Λύσεις Ασκήσεων στα Θεμέλια των Μαθηματικών I

Ρωμανός-Διογένης Μαλικιώσης

Τετάρτη, 6 Οκτωβρίου 2010

Άσκηση 1. *Για τυχόντα σύνολα A, B, C, D, να δειχθεί ότι*

(α′) $A \cup (B \setminus C) = ((A \cup B) \setminus C) \cup (A \cap C)$.

(β′) $(A \setminus B) \cap (C \setminus B) = (A \cap C) \setminus B$.

(γ′) $A \setminus B = B \setminus A$ *αν και μόνο αν* $A = B$.

(δ′) $A \subseteq B$ *αν και μόνο αν* $B = A \cup (B \setminus A)$.

Λύση. **(α′)** Θα δείξουμε πρώτα πως $A \cup (B \setminus C) \subseteq ((A \cup B) \setminus C) \cup (A \cap C)$. Έστω x ένα τυχαίο στοιχείο του $A \cup (B \setminus C)$. Άρα $x \in A$ ή $x \in B \setminus C$. Ξεχωρίζουμε τις δύο αυτές περιπτώσεις· υποθέτουμε πρώτα πως $x \in A$. Αφού $A \subseteq A \cup B$, τότε $x \in A \cup B$. Αν $x \notin C$, τότε $x \in (A \cup B) \setminus C$, αλλιώς αν $x \in C$, τότε $x \in A \cap C$, εφόσον υποθέσαμε αρχικά πως $x \in A$. Σε κάθε περίπτωση, $x \in ((A \cup B) \setminus C) \cup (A \cap C)$, οπότε αποδείχθηκε πως $A \cup (B \setminus C) \subseteq ((A \cup B) \setminus C) \cup (A \cap C)$.

Μας μένει να δείξουμε πως $A \cup (B \setminus C) \supseteq ((A \cup B) \setminus C) \cup (A \cap C)$. Θεωρούμε ένα τυχαίο στοιχείο x του $((A \cup B) \setminus C) \cup (A \cap C)$. Άρα $x \in (A \cup B) \setminus C$ ή $x \in A \cap C$. Έστω $x \in (A \cup B) \setminus C$. Επομένως, $x \in A \cup B$ και $x \notin C$. Άρα $x \in A$ ή $x \in B$. Ξεχωρίζουμε τις δύο αυτές περιπτώσεις· θεωρούμε πρώτα πως $x \in A$. Τότε αφού $A \subseteq A \cup (B \setminus C)$, θα ισχύει προφανώς $x \in A \cup (B \setminus C)$. Τώρα υποθέτουμε πως $x \in B$. Αφού ισχύει $x \notin C$, τότε $x \in B \setminus C$, και τελικά $x \in A \cup (B \setminus C)$, αφού $B \setminus C \subseteq A \cup (B \setminus C)$. Σε κάθε περίπτωση λοιπόν θα ισχύει $x \in A \cup (B \setminus C)$, οπότε αποδείξαμε πως $A \cup (B \setminus C) \supseteq ((A \cup B) \setminus C) \cup (A \cap C)$, οπότε θα ισχύει το ζητούμενο, δηλαδή $A \cup (B \setminus C) = ((A \cup B) \setminus C) \cup (A \cap C)$.

(β′) Θα δείξουμε πρώτα πως $(A \setminus B) \cap (C \setminus B) \subseteq (A \cap C) \setminus B$. Έστω x ένα τυχαίο στοιχείο του $(A \setminus B) \cap (C \setminus B)$. Άρα θα ισχύει $x \in A \setminus B$ και $x \in C \setminus B$. Έχουμε $x \in A \setminus B \Rightarrow x \in A$ και $x \notin B$, όπως και $x \in C \setminus B \Rightarrow x \in C$ και $x \notin B$. Αφού $x \in A$ και $x \in C$, τότε $x \in A \cap C$. Αφού επιπλέον ισχύει $x \notin B$, τότε θα έχουμε $x \in (A \cap C) \setminus B$, αποδεικνύοντας το ζητούμενο.

Τώρα θα δείξουμε πως $(A \setminus B) \cap (C \setminus B) \supseteq (A \cap C) \setminus B$. Έστω x ένα τυχαίο στοιχείο του $(A \cap C) \setminus B$. Άρα $x \in A \cap C$ και $x \notin B$, δηλαδή ισχύουν ταυτόχρονα $x \in A$, $x \in C$ και $x \notin B$. Έχουμε $x \in A$ και $x \notin B \Rightarrow x \in A \setminus B$, και παρομοίως, $x \in C$ και $x \notin B \Rightarrow x \in C \setminus B$. Αφού $x \in A \setminus B$ και $x \in C \setminus B$, τότε $x \in (A \setminus B) \cap (C \setminus B)$, οπότε $(A \setminus B) \cap (C \setminus B) \supseteq (A \cap C) \setminus B$, ολοκληρώνοντας την απόδειξη.

