}{19},\ \lim_{\nu\to\infty} p_{i3}(\nu) = \frac{5}{19} \quad \forall\, i \in K_2.$$

Διαφορετικός τρόπος υπολογισμού: Για παράδειγμα η "2" είναι έμμονη άρα $\lim_{\nu\to\infty} p_{22}(\nu) = \frac{1}{\mu_2}$, όπου $\mu_2 = \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu f_{22}(\nu)$. Ας δείξουμε ότι η "2" είναι έμμονη με βάση τον ορισμό και στη συνέχεια θα υπολογίσουμε τον μέσο χρόνο επανόδου μ_2. Είναι

$$f_{22}(1) = \frac{1}{4},\quad f_{22}(2) = \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{5},\quad f_{22}(3) = \frac{3}{4}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{5}\cdots$$

$$f_{22}(\nu) = \frac{3}{4}\left(\frac{4}{5}\right)^{\nu-2}\frac{1}{5},\quad \nu = 2,3,\ldots$$

και

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} f_{22}(\nu) = \frac{1}{4} + \sum_{\nu=2}^{\infty}\frac{3}{4}\left(\frac{4}{5}\right)^{\nu-2}\frac{1}{5} = \frac{1}{4} + \frac{3}{20}\frac{1}{1-\frac{4}{5}} = 1 \quad ,$$

άρα η "2" είναι έμμονη. Ο μέσος χρόνος επανόδου είναι

$$\begin{aligned}
\mu_2 = \sum_{\nu=1}^{\infty}\nu f_{22}(\nu) &= \frac{1}{4} + \sum_{\nu=2}^{\infty}\nu\frac{3}{20}\left(\frac{4}{5}\right)^{\nu-2} \\
&= \frac{1}{4} + \frac{3}{20}\sum_{\nu=2}^{\infty}[(\nu-1)+1]\left(\frac{4}{5}\right)^{\nu-2} \\
&= \frac{1}{4} + \frac{3}{20}\left[\sum_{\nu=2}^{\infty}\left(\frac{4}{5}\right)^{\nu-2} + \left[\frac{d}{ds}\sum_{\nu=2}^{\infty}s^{\nu-2}\right]_{s=\frac{4}{5}}\right] \\
&= \frac{1}{4} + \frac{3}{20}\left[\frac{1}{1-\frac{4}{5}} + \left[\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{1-s}\right)\right]_{s=\frac{4}{5}}\right] = \frac{19}{4}.
\end{aligned}$$

3. Γνωρίζουμε ότι $\lim_{\nu\to\infty} p_{ij}(\nu) = 0\ \forall\, i,j \in M$.

Θα προσδιορίσουμε τις πιθανότητες $\lim_{\nu\to\infty} p_{4i}(\nu),\ i = 0,1,2,3$ καθώς και τις $\lim_{\nu\to\infty} p_{5i}(\nu),\ i = 0,1,2,3$.
Είναι

$$\lim_{\nu\to\infty} p_{40}(\nu) = \frac{1}{\mu_0} f_{40} \ \text{ με } \ \mu_0 = 2,$$

Από το Θεώρημα 9.1 έχουμε

$$f_{40} = p_{40}f_{00} + p_{41}f_{10} = \frac{1}{3}\cdot 1 + \frac{1}{3}\cdot 1 = \frac{2}{3},$$

άρα

$$\lim_{\nu\to\infty} p_{40}(\nu) = \frac{1}{3}, \quad \text{όμοια} \quad \lim_{\nu\to\infty} p_{41}(\nu) = \frac{1}{3}.$$

Όμοια,

$$\lim_{\nu\to\infty} p_{42}(\nu) = \frac{1}{\mu_2}f_{42}, \quad \text{με} \quad \mu_2 = \frac{19}{4} \quad \text{και} \quad f_{42} = p_{43}f_{32} = \frac{1}{3}\cdot 1 = \frac{1}{3},$$

άρα

$$\lim_{\nu\to\infty} p_{42}(\nu) = \frac{4}{57} \quad \text{και} \lim_{\nu\to\infty} p_{43}(\nu) = \frac{1}{\mu_3}f_{43} = \frac{15}{57}$$

