Λύσεις Θεμάτων Θεμελίων των Μαθηματικών

1. *Έστω A, B, C τυχόντα σύνολα. Να δειχθεί ότι*

$$A \triangle (B \cup C) \subseteq (A \triangle B) \cup (A \triangle C).$$

Απόδειξη. Έστω x τυχαίο στοιχείο του $A \triangle (B \cup C)$. Εξ ορισμού, το x ανήκει σε ακριβώς ένα από τα A, $B \cup C$. Οπότε, αν $x \in A$ τότε $x \notin B \cup C$, συγκεκριμένα $x \notin B$ και $x \notin C$, άρα $x \in A \triangle B$, οπότε $x \in (A \triangle B) \cup (A \triangle C)$. Αν $x \in B \cup C$, τότε $x \notin A$. Έστω $x \in B$· τότε θα έχουμε $x \in A \triangle B$, ενώ αν $x \in C$, θα ισχύει $x \in A \triangle C$. Σε κάθε περίπτωση θα ισχύει $x \in (A \triangle B) \cup (A \triangle C)$, ολοκληρώνοντας την απόδειξη. □

2. *Έστω A σύνολο και $\{X_i\}_{i \in I}$ οικογένεια συνόλων. Να δειχθεί ότι*

$$A \cap \left(\bigcup_{i \in I} X_i \right) = \bigcup_{i \in I} (A \cap X_i).$$

Απόδειξη. Έστω x τυχαίο στοιχείο του $A \cap \left(\bigcup_{i \in I} X_i \right)$, οπότε $x \in A$ και $x \in \bigcup_{i \in I} X_i$, άρα υπάρχει $j \in I$ τέτοιο ώστε $x \in X_j$. Αφού $x \in A$, θα έχουμε $x \in A \cap X_j$, οπότε και $x \in \bigcup_{i \in I} (A \cap X_i)$, αφού το $A \cap X_j$ είναι ένα από τα σύνολα αυτής της ένωσης. Εφόσον το x είναι τυχαίο, αποδείχθηκε ότι

$$A \cap \left(\bigcup_{i \in I} X_i \right) \subseteq \bigcup_{i \in I} (A \cap X_i).$$

Για τον αντίστροφο εγκλεισμό, θεωρούμε ένα τυχαίο στοιχείο του $\bigcup_{i \in I} (A \cap X_i)$, έστω x. Εξ ορισμού, υπάρχει $j \in I$, τέτοιο ώστε $x \in A \cap X_j$, άρα $x \in A$ και $x \in X_j$, οπότε και $x \in \bigcup_{i \in I} X_i$, αφού το X_j είναι προφανώς υποσύνολο αυτής της ένωσης. Επομένως, $x \in A \cap \left(\bigcup_{i \in I} X_i \right)$, άρα

$$A \cap \left(\bigcup_{i \in I} X_i \right) \supseteq \bigcup_{i \in I} (A \cap X_i),$$

αποδεικνύοντας το ζητούμενο. □

3. *Θεωρούμε την σχέση $\boldsymbol{\sigma}$ στο $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ (δηλαδή $\boldsymbol{\sigma} \subseteq (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \times (\mathbb{N} \times \mathbb{N})$) που ορίζεται ως εξής:*

$$(m, n) \boldsymbol{\sigma} (r, s) \quad \text{αν και μόνο αν} \quad m + s \leqslant r + n.$$

Να δειχθεί ότι η $\boldsymbol{\sigma}$ είναι μεταβατική. Είναι η $\boldsymbol{\sigma}$ σχέση ασθενούς διάταξης;

Απόδειξη. Έστω (m, n), (r, s), $(p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ τέτοια ώστε $(m, n)\boldsymbol{\sigma}(r, s)$ και $(r, s)\boldsymbol{\sigma}(p, q)$, άρα από τον ορισμό της $\boldsymbol{\sigma}$ ισχύει $m + s \leqslant r + n$ και $r + q \leqslant p + s$. Οπότε

$$m + s + q \leqslant r + n + q \leqslant p + s + n,$$

δηλαδή $m + q \leqslant p + n$, άρα $(m, n)\boldsymbol{\sigma}(p, q)$. Αυτό δείχνει πως η $\boldsymbol{\sigma}$ είναι μεταβατική.