(γ΄) Έστω πρώτα πως $A \setminus B = B \setminus A$. Θα δείξουμε πως $A \subseteq B$. Ας υποθέσουμε πως κάτι τέτοιο δεν ισχύει, δηλαδή $A \nsubseteq B$, οπότε θα υπάρχει $x \in A$, τέτοιο ώστε $x \notin B$. Εξ ορισμού, θα ισχύει $x \in A \setminus B$. Αφού $A \setminus B = b \setminus A$, τότε $x \in B \setminus A$, άρα και $x \in B$, αφού $B \setminus A \subseteq B$. Αυτό είναι άτοπο όμως, αφού πιο πριν δείξαμε πως $x \notin B$. Άρα $A \subseteq B$. Ο εγκλεισμός $B \subseteq A$ αποδεικνύεται με εντελώς παρόμοιο τρόπο, λόγω της συμμετρίας που έχει η ζητούμενη πρόταση ως προς τα A, B. Άρα $A = B$.

Τώρα υποθέτουμε πως $A = B$. Τότε προφανώς $A \setminus B = A \setminus A = B \setminus A = \varnothing$, ολοκληρώνοντας την απόδειξη.

(δ΄) Έστω $A \subseteq B$. Θα δείξουμε πρώτα πως $B \subseteq A \cup (B \setminus A)$. Έστω x τυχαίο στοιχείο του B. Αν $x \in A$, τότε προφανώς θα ισχύει και $x \in A \cup (B \setminus A)$, καθώς $A \subseteq A \cup (B \setminus A)$. Αν $x \notin A$, τότε $x \in B \setminus A$, αφού $x \in B$, οπότε $x \in A \cup (B \setminus A)$, αφού $B \setminus A \subseteq A \cup (B \setminus A)$. Σε κάθε περίπτωση λοιπόν, θα ισχύει $x \in A \cup (B \setminus A)$, άρα $B \subseteq A \cup (B \setminus A)$. Μας μένει να δείξουμε πως $B \supseteq A \cup (B \setminus A)$. Έστω x τυχαίο στοιχείο του $A \cup (B \setminus A)$, άρα $x \in A$ ή $x \in B \setminus A$. Ξεχωρίζουμε αυτές τις δύο περιπτώσεις· αν $x \in A$, τότε και $x \in B$, αφού $A \subseteq B$. Αν $x \in B \setminus A$, τότε προφανώς $x \in B$, αφού $B \setminus A \subseteq B$. Σε κάθε περίπτωση ισχύει $x \in B$, οπότε $B \supseteq A \cup (B \setminus A)$, και τελικά $B = A \cup (B \setminus A)$.

Τώρα υποθέτουμε πως $B = A \cup (B \setminus A)$. Προφανώς, $A \subseteq A \cup (B \setminus A) = B$, άρα $A \subseteq B$, ολοκληρώνοντας την απόδειξη. □

Άσκηση 2. *Αν A, B είναι τυχόντα σύνολα, να δειχθεί ότι*

(α΄) $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cup B)$.

(β΄) $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cup B)$, *αν και μόνο αν* $A \subseteq B$ *ή* $B \subseteq A$.

(γ΄) $\mathcal{P}(A \setminus B) \subseteq (\mathcal{P}(A) \setminus \mathcal{P}(B)) \cup \{\varnothing\}$.

Λύση. **(α΄)** Έστω X τυχαίο στοιχείο του $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$. Άρα $X \in \mathcal{P}(A)$ ή $X \in \mathcal{P}(B)$. Αν $X \in \mathcal{P}(A)$, τότε $X \subseteq A \subseteq A \cup B$, οπότε και $X \in \mathcal{P}(A \cup B)$. Ομοίως αν $X \in \mathcal{P}(B)$, οπότε σε κάθε περίπτωση $X \in \mathcal{P}(A \cup B)$, ολοκληρώνοντας την απόδειξη.

(β΄) $\boxed{(\Rightarrow)}$ Έστω $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cup B)$. Αυτό συνεπάγεται πως

$$A \cup B \in \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B),$$

αφού εξ ορισμού $A \cup B \in \mathcal{P}(A \cup B)$. Άρα $A \cup B \in \mathcal{P}(A)$ ή $A \cup B \in \mathcal{P}(B)$. Αν $A \cup B \in \mathcal{P}(A)$, τότε $A \cup B \subseteq A$. Αφου ισχύει πάντα $A \subseteq A \cup B$, θα έχουμε

$A = A \cup B$, το οποίο είναι ισοδύναμο με την σχέση $B \subseteq A$ (δες Πρόταση 1.6 από τις σημειώσεις). Ομοίως, αν υποθέσουμε πως $A \cup B \in \mathcal{P}(B)$, τότε με τον ίδιο τρόπο καταλήγουμε στην σχέση $B \subseteq A$, αποδεικνύντας το ζητούμενο.

$\boxed{(\Leftarrow)}$ Έστω $A \subseteq B$ ή $B \subseteq A$. Χωρίς περιορισμό της γενικότητας, υποθέτουμε πως $A \subseteq B$ (η περίπτωση $B \subseteq A$ λύνεται με τον ακριβώς ίδιο τρόπο). Ήδη γνωρίζουμε από την **(α′)** πως $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cup B)$, άρα αρκεί να δειχθεί ότι $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \supseteq \mathcal{P}(A \cup B)$. Αφού όμως $A \subseteq B$, θα ισχύει $A \cup B = B$, οπότε

$$\mathcal{P}(A \cup B) = \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B),$$

ολοκληρώνοντας την απόδειξη.