ή

$$\lim_{\nu\to\infty} p_{43}(\nu) = 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} - \frac{4}{57}.$$

Τέλος, ακολουθώντας την ίδια διαδικασία έχουμε

$$\lim_{\nu\to\infty} p_{50}(\nu) = \frac{1}{\mu_0}f_{50},$$

όπου

$$f_{50} = p_{51}f_{10} + p_{54}f_{40} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\frac{2}{3} = \frac{5}{9},$$

άρα

$$\lim_{\nu\to\infty} p_{50}(\nu) = \frac{5}{18}.$$

Η ίδια διαδικασία μας τις υπόλοιπες οριακές πιθανότητες που είναι

$$\lim_{\nu\to\infty} p_{51}(\nu) = \frac{5}{18}, \quad \lim_{\nu\to\infty} p_{52}(\nu) = \frac{16}{171} \quad \text{και} \quad \lim_{\nu\to\infty} p_{53}(\nu) = \frac{60}{171}.$$

10. Ασκήσεις

1. Ένα αμερόληπτο ζάρι ρίχνεται κατ' επανάληψη και έστω X_ν ο αριθμός των άσσων που εμφανίζονται στις ν πρώτες ρίψεις. Δείξετε ότι η $\{X_\nu\ \nu = 1, 2, \ldots\}$ είναι αλυσίδα Markov. Υπολογίστε τις πιθανότητες μεταπήδησης πρώτης και ν-οστής τάξης.

2. Δύο αμερόληπτα νομίσματα του ιδίου τύπου (όχι όμοια) ρίχνονται κατ' επανάληψη. Έστω X_ν ο συνολικός αριθμός εμφανίσεων του αποτελέσματος "κεφαλή" (K) κατά τις πρώτες ν ρίψεις των νομισμάτων. Να δειχθεί ότι η $\{X_\nu\ \nu = 1, 2, \ldots\}$ είναι Μαρκοβιανή αλυσίδα και να υπολογισθούν οι πιθανότητες μεταπήδησης πρώτης και δευτέρας τάξης. Να ταξινομηθούν οι καταστάσεις της αλυσίδας.

3. Από μία κάλπη που περιέχει s σφαιρίδια αριθμημένα από το 1 έως το s εξάγονται διαδοχικά και με επανάθεση το ένα μετά το άλλο σφαιρίδια και καταγράφεται ο αριθμός που φέρουν. Έστω Y_ν ο μέγιστος αριθμός που έχει καταγραφεί κατά τις ν πρώτες εξαγωγές. Να δειχθεί ότι η $\{Y_\nu,\ \nu = 1, 2, \ldots\}$ είναι μία αλυσίδα Markov και να υπολογισθούν οι πιθανότητες μεταπήδησης πρώτης και δευτέρας τάξεως. Να γίνει κατάταξη των καταστάσεων της αλυσίδας.

4. Έστω δύο κάλπες A και B που περιέχουν συνολικά N σφαίρες αριθμημένες από 1 έως N. Σε κάθε χρονική στιγμή $\nu = 1, 2, \ldots$ γίνεται το εξής πείραμα: Ένας αριθμός από 1 έως N εκλέγεται τυχαία και η σφαίρα που φέρει αυτόν τον αριθμό εξάγεται από την κάλπη στην οποία βρίσκεται και τοποθετείται είτε στην κάλπη A με πιθανότητα p, είτε στην κάλπη B με πιθανότητα $q(p + q = 1)$. Έστω X_ν ο αριθμός των σφαιρών της κάλπης A μετά το ν-οστό πείραμα. Να δειχθεί ότι η $\{X_\nu,\ \nu = 1, 2, \ldots\}$ είναι αλυσίδα Markov. Να προσδιορισθεί ο πίνακας πιθανοτήτων μεταπήδησης πρώτης τάξεως. Να γίνει πλήρης κατάταξη των καταστάσεων της αλυσίδας.

