

ΓΕΝΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι- ΤΕΤΥ

Φυλλάδιο Ασκήσεων 3- (16/10/09)

(1) Να βρεθεί η μέγιστη και ελάχιστη τιμή των συναρτήσεων στα δεδομένα διαστήματα

(i) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 2$, $2 \leq x \leq 3$

(ii) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 2$, $0 \leq x \leq 2$

(iii) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$, $-1 \leq x \leq 1$

(2) Σε ποιά διαστήματα του πεδίου ορισμού της είναι η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ αύξουσα και σε ποιά φθίνουσα;

(3) Η συνάρτηση $V(x) = x(10-2x)(16-2x)$ για $0 \leq x \leq 5$ αναπαρηστά τον όγκο κάποιου κιβωτίου. Να βρεθεί η τιμή του x που μεγιστοποιεί τον όγκο.

(4) Η συνάρτηση $P(x) = 2x + (200/x)$ αναπαρηστά την περίμετρο ορθογωνίου παραλληλογράμου το οποίο έχει εμβαδό $200m^2$ και η μία του πλευρά έχει μήκος x . Να βρεθεί η τιμή του x η οποία ελαχιστοποιεί την περίμετρο $P(x)$.

(5) Έστω ότι η συνάρτηση $f(x)$ ικανοποιεί $f'(x) = (x-1)^2(x+2)$.

(i) Σε ποιά διαστήματα είναι η συνάρτηση αυξούσα και σε ποιά φθίνουσα;

(ii) Είναι το $x = 1$ σημείο τοπικού μεγίστου; Είναι το $x = -2$ σημείο τοπικού ελαχίστου;

(iii) Σε ποιά διαστήματα στρέφει η συνάρτηση τα κοίλα προς τα άνω και σε ποιά προς τα κάτω;

(6) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση των συναρτήσεων:

(i) $f(x) = -x^4 + 4x^3 - 4x + 1$

(ii) $f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$

(iii) $f(x) = x^{1/4}(x+3)$ για $x \geq 0$.

(7) Σωματίδιο κινείται ευθύγραμμα με επιτάχυνση $a(t) = 15\sqrt{t} - (3/\sqrt{t})$. Εάν η ταχύτητα του την χρονική στιγμή $t = 1$ είναι $4m/sec$, να βρεθούν:

(i) Η ταχύτητα συναρτήση του χρόνου.

(ii) Η απόσταση από το σημείο εκκίνησης συναρτήση του χρόνου.

(8) Ένας πύραυλος εκτοξεύεται από την επιφάνεια της Γης με σταθερή επιτάχυνση $20m/sec^2$. Ποιά θα είναι η ταχύτητα του μετά από 1 λεπτό;

(9) (i) Για δεδομένο $n \in \mathbb{N}$ να σχεδιαστεί το γράφημα της συνάρτησης $f_n(x) = e^{-x}x^n$.

(ii) Εάν M_n είναι το μέγιστο της συνάρτησης f_n στο διάστημα $[0, +\infty)$ να υπολογιστεί το όριο $\lim_{n \rightarrow \infty} M_n$.

(10) (i) Εάν η συνάρτηση $f(x)$ ικανοποιεί $|f'(x)| \leq M$ για κάθε x σε κάποιο διάστημα I δείξτε ότι $|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$ για κάθε $x, y \in I$.

(ii) Υπάρχει μη σταθερή συνάρτηση f που να ικανοποιεί $|f(x) - f(y)| \leq |x - y|^2$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$;