(γ′) Έστω X τυχαίο στοιχείο του $\mathcal{P}(A \setminus B)$. Άρα $X \subseteq A \setminus B$. Θέλουμε να δείξουμε πως $X \in (\mathcal{P}(A) \setminus \mathcal{P}(B)) \cup \{\varnothing\}$. Ξεχωρίζουμε δύο περιπτώσεις:

$\boxed{X = \varnothing}$ Τότε $X \in \{\varnothing\} \subseteq (\mathcal{P}(A) \setminus \mathcal{P}(B)) \cup \{\varnothing\}$, αποδεικνύοντας το ζητούμενο.

$\boxed{X \neq \varnothing}$ Αφού $A \setminus B \subseteq A$, τότε θα ισχύει και $X \subseteq A$, άρα $X \in \mathcal{P}(A)$. Μας μένει να δείξουμε πως $X \notin \mathcal{P}(B)$, ή ισοδύναμα, $X \nsubseteq B$. Οπότε αρκεί να βρούμε τουλάχιστον ένα στοιχείο του X που να μην ανήκει στο B (στην συγκεκριμένη περίπτωση, όπως θα δούμε, *κάθε* στοιχείο του X ικανοποιεί αυτήν την ιδιότητα). Αφού $X \neq \varnothing$, υπάρχει $x \in X$. Εφόσον έχουμε $X \subseteq A \setminus B$, αυτό το x, θα ανήκει και στο $A \setminus B$, οπότε εξ ορισμού δεν θα ανήκει στο B. Αυτό ακριβώς μας δείχνει πως $X \nsubseteq B$, οπότε $X \notin \mathcal{P}(B)$, άρα τελικά

$$X \in \mathcal{P}(A) \setminus \mathcal{P}(B) \subseteq (\mathcal{P}(A) \setminus \mathcal{P}(B)) \cup \{\varnothing\},$$

ολοκληρώνοντας την απόδειξη. □

Άσκηση 3. *Σωστό ή Λάθος; Εξηγείστε σύντομα την απάντησή σας.*

(α′) $1 \in \{1, 2\}$.

(β′) $1 \subseteq \{1, 3, 5, 2\}$.

(γ′) $3 \in \{1, 5, 2\}$.

(δ′) $\{1, 2\} \subseteq \{1, 3, 5, 2\}$.

(ε′) $\{1\} \in \{1, 2, 3\}$.

(στ′) $\{1\} \subseteq \{1, 2, 3\}$.

(ζ′) $\{1, 2\} \subseteq \{1, \{2\}\}$.

(η′) $\{2\} \in \{1, \{2\}\}$.

(θ′) $\{2\} \subseteq \{1, \{2\}\}$.

(ι′) $\{\{2\}\} \subseteq \{1, \{2\}\}$.

(ια′) $\varnothing \subseteq \varnothing$.

(ιβ′) $\varnothing \in \varnothing$.

(ιγ′) $\varnothing \in \{\varnothing\}$.

(ιδ′) $\varnothing \subseteq \{\varnothing\}$.

Λύση. **(α′)** Σωστό. Τα στοιχεία του $\{1, 2\}$ είναι τα $1, 2$, και προφανώς το 1 είναι ένα από αυτά.

(β′) Λάθος. Το *a δεν* είναι σύνολο, οπότε η δοθείσα σχέση δεν έχει νόημα.

(γ′) Λάθος. Τα στοιχεία του $\{1, 5, 2\}$ είναι τα $1, 5, 2$, και το 3 δεν είναι κάποιο από αυτά.

(δ′) Σωστό. Τα στοιχεία του $\{1, 2\}$ είναι τα $1, 2$, ενώ αυτά του $\{1, 3, 5, 2\}$ είναι τα $1, 3, 5, 2$. Προφανώς, κάθε στοιχείο του πρώτου συνόλου, ανήκουν και στο δεύτερο.

(ε′) Λάθος. Τα στοιχεία του $\{1, 2, 3\}$ είναι τα $1, 2, 3$, και το $\{1\}$ δεν είναι ένα από αυτά (*Προσοχή:* $1 \neq \{1\}$).

(στ′) Σωστό. Το μοναδικό στοιχείο του $\{1\}$ είναι το 1, ενώ τα στοιχεία του $\{1, 2, 3\}$ είναι τα $1, 2, 3$. Προφανώς, κάθε στοιχείο του $\{1\}$ είναι και στοιχείο του $\{1, 2, 3\}$.

(ζ′) Λάθος. Το στοιχείο 2 του $\{1, 2\}$, δεν ανήκει στο $\{1, \{2\}\}$, του οποίου τα στοιχεία είναι τα $1, \{2\}$.