5. Τέσσερα παιδιά, έστω A, B, Γ και Δ, έχουν μία μπάλα και παίζουν το εξής παιχνίδι: Σε κάθε φάση του παιχνιδιού το παιδί που έχει τη μπάλα τη ρίχνει τυχαία σε κάποιο από τα άλλα τρία παιδιά. Έστω ότι X_0 δηλώνει το παιδί που έχει αρχικά τη μπάλα και $X_\nu,\ \nu = 1, 2, \ldots$ το παιδί που έχει τη μπάλα αμέσως μετά τη ν-οστή φάση του παιχνιδιού. Να υπολογισθεί ο πίνακας πιθανοτήτων μεταπήδησης πρώτης τάξης και η $P(X_2 = A)$, αν είναι το ίδιο πιθανό να έχει τη μπάλα οποιοδήποτε παιδί αρχικά. Να γίνει κατάταξη των καταστάσεων της αλυσίδας και να υπολογισθούν οι οριακές πιθανότητες $\lim_{\nu\to\infty} p_{ij}(\nu),\ i, j \in \{A, B, \Gamma, \Delta\}$.

6. Έστω Y_ν το άθροισμα των ενδείξεων ν ανεξαρτήτων ρίψεων ενός αμερόληπτου ζαριού. Ορίζοντας κατάλληλη αλυσίδα Markov να υπολογισθούν οι οριακές πιθανότητες $\lim_{\nu\to\infty} P(Y_\nu = 9\kappa,\ \kappa = 1, 2, \ldots)$.

7. Να υπολογισθεί η στάσιμη κατανομή για την αλυσίδα που περιγράφει 1) το μοντέλο Ehrenfest (σελ. 17), και 2) το μοντέλο διάχυσης Bernoulli - Laplace (σελ. 18).

8. Έστω η αλυσίδα Markov με $\Omega = \{0, 1\}$ και πίνακα $\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$. Να υπολογισθούν οι οριακές πιθανότητες και να δειχθεί ότι $\mu_0 = 3$ και $\mu_1 = \frac{3}{2}$ χρησιμοποιώντας τους κατάλληλους ορισμούς.

9. Η αλυσίδα Markov με $\Omega = \{0, 1, 2, 3\}$ και πίνακα πιθανοτήτων μεταπήδησης πρώτης τάξης

$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/6 & 1/2 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1/3 & 1/2 & 1/6 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

Να δειχθεί ότι η αλυσίδα είναι εργοδική και να υπολογισθούν οι οριακές πιθανότητες.

10. Έστω η Μαρκοβιανή αλυσίδα με χώρο καταστάσεων $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$ και πίνακα πιθανοτήτων μεταπήδησης πρώτης τάξης

$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} 1/3 & 2/3 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/9 & 1/3 & 4/9 & 1/9 \\ 1/4 & 1/8 & 1/8 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

Να ταξινομηθούν οι καταστάσεις της αλυσίδας. Να δειχθεί ότι

$$F_{11}(s) = \sum_{\nu=1}^{\infty} s^{\nu} f_{11}(\nu) = \frac{s}{3}\left(\frac{2+s}{2-s}\right)$$

και χρησιμοποιώντας το τελευταίο αποτέλεσμα να υπολογισθεί ο μέσος χρόνος επανόδου μ_1.

11. Έστω η αλυσίδα Markov με χώρο καταστάσεων $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ και πίνακα πιθανοτήτων μεταπήδησης πρώτης τάξης

$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 1/4 \\ 0 & 1/4 & 0 & 1/2 & 0 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1/16 & 1/16 & 1/4 & 1/4 & 1/8 & 1/4 \end{bmatrix}.$$

Να υπολογισθούν οι οριακές πιθανότητες

$$\lim_{\nu\to\infty} p_{ij}(\nu), \quad i,j \in \Omega.$$

12. Ο πίνακας πιθανοτήτων μεταπήδησης πρώτης τάξης μιας αλυσίδας είναι

$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} 1/4 & 3/4 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 2/3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Να γίνει πλήρης κατάταξη των καταστάσεων της και να προσδιορισθούν οι οριακές πιθανότητες $\lim_{\nu\to\infty} p_{ij}(\nu)$.

