

Εξέταση Μαθηματικών II

ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΕΞΕΤΑΣΗΣ: Τρεις ώρες

Καλή επιτυχία!

ΘΕΜΑΤΑ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

1. Να λυθεί η παρακάτω διαφορική εξίσωση:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \sqrt{\frac{y}{x}}$$

με αρχική συνθήκη $y(1) = 1$.

2. Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$y'' - y' - 2y = e^x + x + 1.$$

3. Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$y'' + 2y' + y = \frac{e^{-x}}{x}.$$

ΘΕΜΑΤΑ ΠΙΝΑΚΩΝ

4. Να λυθεί το σύστημα

$$\begin{aligned}x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 &= 4 \\2x_1 + 5x_2 - 5x_3 - 3x_4 &= 1 \\-3x_1 - 4x_2 + 5x_3 + x_4 &= 3.\end{aligned}$$

5. Να βρεθεί η ορίζουσα του πίνακα

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 8 & 2 \\ 1 & 1 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 14 & 5 \\ -1 & -1 & 3 & 8 \end{pmatrix}$$

6. Να βρεθεί ο αντίστροφος του πίνακα (αν υπάρχει!):

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 3 \\ -1 & 3 & -3 & -3 \\ 1 & 0 & 4 & 4 \\ 2 & -1 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

7. Να βρεθούν όλες οι τιμές του t για τις οποίες τα παρακάτω διανύσματα του $\mathbb{R}_{3 \times 1}$ είναι γραμμικά εξαρτημένα:

$$\begin{pmatrix} t \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ t \end{pmatrix}.$$

8. Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν σε κάθε ιδιοτιμή του πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -6 & 7 & -4 \\ -6 & 6 & -4 \end{pmatrix}$$

Έπειτα να υπολογιστεί ο A^7 .

9. Να λυθεί το παρακάτω σύστημα διαφορικών εξισώσεων:

$$\begin{aligned} y_1' &= -y_1 - y_2 \\ y_2' &= 6y_1 + 4y_2. \end{aligned}$$

10. Έστω A διαγωνιοποιήσιμος 2×2 πίνακας, τέτοιος ώστε $A^2 = I$ και $A \neq \pm I$, όπου $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, ο 2×2 μοναδιαίος πίνακας. Να βρεθούν οι ιδιοτιμές του A .

Κάθε θέμα αξίζει δέκα πόντους. Να αιτιολογήσετε πλήρως τις απαντήσεις σας.