(η′) Σωστό. Τα στοιχεία του $\{1, \{2\}\}$ είναι τα $1, \{2\}$, και το $\{2\}$ είναι ένα από αυτά.

(ϑ′) Λάθος. Για τον ίδιο λόγο που είναι λάθος το **(ζ′)**.

(ι′) Σωστό. Το μοναδικό στοιχείο του $\{\{2\}\}$ είναι το $\{2\}$, το οποίο προφανώς είναι και στοιχείο του $\{1, \{2\}\}$, του οποίου τα στοιχεία είναι τα $1, \{2\}$.

(ια′) Σωστό. Το κενό είναι υποσύνολο παντός συνόλου (ή αλλιώς κάθε σύνολο είναι υποσύνολο του εαυτού του).

(ιβ′) Λάθος. Το κενό δεν έχει καθόλου στοιχεία.

(ιγ′) Σωστό. Το μοναδικό στοιχείο του $\{\varnothing\}$ είναι το $\varnothing$, οπότε προφανώς ισχύει $\varnothing \in \{\varnothing\}$.

(ιδ′) Σωστό. Όπως στο **(ια′)**. $\square$

Άσκηση 4. *Βρείτε τα δυναμοσύνολα των συνόλων X, A, όπου $X = \{\alpha, \gamma, \omega\}$, $A = \{a, \{a, b\}\}$.*

Λύση. Θα γράψουμε όλα τα υποσύνολα του X:

Υποσύνολα με κανένα στοιχείο: $\varnothing$.

Υποσύνολα με ένα στοιχείο: $\{\alpha\}$, $\{ga\}$, $\{\omega\}$.

Υποσύνολα με δύο στοιχεία: $\{\alpha,\gamma\}$, $\{\alpha,\omega\}$, $\{\gamma,\omega\}$.

Υποσύνολα με τρία στοιχεία: X.

Άρα θα έχουμε

$$\mathcal{P}(X) = \{\varnothing, \{\alpha\}, \{\gamma\}, \{\omega\}, \{\alpha,\gamma\}, \{\alpha,\omega\}, \{\gamma,\omega\}, X\}.$$

Ομοίως για το A:

Υποσύνολα με κανένχ στοιχείο: $\varnothing$.

Υποσύνολα με ένα στοιχείο: $\{a\}$, $\{\{a,b\}\}$.

Υποσύνολα με δύο στοιχεία: A.

Άρα θα ισχύει

$$\mathcal{P}(A) = \{\varnothing, \{a\}, \{\{a,b\}\}, A\}.$$ □

Άσκηση 5. *Αν* $A = \{a, b, \{a,c\}, \varnothing\}$, *βρείτε τα σύνολα*

(α′) $A \setminus \{a\}$.

(β′) $A \setminus \varnothing$.

(γ′) $A \setminus \{a,c\}$.

(δ′) $A \setminus \{\{a,c\}\}$.

(ε′) $\{a\} \setminus A$.

Λύση. **(α′)** $A \setminus \{a\} = \{x \in A | x \notin \{a\}\} = \{x \in A | x \neq a\} = \{b, \{a,c\}, \varnothing\}$. Με άλλα λόγια, από το στοιχεία του A, που είναι τα $a, b, \{a,c\}, \varnothing$, εξαιρούμε τα στοιχεία του $\{a\}$, δηλαδή εξαιρούμε το a.

(β′) $A \setminus \varnothing = \{x \in A | x \notin \varnothing\} = A$, καθώς $x \notin \varnothing$ για οποιοδήποτε x. Με άλλα λόγια, εξαιρώντας από ένα σύνολο το κενό, στην ουσία δεν εξαιρείς τίποτα.

(γ′) $A \setminus \{a,c\} = \{x \in A | x \notin \{a,c\}\} = \{x \in A | x \neq a, x \neq c\} = \{b, \{a,c\}, \varnothing\}$.

(δ′) $A \setminus \{\{a,c\}\} = \{x \in A | x \notin \{\{a,c\}\}\} = \{x \in A | x \neq \{a,c\}\} = \{a,b,\varnothing\}$ (*προσέξτε την διαφορά με το* **(γ′)**).

(ε′) $\{a\} \setminus A = \{x \in \{a\} | x \notin A\} = \{x = a | x \notin A\} = \varnothing$, καθώς $a \in A$. Επομένως δεν μπορεί να υπάρχει στοιχείο που να ικανοποιεί ταυτόχρονα $x = a$ και $x \notin A$. □

Άσκηση 6. *Σωστό ή λάθος; Θεωρούμε πως* $A = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$ *και* $B = \{a, \{a\}, b\}$.

(α′) $\varnothing \in \mathcal{P}(A)$.

(β′) $\varnothing \subseteq \mathcal{P}(A)$.

(γ′) $\{\varnothing\} \in \mathcal{P}(A)$.

(δ′) $\{\{a\}\} \in \mathcal{P}(B)$.

(ε′) $\{\{a\}\} \subseteq \mathcal{P}(B)$.

(στ′) $\{\{a\}, b\} \subseteq \mathcal{P}(B)$.

(ζ′) $\{\{a\}, \{\{a\}\}\} \subseteq \mathcal{P}(B)$.