13. Σε δύο κάλπες, έστω I και II, κατανέμονται 5 άσπρες και 15 μαύρες σφαίρες τυχαία, αλλά έτσι ώστε κάθε κάλπη να περιέχει 10 σφαίρες. Σε κάθε δοκιμή εκλέγεται τυχαία μία σφαίρα από κάθε κάλπη και αυτές οι σφαίρες ανταλλάσσονται. Έστω Y_ν ο αριθμός των άσπρων σφαιρών της κάλπης II αμέσως μετά τη ν-οστή δοκιμή. Να αιτιολογηθεί γιατί η στοχαστική ανέλιξη $\{Y_\nu,\ \nu = 1,2,\ldots\}$ είναι Μαρκοβιανή αλυσίδα. Να υπολογισθεί ο πίνακας πιθανοτήτων μεταπήδησης πρώτης τάξης. Αν $P(X_0 = 1) = 1$ να υπολογισθεί η απόλυτη πιθανότητα $P(X_3 = 2)$. Να γίνει κατάταξη των καταστάσεων της αλυσίδας.

14. Να ταξινομηθούν οι καταστάσεις των Μαρκοβιανών αλυσίδων με χώρο καταστάσεων $\Omega = \{1,2,3,4\}$ και πίνακες πιθανοτήτων μεταπήδησης

$$\text{α)}\quad \boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} 1/3 & 2/3 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/4 & 0 & 1/4 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{β)}\quad \boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/3 & 0 & 0 & 2/3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Για την περίπτωση α) να δειχθεί ότι $f_{34} = 2/3$. Για την περίπτωση β)να υπολογισθούν οι μέσοι χρόνοι επανόδων $\mu_i,\ i = 1,2,3,4$.

15. Έστω μία Μαρκοβιανή αλυσίδα με $\Omega = \{0,1,2,\ldots\}$ με πιθανότητες μεταπήδησης πρώτης τάξης που δίνονται από τις σχέσεις

$$p_{0j} = \alpha_j,\ j > 0, \quad p_{ii} = r \ \text{ και } \ p_{i,i-1} = 1 - r,\ r \geq 1.$$

Να μελετηθεί η αλυσίδα για τις διάφορες τιμές των α_j, r.

16. Μελετώντας τα αποτελέσματα των φοιτητικών εκλογών παρατηρούμε τα εξής ως προς τις παρατάξεις A, B, Γ: Οι φοιτητές που ψηφίζουν την παράταξη A στις επόμενες φοιτητικές εκλογές την ψηφίζουν πάλι με πιθανότητα 0,8 και την παράταξη B με πιθανότητα 0,2. Οι φοιτητές που ψηφίζουν την παράταξη B στις επόμενες φοιτητικές εκλογές την ψηφίζουν πάλι με πιθανότητα 0,6, την παράταξη A με πιθανότητα 0,2 και την παράταξη Γ με πιθανότητα 0,2. Οι φοιτητές που ψηφίζουν την παράταξη Γ την ξαναψηφίζουν με πιθανότητα 1. Ποια είναι η πιθανότητα ένας φοιτητής που εκλέγεται τυχαία μετά από τέσσερα χρόνια φοίτησης δεδομένου ότι ως πρωτοετής ψήφισε την παράταξη A να την ξαναψήφισε ως τεταρτοετής;

17. Δύο διακεκριμένα αμερόληπτα ζάρια ρίχνονται κατ' επανάληψη και ταυτόχρονα. Μετά από κάθε ρίψη καταγράφεται το άθροισμα των ενδείξεων των ζαριών. Έστω X_ν, $\nu = 1, 2, \ldots$ το μεγαλύτερο άθροισμα που εμφανίστηκε στις ν πρώτες ρίψεις. Να δειχθεί ότι η X_ν, $\nu = 1, 2, \ldots$ είναι Μαρκοβιανή αλυσίδα. Να προσδιορισθούν οι πιθανότητες μεταπήδησς πρώτης και ν-οστής τάξης. Να γίνει κατάταξη των καταστάσεων της αλυσίδας.