Η $\boldsymbol{\sigma}$ δεν είναι όμως σχέση ασθενούς διάταξης, καθώς δεν ισχύει η αντισυμμετρική ιδιότητα. Αν θεωρήσουμε τα ζεύγη $(2, 1)$ και $(3, 2)$, παρατηρούμε πως ισχύουν ταυτόχρονα $(2, 1)\boldsymbol{\sigma}(3, 2)$ και $(3, 2)\boldsymbol{\sigma}(2, 1)$ (αφού $2 + 2 = 3 + 1$), αλλά προφανώς $(2, 1) \neq (3, 2)$. □

4. *Θεωρούμε την συνάρτηση $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ με τύπο $f(n) = n^2$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Να βρεθεί το*

$$f^{-1}(\{1, 2, 3, \ldots, 100\}).$$

Απόδειξη. Η αντίστροφη εικόνα μέσω της f του συνόλου $\{1, 2, 3, \ldots, 100\}$ είναι ακριβώς το σύνολο των φυσικών n για τους οποίους ισχύει $f(n) = n^2 \in \{1, 2, 3, \ldots, 100\}$, δηλαδή $1 \leqslant n^2 \leqslant 100$, άρα $1 \leqslant n \leqslant 10$. Άρα

$$f^{-1}(\{1, 2, 3, \ldots, 100\}) = \{1, 2, \ldots, 10\}.$$

□

5. *Έστω P, Q, R προτάσεις. Να δειχθεί ότι*

$$(P \veebar Q) \vee (P \veebar R) \equiv (Q \veebar R) \vee (Q \veebar P).$$

Απόδειξη. Θέτουμε με F, G τις σύνθετες προτάσεις στο αριστερό και δεξί μέλος αντίστοιχα της παραπάνω ισοδυναμίας. Κατασκευάζουμε τον πίνακα αλήθειας των F, G:

P	Q	R	$P \veebar Q$	$P \veebar R$	$Q \veebar R$	F	G
Α	Α	Α	Ψ	Ψ	Ψ	Ψ	Ψ
Α	Α	Ψ	Ψ	Α	Α	Α	Α
Α	Ψ	Α	Α	Ψ	Α	Α	Α
Α	Ψ	Ψ	Α	Α	Ψ	Α	Α
Ψ	Α	Α	Α	Α	Ψ	Α	Α
Ψ	Α	Ψ	Α	Ψ	Α	Α	Α
Ψ	Ψ	Α	Ψ	Α	Α	Α	Α
Ψ	Ψ	Ψ	Ψ	Ψ	Ψ	Ψ	Ψ

Παρατηρούμε πως οι F, G έχουν τις ίδιες τιμές αλήθειας για κάθε τιμή των προτασιακών μεταβλητών P, Q, R. Άρα αυτές είναι ισοδύναμες. □

6. *Να δειχθεί ότι για κάθε ακέραιο k, οι αριθμοί $2k + 1$ και $9k + 4$ έχουν μέγιστο κοινό διαιρέτη την μονάδα.*

Απόδειξη. Γνωρίζουμε γενικά πως για ακεραίους a, b, q ισχύει $(a, b) = (a - qb, b)$. Άρα έχουμε

$$\begin{aligned}(9k+4, 2k+1) &= (9k+4-4(2k+1), 2k+1)\\ &= (9k+4-(8k+4), 2k+1)\\ &= (k, 2k+1)\\ &= (k, 2k+1-2k) = (k, 1) = 1.\end{aligned}$$