Λύση. **(α′)** Σωστό. Είναι ισοδύναμο με την σχέση $\varnothing \subseteq A$, που είναι αληθής.

(β′) Σωστό. Το κενό είναι υποσύνολο παντός συνόλου.

(γ′) Σωστό. Είναι ισοδύναμο με το **(β′)**.

(δ′) Σωστό. Αφού $\{\{a\}\} \in \mathcal{P}(B) \Leftrightarrow \{\{a\}\} \subseteq B \Leftrightarrow \{a\} \in B$, και η τελευταία σχέση είναι αληθής.

(ε′) Σωστό. Αφού $\{\{a\}\} \subseteq \mathcal{P}(B) \Leftrightarrow \{a\} \in \mathcal{P}(B) \Leftrightarrow \{a\} \subseteq B \Leftrightarrow a \in B$, και η τελευταία σχέση είναι αληθής.

(στ′) Λάθος. Εφόσον το στοιχείο b δεν ανήκει στο $\mathcal{P}(B)$, ή ισοδύναμα, δεν είναι υποσύνολο του B (το b *δεν* είναι σύνολο).

(ζ′) Σωστό. Αφού και τα δύο στοιχεία του $\{\{a\}, \{\{a\}\}\}$, τα οποία είναι τα $\{a\}, \{\{a\}\}$, ανήκουν στο $\mathcal{P}(B)$. Για το $\{\{a\}\}$, αυτό το είδαμε στο **(δ′)**, ενώ για το $\{a\}$, η σχέση $\{a\} \in \mathcal{P}(B)$ είναι ισοδύναμη της $\{\{a\}\} \subseteq \mathcal{P}(B)$, που είναι αληθής από το **(ε′)**. □

Άσκηση 7. *Δείξτε ότι δεν υπάρχει σύνολο* X, *τέτοιο ώστε* $\mathcal{P}(X) \subseteq X$. *(Εξετάστε τα υποσύνολα* Y *του* X *που έχουν την ιδιότητα* $Y \notin Y$, *για να οδηγηθείτε σε αντίφαση ανάλογη με το παράδοξο του Russell.)*

Λύση. Θεωρούμε το σύνολο $M = \{Y \in \mathcal{P}(X) | Y \notin Y\}$. Εξ ορισμού, $M \subseteq \mathcal{P}(X)$, άρα και $M \subseteq X$, εφόσον ισχύει $\mathcal{P}(X) \subseteq X$ από την υπόθεση. Άρα $M \in \mathcal{P}(X)$. Αν $M \in M$, τότε θα έχουμε $M \notin M$, άτοπο. Αν $M \notin M$, εφόσον έχουμε $M \in \mathcal{P}(X)$, θα ισχύει $M \in M$, ξανά άτοπο. Άρα δεν μπορεί να ισχύει $\mathcal{P}(X) \subseteq X$. □

Άσκηση 8. *Ορίζουμε την συμμετρική διαφορά δύο συνόλων $A \triangle B$ να είναι το σύνολο των στοιχείων που ανήκουν ή στο A ή στο B, αλλά όχι και στα δύο, δηλαδή*

$$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

Να δειχθεί ότι

$$A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

Λύση. Θα δείξουμε πρώτα πως $A \triangle B \subseteq (A \cup B) \setminus (A \cap B)$. Έστω x ένα τυχαίο στοιχείο του $A \triangle B$. Εξ ορισμού, θα ισχύει $x \in A \setminus B$ ή $x \in B \setminus A$. Και οι δύο περιπτώσεις λύνονται με όμοιο τρόπο, οπότε χωρίς περιορισμό της γενικότητας υποθέτουμε πως $x \in A \setminus B$. Αφού $A \subseteq A \cup B$, τότε θα ισχύει $x \in A \cup B$. Εφόσον $x \notin B$, τότε και $x \notin A \cap B$, άρα συμπεραίνουμε πως $x \in (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

Τώρα θα δείξουμε πως $A \triangle B \supseteq (A \cup B) \setminus (A \cap B)$. Έστω x τυχαίο στοιχείο του $(A \cup B) \setminus (A \cap B)$. Άρα $x \in A \cup B$ και $x \notin A \cap B$. Επομένως ισχύει $x \in A$ ή $x \in B$. Αν $x \in A$, τότε αναγκαστικά θα ισχύει $x \notin B$, διότι σε διαφορετική περίπτωση θα είχαμε και $x \in A \cap B$, άτοπο. Άρα $x \in A \setminus B$, οπότε και $x \in (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = A \triangle B$. Η περίπτωση $x \in B$ αποδεικνύεται με τον ακριβώς ίδιο τρόπο. □

Άσκηση 9. *Υπολογίστε τα σύνολα $A \triangle A$ και $A \triangle \varnothing$. Δείξτε ότι $A \triangle B = B \triangle A$.*

Λύση. Ισχύει

$$A \triangle A = (A \setminus A) \cup (A \setminus A) = A \setminus A = \varnothing,$$