18. Έστω η Μαρκοβιανή αλυσίδα X_ν, $\nu = 1, 2, \ldots$ με χώρο καταστάσεων $\Omega = \{0, 1, \ldots, \kappa\}$ και πιθανότητες μεταπήδησης πρώτης τάξης $p_{0i} = q_i$, $\sum_{i=0}^{\kappa} q_i = 1$ και $p_{i0} = 1$, $i = 1, \ldots, \kappa$. Να δειχθεί ότι υπάρχει στάσιμη κατανομή για την αλυσίδα και να προσδιορισθεί.

19. Έστω η Μαρκοβιανή αλυσίδα X_ν, $\nu = 1, 2, \ldots$ με χώρο καταστάσεων $\Omega = \{\alpha, \beta, \gamma\}$ και πίνακα πιθανοτήτων μεταπήδησης πρώτης τάξης

$$\boldsymbol{P} = \begin{array}{c} \\ \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \alpha & \beta & \gamma \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 2/3 & 0 & 1/3 \\ 3/4 & 0 & 1/4 \end{bmatrix} \end{array}.$$

Να υπολογισθεί η απόλυτη πιθανότητα $X_2 = \beta$ και η από κοινού πιθανότητα $P(X_1 = \gamma,\ X_2 = \alpha,\ X_3 = \alpha,\ X_4 = \gamma$, αν γνωρίζουμε ότι η αρχική κατανομή είναι $P(X_0 = \alpha) = P(X_0 = \beta) = P(X_0 = \gamma) = \dfrac{1}{3}$. Να γίνει κατάταξη των καταστάσεων και να υπολογισθεί η στάσιμη κατανομή αν υπάρχει.

20. Έστω η Μαρκοβιανή αλυσίδα X_ν, $\nu = 1, 2, \ldots$, με χώρο καταστάσεων $\Omega = \{0,\ 1,\ \ldots,\ 14\}$ και πιθανότητες μεταπήδησης πρώτης τάξης: $p_{05} = p_{09} = p_{014} = 1/3$ και $p_{i\,i-1} = 1$, $i = 1, 2, \ldots, 14$. Να δειχθεί ότι η αλυσίδα είναι εργοδική.

21. Υποθέτουμε ότι τα φυτά μιας περιοχής κατανέμονται ως εξής: 0=χορτάρι, 1=θάμνος, 2=μικρό δένδρο, 3=μεγάλο δένδρο και ο πίνακας πιθανοτήτων μεταπήδησης πρώτης τάξης θεωρώντας ως μία χρονική μονάδα το ένα έτος είναι

$$\boldsymbol{P} = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/24 & 7/8 & 1/12 & 0 \\ 1/36 & 0 & 8/9 & 1/12 \\ 1/8 & 0 & 0 & 7/8 \end{array} \right] \end{array}.$$

Οι παραπάνω πιθανότητες μπορούν να ερμηνευθούν ως εξής: το χορτάρι μπορεί να μείνει χορτάρι ή να γίνει θάμνος με πιθανότητα 1/2, κ.λ.π. ένα υψηλό δένδρο μπορεί να παραμείνει στην ίδια κατάσταση με πιθανότητα 7/8 ή λόγω πτώσης ή πυρκαγιάς να μετατραπεί σε χορτάρι με πιθανότητα 1/8. Να υπολογισθούν οι οριακές πιθανότητες $\lim_{\nu\to\infty} p_{ij}(\nu)$, $i, j = 0, 1, 2, 3$ που εκφράζουν την κατάσταση της περιοχής μετά από πολλά χρόνια.

22. Ένας παίκτης καλαθοσφαίρισης πετυχαίνει ένα καλάθι σύμφωνα με τις ακόλουθες πιθανότητες:
1/2 αν έχει χάσει στις 2 προηγούμενες προσπάθειες
2/3 αν έχει χάσει στην μία από τις 2 προηγούμενες προσπάθειες
3/4 αν δεν έχει χάσει στις 2 προηγούμενες προσπάθειες.
Να ορισθεί κατάλληλη Μαρκοβιανή αλυσίδα και να υπολογισθούν οι οριακές πιθανότητες.

