

ΓΕΝΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι- ΤΕΤΥ

Φυλλάδιο Ασκήσεων 1- (1/10/09)

(1) Να βρεθούν τα όρια:

$$(i) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

$$(ii) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x^5 + x^3}$$

$$(iii) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^5 + x^3}$$

$$(iv) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x}$$

$$(v) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^2)}{x}$$

(2) Να βρεθεί η παράγωγος των συναρτήσεων:

$$(i) f(x) = t^{10} + 4t + t^{-3}$$

$$(ii) f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 1}$$

$$(iii) f(x) = \sqrt[3]{x^2} + \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$(iv) f(x) = e^x \cos x + \frac{1}{\tan x}$$

$$(v) f(x) = \frac{\ln x}{\sin x}$$

(3) Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης στο γράφημα της συνάρτησης $f(x) = x + \frac{1}{x}$ στο σημείο $(1, 2)$.

(4) Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης $y = x^3 - 3x^2 + 3x + 3$ στο σημείο $(0, 3)$.

Σε ποιά σημεία η εφαπτομένη είναι οριζόντια (δηλαδή παράλληλη στον x -άξονα)?

Σε ποιά σημεία η καμπύλη έχει εφαπτομένη με κλίση -6 ?

(5) Υπάρχει εφαπτομένη της καμπύλης $y = \sqrt{x}$ που να τέμνει τον άξονα x στο σημείο $(-1, 0)$?

(6) Να βρεθούν όλα τα σημεία της καμπύλης $y = \tan x$ στα οποία η εφαπτομένη είναι παράλληλη της ευθείας $y = -x$.

(7) Ο όγκος V ενός σφαιρικού μπαλονιού ακτίνας r είναι $V = (4/3)\pi r^3$.

Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής του όγκου ως προς την ακτίνα, όταν $r = 1$.

(8) Θεωρούμε την συνάρτηση με τύπο

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(\frac{1}{x}) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

(i) Είναι η συνάρτηση f συνεχής στο 0?

(ii) Είναι η συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο 0?

(9) (i) Είναι η συνάρτηση $|\sin x|$ παραγωγίσιμη στο 0?

(ii) Είναι η συνάρτηση $|\sin(x^3)|$ παραγωγίσιμη στο 0?

(10) Χρησιμοποιώντας την γεωμετρική ερμηνεία της παραγώγου προσπαθείστε να αποδείξετε (όχι αυστηρά) το εξής:

Αν η συνάρτηση f είναι παντού παραγωγίσιμη και $f(0) = f(1)$ τότε υπάρχει x_0 στο $[0, 1]$ τέτοιο ώστε $f'(x_0) = 0$.