και

$$A \triangle \varnothing = (A \setminus \varnothing) \cup (\varnothing \setminus A) = A \setminus \varnothing = A.$$

Επίσης,

$$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (B \setminus A) \cup (A \setminus B) = B \triangle A.$$ □

Άσκηση 10. *Δείξτε ότι η συμμετρική διαφορά έχει την προσεταιριστική ιδιότητα:*

$$(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C).$$

Λύση. Θα δείξουμε πρώτα πως $(A \triangle B) \triangle C \subseteq A \triangle (B \triangle C)$. Έστω x τυχαίο στοιχείο του $(A \triangle B) \triangle C$. Εξ ορισμού, $x \in C \setminus (A \triangle B)$ ή $x \in (A \triangle B) \setminus C$. Ξεχωρίζουμε τις δύο αυτές περιπτώσεις: αν $x \in C \setminus (A \triangle B)$, τότε $x \in C$, αλλά $x \notin A \triangle B$. Ο τελευταίος ισχυρισμός σημαίνει πως είτε το x δεν ανήκει ούτε στο A, ούτε στο B, ή ανήκει και στα δύο. Αν το x δεν ανήκει σε κανένα από τα A και B, θα έχουμε αρχικά $x \in B \triangle C$, αφού $x \in C$, και τελικά $x \in A \triangle (B \triangle C)$, αφού $x \notin A$ και $x \in B \triangle C$. Αν το x ανήκει και στο A και στο B, τότε, το x δεν ανήκει στο $B \triangle C$, αφού ανήκει και στο B και στο C, οπότε ανήκει στο $A \triangle (B \triangle C)$, αφού το x ανήκει στο A, αλλά όχι στο $B \triangle C$.

Αν τώρα $x \in (A \triangle B) \setminus C$, τότε $x \in A \triangle B$ και $x \notin C$. Άρα το x ανήκει ή στο A ή στο B, αλλά όχι και στα δύο. Αν $x \in A$, τότε $x \notin B$. Αφού το x δεν ανήκει σε κανένα από τα B, C, τότε δεν θα ανήκει και στο $B \triangle C$, άρα $x \in A \triangle (B \triangle C)$. Αν $x \in B$, τότε $x \notin A$. Αφού $x \in B$ και $x \notin C$, τότε $x \in B \triangle C$. Αφού $x \notin A$, τότε $x \in A \triangle (B \triangle C)$. Σε κάθε περίπτωση λοιπόν, ισχύει $x \in A \triangle (B \triangle C)$, αποδεικνύοντας το ζητούμενο.

Ο αντίστροφος εγκλεισμός αποδεικνύεται αναλόγως. □

Άσκηση 11. *Αποδείξτε ότι*

(α΄) $(A \triangle B) \triangle A = B$.

(β΄) $(A \triangle B) \cap C = (A \cap C) \triangle (B \cap C)$.

Λύση. **(α΄)** Ισχύει

$$(A \triangle B) \triangle A = (B \triangle A) \triangle A = B \triangle (A \triangle A) = B \triangle \varnothing = B.$$

(β΄) Θα δείξουμε πρώτα πως

$$(A \triangle B) \cap C \subseteq (A \cap C) \triangle (B \cap C).$$

Έστω x τυχαίο στοιχείο του $(A \triangle B) \cap C$. Τότε $x \in A \triangle B$ και $x \in C$. Άρα το x ανήκει ή στο A ή στο B, αλλά όχι και στα δύο (από τον ορισμό της συμμετρικής διαφοράς). Αν $x \in A$, τότε αφού $x \in C$, θα έχουμε $x \in A \cap C$. Επίσης, θα ισχύει $x \notin B$, οπότε και $x \notin B \cap C$, αφού $B \cap C \subseteq B$. Επομένως, $x \in (A \cap C) \setminus (B \cap C)$, οπότε και $x \in (A \cap C) \triangle (B \cap C)$, αφού $(A \cap C) \setminus (B \cap C) \subseteq (A \cap C) \triangle (B \cap C)$. Εργαζόμενοι ομοίως, αν υποθέσουμε πως $x \in B$, καταλήγουμε πως $x \in B \cap C$ και $x \notin A \cap C$, οπότε και πάλι $x \in (A \cap C) \triangle (B \cap C)$.

Τώρα θα δείξουμε πως

$$(A \triangle B) \cap C \supseteq (A \cap C) \triangle (B \cap C).$$

Έστω x τυχαίο στοιχείο του $(A \cap C) \triangle (B \cap C)$. Από τον ορισμό της συμμετρικής διαφοράς προκύπτει πως ισχύει είτε $x \in A \cap C$ είτε $x \in B \cap C$, αλλά όχι και τα δύο. Αν $x \in A \cap C$, τότε $x \in A$ και $x \in C$. Εφόσον $x \notin B \cap C$, θα έχουμε αναγκαστικά $x \notin B$ (ειδάλλως, θα είχαμε $x \in B$ και $x \in C$, οπότε $x \in B \cap C$, άτοπο). Άρα $x \in A \triangle B$, και αφού $x \in C$, θα έχουμε $x \in (A \triangle B) \cap C$. Η περίπτωση $x \in B \cap C$ αποδεικνύεται ανάλογα. □

Άσκηση 12. *Έστω A, B, C, D σύνολα. Αποδείξτε ότι*

$$(A \times B) \cup (C \times D) \subseteq (A \cup C) \times (B \cup D).$$

Βρείτε ένα παράδειγμα για να αποδείξετε πως δεν ισχύει πάντα ο αντίθετος εγκλεισμός.