23. Έστω μία Μαρκοβιανή αλυσίδα με χώρο καταστάσεων $\Omega = \{0, 1, \ldots,\}$ και πιθανότητες μεταπήδησης πρώτης τάξης

$$p_{i\,i+1} = \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{i+2}),\ i \geq 0,\ p_{i\,i-1} = \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{i+2}),\ i \geq 1$$

και $p_{00} = 1 - p_{01} = \frac{3}{4}$. Να προσδιορισθεί η στάσιμη κατανομή.

24. Έστω μία Μαρκοβιανή αλυσίδα με χώρο καταστάσεων $\Omega = \{1, 2, \ldots,\}$ και πιθανότητες μεταπήδησης πρώτης τάξης

$$p_{i\,i+1} = \frac{i}{2i+2},\ i \geq 1,\ p_{i\,i-1} = \frac{i+2}{2i+2},\ i \geq 2 \text{ και } p_{11} = 1 - p_{12} = \frac{3}{4}.$$

Να προσδιορισθεί η στάσιμη κατανομή αν υπάρχει.

24. Μια έρευνα που αφορά στους τηλεθεατές μιας χώρας δίνει τα εξής αποτελέσματα: X_ν, $\nu = 1, 2, \ldots$ είναι η κατάσταση ενός πολίτη τη χρονική στιγμή ν και οι καταστάσεις είναι 0=ποτέ δεν βλέπει τηλεόραση , 1=βλέπει μόνο κρατικά κανάλια, 2=βλέπει αρκετά συχνά τηλεόραση, 3=εθισμένος στο να βλέπει τηλεόραση, 4= προσπαθεί να τροποποιήσει τη στάση του απέναντι στην τηλεόραση και 5=είναι κολλημένος με την τηλεόραση. Ο πίνακας πιθανοτήτων μεταπήδησης πρώτης τάξης είναι ο ακόλουθος

$$\boldsymbol{P} = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1/10 & 0 & 1/2 & 3/10 & 0 & 1/10 \\ 0 & 0 & 0 & 7/10 & 1/10 & 2/10 \\ 1/3 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \end{array}.$$

Να γίνει κατάταξη των καταστάσεων της αλυσίδας. Ποια είναι η πιθανότητα ένας τηλεθεατής ξεκινώντας από το να βλέπει κρατικά κανάλια τηλεόρασης να καταλήξει κολλημένος με την τηλεόραση;

11. Βιβλιογραφία

Bailey, N., *The Elements of Stochastic Processes with Application to the Natural Sciences*, J. Wiley, N.Y. 1964.

Bartlett, M. S., *An Introduction to Stochastic Processes*, 3rd ed., Cam-bridge University Press, Cambridge, England, 1978.

Bhat, N., *Elements of Applied Stochastic Processes*, Wiley, N.Y. 1984.

Chiang, C. L., *An Introduction to Stochastic Processes and Their Applications*, Krieger, 1980.

Cinlar, E., *Introduction to Stochastic Processes*, Prentice-Hall 1975.

Cox, D. R. And Miller H. D.,*The Theory of Stochastic Processes* Chapman and Hall, London, 1965.

Durret, R., *Essentials of Stochastic Processes*, Springer, 1999.

Doob, J., *Stochastic Processes* J. Wiley, N.Y., 1953

Feller, W., *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, Vol.1, J. Wiley, N.Y., 1968.

Feller, W., *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, Vol.2, 2nd ed., J. Wiley, N.Y., 1971.

Hoel, G. P., Port, C. S., Stone, C. J., *Introduction to Stochastic Processes*, Houghton Mifflin Company, Boston, 1972.

Kemeny, J. G., Snell, J.L., *Finite Markov Chains*, Van Nostrand, Princeton, New Jersey, 1960.

Κάκουλλος, Θ., *Στοχαστικές Ανελίξεις* 1978.

Karlin, S., Taylor, H.D., *A first course in Stochastic Processes*, Aca-demic Press, 2nd edition, 1975.

Parzen, E., Stochastic Processes, Holden-Day, 1962.

Resnick, S., *Adventures in Stochastic Processes*, Birkhauser, Boston, MA. 1992.

Ross, S., *Stochastic Processes*, 2nd ed., Wiley, 1996.