

ΓΕΝΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι- ΤΕΤΥ

Φυλλάδιο Ασκήσεων 2- (9/10/09)

(1) Κατά την χρονική στιγμή t η θέση ενός σώματος που κινείται επί του άξονα s δίδεται από τη σχέση $s = t^3 - 6t^2 + 9t$ m:

(i) Να βρεθεί η επιτάχυνση του σώματος κάθε φορά που η ταχύτητα μηδενίζεται.

(ii) Να βρεθεί η ταχύτητα του σώματος κάθε φορά που η επιτάχυνση μηδενίζεται.

(2) Αν αφήσουμε μία πέτρα να πέσει στον πλανήτη Άρη τότε αυτή κινείται με σταθερή επιτάχυνση $11,44 \text{ m/sec}^2$. Σε πόση ώρα η πετρά θα αποκτήσει ταχύτητα $22,88 \text{ m/sec}^2$?

(3) Ένας βράχος εκσφενδονίζεται κατακόρυφα από τη σεληνιακή επιφάνεια με αρχική ταχύτητα 24 m/sec και μετά από t sec έχει ανέλθει σε ύψος $s(t) = 24t - 0,8t^2$ m.

(i) Να βρεθεί η ταχύτητα και η επιτάχυνση του βράχου τη χρονική στιγμή t .

(ii) Ποιό είναι το μέγιστο ύψος που θα φθάσει ο βράχος, και πότε φθάνει ο βράχος στο ήμισυ του μέγιστου ύψους?

(4) Να υπολογιστούν οι παράγωγοι των εξής συναρτήσεων:

(i) $f(x) = (x^2 + 1)^{10}$

(ii) $f(x) = \ln(e^x + 1)$

(iii) $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$

(iv) $f(x) = \cos(\ln(x^2 + 1))$

(5) Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης $(x(t), y(t))$ στο σημείο που ορίζει το εκάστοτε t :

(i) $x(t) = 2t^3 + 3, y = t^4, t = -1$.

(ii) $x(t) = \cos t, y(t) = 1 + \sin t, t = \pi/2$.

(6) Η ταχύτητα ενός μετεωρίτη που εισέρχεται στη γήινη ατμόσφαιρα είναι αντιστρόφως ανάλογη του \sqrt{s} όταν αυτός απέχει s km από το κέντρο της Γης. Δείξτε ότι η επιτάχυνση του μετεωρίτη είναι αντιστρόφως ανάλογη του s^2 .

(7) Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης στο εκάστοτε σημείο:

(i) $x^2 + xy - y^2 = 1, (2, 3)$.

(ii) $x \sin(2y) = y \cos(2x), (\pi/4, \pi/2)$.

(8) Να βρεθούν τα δύο σημεία τομής της καμπύλης $x^2 + xy + y^2 = 7$ με τον άξονα x και να δείξεται ότι οι εφαπτομένες της καμπύλης στα σημεία αυτά είναι παράλληλες.

(9) Ας υποθέσουμε ότι τα μήκη των ακμών x, y, z ενός κλειστού ορθογώνιου κιβωτίου μεταβάλλονται ως ακολούθως:

$$\frac{dx}{dt} = 1 \text{ m/sec}, \quad \frac{dy}{dt} = -1 \text{ m/sec}, \quad \frac{dz}{dt} = 1 \text{ m/sec}.$$

Να βρεθούν οι ρυθμοί μεταβολής του όγκου, του εμβαδού της επιφάνειας, και του μήκους της διαγωνίου $s = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, τη στιγμή που $x = 4, y = 3$, και $z = 2$.

(10) Αερόστατο ανυψώνεται κατακόρυφα πάνω από επίπεδο και ίσιο δρόμο, με σταθερό ρυθμό ανύψωσης 1 m/sec . Τη στιγμή που το αερόστατο βρίσκεται σε ύψος 65 m ένα ποδήλατο που κινείται με 17 m/sec περνά ακριβώς κάτω από το αερόστατο. Πόσο γρήγορα θα αυξάνεται η απόσταση $s(t)$ μεταξύ ποδηλάτου και αερόστατου μετά από 3 sec ?