Απόδειξη. Θα αποδείξουμε πως κάθε στοιχείο του συνόλου $(A \times B) \cup (C \times D)$ ανήκει και στο $(A \cup C) \times (B \cup D)$. Εφόσον έχουμε καρτεσιανά γινόμενα στην παράσταση, το τυχαίο στοιχείο που θα θεωρήσουμε θα έχει την μορφή ζεύγους, δηλαδή (x, y). Αν $(x, y) \in (A \times B) \cup (C \times D)$, τότε είτε $(x, y) \in A \times B$ είτε $(x, y) \in C \times D$. Αν $(x, y) \in A \times B$, τότε $x \in A$ και $y \in B$, επομένως θα ισχύει $x \in A \cup C$ και $y \in B \times D$, εφόσον $A \subseteq A \cup C$ και $B \subseteq B \cup D$. Άρα $(x, y) \in (A \cup C) \times (B \cup D)$. Η απόδειξη είναι παρόμοια αν υποθέσουμε πως $(x, y) \in C \times D$.

Ο αντίθετος εγκλεισμός δεν ισχύει πάντα· θέτοντας $A = \{0\}$, $B = \{1\}$, $C = \{2\}$, $D = \{3\}$, ισχύει

$$(A \times B) \cup (C \times D) = (\{0\} \times \{1\}) \cup (\{2\} \times \{3\}) = \{(0,1)\} \cup \{(2,3)\} = \{(0,1), (2,3)\},$$

ενώ

$$\begin{aligned} (A \cup C) \times (B \cup D) &= (\{0\} \cup \{2\}) \times (\{1\} \cup \{3\}) = \{0,2\} \times \{1,3\} \\ &= \{(0,1), (0,3), (2,1), (2,3)\} \end{aligned}$$

□

Άσκηση 13. *Ελέγξατε αν ισχύουν οι ισότητες.*

(α΄) $(A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C)$

(β΄) $(A \triangle B) \times C = (A \times C) \triangle (B \times C)$.

Λύση. **(α΄)** Η ισότητα αυτή ισχύει. Θα δείξουμε πρώτα πως

$$(A \setminus B) \times C \subseteq (A \times C) \setminus (B \times C).$$

Έστω (x, y) τυχαίο στοιχείο του $(A \setminus B) \times C$. Άρα $x \in A \setminus B$ και $y \in C$, οπότε $x \in A$ και $x \notin B$. Αφου $x \in A$ και $y \in C$, έχουμε $(x, y) \in A \times C$. Επιπλέον, αφού $x \notin B$, θα έχουμε $(x, y) \notin B \times C$, οπότε $(x, y) \in (A \times C) \setminus (B \times C)$.

Τώρα θα δείξουμε πως

$$(A \setminus B) \times C \supseteq (A \times C) \setminus (B \times C).$$

Έστω (x, y) τυχαίο στοιχείο του $(A \times C) \setminus (B \times C)$. Άρα $(x, y) \in A \times C$ και $(x, y) \notin B \times C$. Επομένως $x \in A$ και $y \in C$, εφόσον $(x, y) \in A \times C$. Αφού ισχύει $y \in C$ και $(x, y) \notin B \times C$, θα έχουμε αναγκαστικά $x \notin B$ (αν είχαμε $x \in B$, τότε $y \in C \Rightarrow (x, y) \in B \times C$, άτοπο). Άρα $x \in A \setminus B$, αφού $x \in A$ και $x \notin B$. Τελικά, θα ισχύει $(x, y) \in (A \setminus B) \times C$, αφού $x \in A \setminus B$ και $y \in C$.

(β') Και αυτή ισότητα ισχύει. Θα το αποδείξουμε χρησιμοποιώντας την **(α')** και την Πρόταση 2.2(1) από τις σημειώσεις (*επιμερισμός του καρτεσιανού γινομένου ως προς την ένωση*):

$$\begin{aligned}
(A \triangle B) \times C &= ((A \setminus B) \cup (B \setminus A)) \times C \\
&= ((A \setminus B) \times C) \cup ((B \setminus A) \times C) \\
&= ((A \times C) \setminus (B \times C)) \cup ((B \times C) \setminus (A \times C)) \\
&= (A \times C) \triangle (B \times C).
\end{aligned}$$

□

Άσκηση 14. *Θεωρούμε τις σχέσεις* $\boldsymbol{\rho}$ *και* $\boldsymbol{\sigma}$ *στο* X*, δηλαδή* $\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\sigma} \subseteq X \times X$*. Εάν οι* $\boldsymbol{\rho}$*,* $\boldsymbol{\sigma}$ *είναι συμμετρικές, εξετάστε αν οι* $\boldsymbol{\rho} \cup \boldsymbol{\sigma}$*,* $\boldsymbol{\rho} \cap \boldsymbol{\sigma}$ *και* $\boldsymbol{\rho} \setminus \boldsymbol{\sigma}$ *είναι συμμετρικές.*