□

7. *Να δειχθεί ότι για κάθε φυσικό $n \geqslant 1$ ισχύει*

$$18 \mid 2^n 5^n + 8.$$

Απόδειξη. Θα δειχθεί επαγωγικά. Θέτουμε $A_n = 2^n 5^n + 8$. Για $n = 1$ έχουμε $A_1 = 18$, οπότε το ζητούμενο ισχύει. Έστω πως το ζητούμενο ισχύει για $n = k$, δηλαδή $18 \mid A_k$. Θέλουμε να δείξουμε πως ισχύει και για $n = k+1$. Αρκεί να δείξουμε πως $18 \mid A_{k+1} - A_k$ (αν ισχύει $18 \mid A_k$ και $18 \mid A_{k+1} - A_k$, τότε και $18 \mid (A_{k+1} - A_k) + A_k = A_{k+1}$). Έχουμε

$$\begin{aligned}A_{k+1} - A_k &= 2^{k+1}5^{k+1} + 8 - 2^k 5^k - 8\\ &= 2^k 5^k (2 \cdot 5 - 1)\\ &= 18 \cdot 2^{k-1} 5^k.\end{aligned}$$

Αφού $k \geqslant 1$, ο αριθμός $2^{k-1}5^k$ είναι ακέραιος, άρα $18 \mid A_{k+1} - A_k$. □

8. *Τραβώντας 5 φύλλα από μια τυπική τράπουλα 52 φύλλων, πόσες περιπτώσεις υπάρχουν να προκύψει full house στο οποίο εμφανίζονται μόνο οι φιγούρες A, K, Q, J; (**Σημείωση:** σε ένα full house εμφανίζονται 3 φύλλα από μια φιγούρα και 2 από μια άλλη, π. χ. K♠, K♣, K♦, Q♣, Q♦.)*

Απόδειξη. Ένα τέτοιο full house προκύπτει ως αποτέλεσμα του ακόλουθου πειράματος, που πραγματοποιείται σε τέσσερα βήματα (για την ακρίβεια, όλα τα αποτελέσματα είναι ακριβώς τα ζητούμενα full house):

1ο Βήμα: επιλέγουμε την φιγούρα που θα εχει 3 φύλλα. Επειδή θέλουμε αυτή να είναι μια από τις A, K, Q, J, , έχουμε 4 επιλογές.

2ο Βήμα: επιλέγουμε την φιγούρα που θα έχει 2 φύλλα. Επειδή έχουμε διαλέξει ήδη μια στο προηγούμενο βήμα, μας μένουν 3 επιλογές.

3ο Βήμα: επιλέγουμε 3 φύλλα για την πρώτη φιγούρα· κάθε φιγούρα έχει 4 φύλλα, και εφόσον τα τρία φύλλα είναι διαφορετικά και δεν μας ενδιαφέρει η σειρά τους, έχουμε $\binom{4}{3} = 4$ επιλογές.

4ο Βήμα: επιλέγουμε 2 φύλλα για την δεύτερη φιγούρα. Εδώ έχουμε $\binom{4}{2} = 6$ επιλογές.

Από την πολλαπλασιαστική αρχή, το πλήθος όλων αυτών των full house είναι

$$4 \cdot 3 \binom{4}{3} \binom{4}{2} = 288.$$

□

9. *Με πόσους τρόπους μπορούν να τοποθετηθούν 8 άνδρες και 2 γυναίκες στην σειρά, ούτως ώστε οι γυναίκες να μην βρίσκονται σε διαδοχικές θέσεις, ούτε στην αρχή ή στο τέλος της σειράς;*

Απόδειξη. Αυτές οι τοποθετήσεις είναι ακριβώς όλα τα δυνατά αποτελέσματα του εξής πειράματος:

1ο Βήμα: Καθορίζουμε τις θέσεις των γυναικών (*δεν μας ενδιαφέρει η σειρά σ'αυτό το σημείο*). Αυτές δεν είναι στην αρχή ή στο τέλος, οπότε από όλες τις δυνατές τοποθετήσεις στις 8 ενδιάμεσες θέσεις ($\binom{8}{2} = 28$ το πλήθος) εξαιρούμε αυτές στις οποίες οι δύο γυναίκες κάθονται δίπλα (συνολικά 7). Άρα έχουμε $28 - 7 = 21$ επιλογές.

2ο Βήμα: Διατάσσουμε τους 8 άνδρες στις θέσεις τους· έχουμε 8! επιλογές.

3ο Βήμα: Διατάσσουμε τις δύο γυναίκες στις θέσεις τους· έχουμε 2! επιλογές.

Από την πολλαπλασιαστική αρχή έχουμε συνολικά

$$21 \cdot 8! \cdot 2! \text{ επιλογές.}$$ □

Σημείωση: Στο πρώτο βήμα οι τοποθετήσεις αυτές είναι ίσες το πλήθος με τις κατανομές 8 ομοίων αντικειμένων σε 3 διακριτά κουτιά, με τουλάχιστον 1 αντικείμενο σε κάθε κουτί. Το πλήθος τους είναι ίσο με

$$\binom{8-1}{3-1} = \binom{7}{2} = 21.$$

10. *Να δειχθεί ότι το σύνολο των συναρτήσεων $f : \mathbb{N} \to \{0, 1\}$ για τις οποίες υπάρχει $m \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε $f(n) = 0$ για κάθε $n \geqslant m$, είναι αριθμήσιμο.*

Απόδειξη. Έστω A_m, $m \in \mathbb{N}$ το σύνολο των συναρτήσεων $f : \mathbb{N} \to \{0, 1\}$ για τις οποίες ισχύει $f(n) = 0$ για κάθε $n \geqslant m$. Το ζητούμενο σύνολο είναι ακριβώς η παρακάτω ένωση:

$$\bigcup_{m=1}^{\infty} A_m.$$

Αρκεί να δείξουμε πως κάθε A_m είναι αριθμήσιμο. Για την ακρίβεια είναι πεπερασμένο· για να κατασκευαστεί μια τυχούσα $f \in A_m$, αρκεί να επιλέξουμε τις τιμές της f στους $1, 2, \ldots, m-1$, εφόσον όλες οι υπόλοιπες τιμές είναι εξ ορισμού 0. Επειδή όμως το πεδίο τιμών της f είναι το $\{0, 1\}$, έχουμε δύο επιλογές για κάθε φυσικό ως τον $m - 1$, οπότε από την πολλπλασιαστική αρχή υπάρχουν 2^{m-1} τέτοιες συναρτήσεις, ή $|A_m| = 2^{m-1}$. Αφού το ζητούμενο σύνολο γράφεται ως αριθμήσιμη ένωση πεπερασμένων συνόλων, θα είναι και αυτό αριθμήσιμο. □

11. *Γνωρίζουμε πως 500 φοιτητές δήλωσαν τα Θεμέλια των Μαθηματικών ή τα Γενικά Μαθηματικά. Επίσης γνωρίζουμε ότι 352 φοιτητές δήλωσαν τα Θεμέλια των Μαθηματικών και 287 δήλωσαν τα Γενικά Μαθηματικά. Πόσοι δήλωσαν και τα δύο μαθήματα;*

Απόδειξη. Έστω A το σύνολο των φοιτητών που δήλωσαν τα Θεμέλια των Μαθηματικών και B το σύνολο των φοιτητών που δήλωσαν τα Γενικά Μαθηματικά. Τα δεδομένα μας δίνουν

$$\begin{aligned} |A| &= 352 \\ |B| &= 287 \\ |A \cup B| &= 500. \end{aligned}$$

Μας ζητείται το $|A \cap B|$. Από την Αρχή Εγκλεισμού-Αποκλεισμού ισχύει

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

ή ισοδύναμα

$$\begin{aligned} |A \cap B| &= |A| + |B| - |A \cup B| \\ &= 352 + 287 - 500 = 139. \end{aligned}$$

□