Λύση. Η $\boldsymbol{\rho} \cup \boldsymbol{\sigma}$ είναι συμμετρική: έστω (x, y) ένα τυχαίο στοιχείο της σχέσης αυτής. Τότε ισχύει είτε $(x, y) \in \boldsymbol{\rho}$ είτε $(x, y) \in \boldsymbol{\sigma}$. Αν $(x, y) \in \boldsymbol{\rho}$, τότε αφού η $\boldsymbol{\rho}$ είναι συμμετρική θα έχουμε $(y, x) \in \boldsymbol{\rho}$, και ομοίως, αν $(x, y) \in \boldsymbol{\sigma}$, τότε $(y, x) \in \boldsymbol{\sigma}$. Σε κάθε περίπτωση θα ισχύει $(y, x) \in \boldsymbol{\rho} \cup \boldsymbol{\sigma}$, αποδεικνύοντας το ζητούμενο.

Η $\boldsymbol{\rho} \cap \boldsymbol{\sigma}$ είναι και αυτή συμμετρική: έστω (x, y) ένα τυχαίο στοιχείο της. Τότε θα έχουμε $(x, y) \in \boldsymbol{\rho}$ και $(x, y) \in \boldsymbol{\sigma}$, επομένως $(y, x) \in \boldsymbol{\rho}$ και $(y, x) \in \boldsymbol{\sigma}$, αφού οι $\boldsymbol{\rho}$, $\boldsymbol{\sigma}$ είναι συμμετρικές. Τελικά συμπεραίνουμε πως $(y, x) \in \boldsymbol{\rho} \cap \boldsymbol{\sigma}$, άρα η $\boldsymbol{\rho} \cap \boldsymbol{\sigma}$ είναι συμμετρική.

Τέλος, η $\boldsymbol{\rho} \setminus \boldsymbol{\sigma}$ είναι συμμετρική: έστω (x, y) ένα τυχαίο στοιχείο της. Τότε ισχύει $(x, y) \in \boldsymbol{\rho}$ και $(x, y) \notin \boldsymbol{\sigma}$. Αφού οι $\boldsymbol{\rho}$, $\boldsymbol{\sigma}$ είναι συμμετρικές, τότε $(y, x) \in \boldsymbol{\rho}$ και $(y, x) \notin \boldsymbol{\sigma}$, επομένως, $(x, y) \in \boldsymbol{\rho} \setminus \boldsymbol{\sigma}$, ολοκληρ΄νοντας την απόδειξη. □

Άσκηση 15. *Στο σύνολο* $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ *ορίζουμε την σχέση*

$$x \boldsymbol{\rho} y \quad \text{αν και μόνο αν} \quad y \quad \text{είναι πολλαπλάσιο του} \quad x.$$

Εξετάστε αν η σχέση $\boldsymbol{\rho}$ *ικανοποιεί την ανακλαστική, την μεταβατική και την αντισυμμετρική ιδιότητα, και εάν τις ικανοποιεί, εξετάστε τι είδους διάταξη είναι.*

Λύση. Για ευκολία, θέτουμε ως A το δοθέν σύνολο. Κάθε ακέραιος αριθμός είναι πολλαπλάσιο του εαυτού του, επομένως η $\boldsymbol{\rho}$ είναι ανακλαστική ($x\boldsymbol{\rho}x$, για κάθε $x \in A$). Επίσης, αν $x\boldsymbol{\rho}y$ και $y\boldsymbol{\rho}z$, τότε ο y είναι πολλαπλάσιο του x, και ο z είναι πολλαπλάσιο του y. Τα πολλαπλάσια του y είναι και πολλαπλάσια του x, επομένως $x\boldsymbol{\rho}z$, άρα η $\boldsymbol{\rho}$ είναι μεταβατική. Η $\boldsymbol{\rho}$ είναι και αντισυμμετρική, διότι όταν δύο θετικοί ακέραιοι αλληλοδιαιρούνται, τότε αυτοί είναι αναγκαστικά ίσοι (όλα αυτά προκύπτουν από τις στοιχειώδεις ιδιότητες της διαιρετότητας), δηλαδή $x\boldsymbol{\rho}y$ και $y\boldsymbol{\rho}x \Rightarrow x = y$. Η $\boldsymbol{\rho}$ είναι κατ'αρχήν σχέση μερικής διάταξης.

Η $\boldsymbol{\rho}$ δεν είναι όμως σχέση ασθενούς διάταξης, καθώς δεν ικανοποιείται η ιδιότητα (ΑΔ2) (δες σελίδα 31 στις σημειώσεις). Για παράδειγμα, τα στοιχεία 3 και 5 του A, δεν είναι συγκρίσιμα μέσω αυτής της σχέσης. Για τον ίδιο λόγο, δεν είναι ούτε σχέση γνήσιας διάταξης. $\square$