Λύσεις Ασκήσεων στα Θεμέλια των Μαθηματικών II

Ρωμανός-Διογένης Μαλικιώσης

Παρασκευή, 29 Οκτωβρίου 2010

Άσκηση 1. *Απλοποιήστε τις ακόλουθες εκφράσεις*

(α') $(D^c \cup F)^c \cup (D \cap F)$

(β') $((X^c \cup Y) \cap (X^c \cup Y^c))^c$

Λύση. **(α')** Χρησιμοποιώντας τους κανόνες De Morgan (Πρόταση 1.8) και την επιμεριστικότητα της ένωσης ως προς την τομή προκύπτει

$$(D^c \cup F)^c \cup (D \cap F) = (D \cap F^c) \cup (D \cap F) = D \cap (F^c \cup F) = D \cap U = D,$$

όπου U χώρος και τα D, F υποσύνολά του.

(β') Ξανά από τους ίδιους κανόνες προκύπτει

$$\begin{aligned} ((X^c \cup Y) \cap (X^c \cup Y^c))^c &= (X^c \cup Y)^c \cup (X^c \cup Y^c)^c \\ &= (X \cap Y^c) \cup (X \cap Y) \\ &= X \cap (Y^c \cup Y) \\ &= X \cap U \\ &= X \end{aligned}$$

□

Άσκηση 2. *Δείξτε ότι αν A, B και C είναι (οποιαδήποτε) σύνολα και $A \triangle B = A \triangle C$, τότε $B = C$. Αποδείξτε ότι η εξίσωση $A \triangle X = B$ έχει μοναδική λύση.*

Απόδειξη. Θα χρησιμοποιήσουμε τα αποτελέσματα της άσκησης 1.20 στις σημειώσεις (η οποία είναι η άσκηση 11 στο πρώτο φυλλάδιο λύσεων). Ισχύουν

$$\begin{aligned} A \triangle B = A \triangle C &\Rightarrow (A \triangle B) \triangle A = (A \triangle C) \triangle A \\ &\Rightarrow B = C. \end{aligned}$$

Την εξίσωση $A \triangle X = B$, θα προσπαθήσουμε να την λύσουμε ως προς X:

$$\begin{aligned} A \triangle X = B &\Rightarrow (A \triangle X) \triangle A = B \triangle A \\ &\Rightarrow X = B \triangle A, \end{aligned}$$

η οποία προφανώς είναι και η μοναδική λύση αυτής της εξίσωσης. □

Άσκηση 3. *Θεωρούμε τις σχέσεις $\boldsymbol{\rho}$, $\boldsymbol{\sigma}$ στο X, δηλαδή $\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\sigma} \subseteq X \times X$. Εάν οι $\boldsymbol{\rho}$, $\boldsymbol{\sigma}$ είναι ανακλαστικές, δείξτε ότι οι $\boldsymbol{\rho} \cup \boldsymbol{\sigma}$, $\boldsymbol{\rho} \cap \boldsymbol{\sigma}$ και $\boldsymbol{\rho}^{-1}$ είναι επίσης ανακλαστικές. Είναι η σχέση $\boldsymbol{\rho} \setminus \boldsymbol{\sigma}$ ανακλαστική;*

Απόδειξη. Έστω a ένα τυχαίο στοιχείο του X. Εφόσον οι $\boldsymbol{\rho}$, $\boldsymbol{\sigma}$ είναι ανακλαστικές, τότε θα ισχύει $(a, a) \in \boldsymbol{\rho}$ και $(a, a) \in \boldsymbol{\sigma}$, οπότε προφανώς $(a, a) \in \boldsymbol{\rho} \cap \boldsymbol{\sigma}$ και $(a, a) \in \boldsymbol{\rho} \cup \boldsymbol{\sigma}$. Επίσης, εξ ορισμού θα ισχύει και $(a, a) \in \boldsymbol{\rho}^{-1}$, οπότε αυτές οι σχέσεις είναι όλες ανακλαστικές.

Η σχέση $\boldsymbol{\rho} \setminus \boldsymbol{\sigma}$ όμως, δεν είναι ανακλαστική (προϋποθέτουμε ότι $X \neq \varnothing$), καθώς δεν περιέχει κανένα ζεύγος της μορφής (a, a), όπου $a \in X$ (αν $(a, a) \in \boldsymbol{\rho} \setminus \boldsymbol{\sigma}$, τότε $(a, a) \notin \boldsymbol{\sigma}$, άτοπο, αφού η $\boldsymbol{\sigma}$ είναι ανακλαστική). □

Άσκηση 4. *Δίδουμε διάφορες σχέσεις στο $\mathbb{R}$. Ποιες από αυτές είναι ανακλαστικές, συμμετρικές, μεταβατικές;*

(α') $x < y$

(β') $x \geqslant y$

(γ') $|x - y| < 1$

(δ') $|x - y| \leqslant 0$

(ε') $x - y$ *είναι ρητός*

(στ') $x - y$ *είναι άρρητος.*

Απάντηση. **(α')** Αυτή η σχέση δεν είναι ούτε ανακλαστική, ούτε συμμετρική, καθώς δεν ισχύει $x < x$ για κανέναν $x \in \mathbb{R}$, και αν $x < y$, τότε δεν μπορεί να ισχύει $y < x$, αλλιώς θα ίσχυε ταυτόχρονα $x - y > 0$ και $x - y < 0$, άτοπο.

Είναι όμως μεταβατική, καθώς αν έχουμε $x < y$ και $y < z$, τότε θα ισχύει και $x < z$ (χρησιμοποιώντας τον τυπικό ορισμό της ανισότητας στο $\mathbb{R}$, έχουμε $x < y \Rightarrow y - x > 0$ και $y < z \Rightarrow z - y > 0$, οπότε $z - x = (z - y) + (y - x) > 0$, άρα $x < z$).

(β') Αυτή η σχέση είναι ανακλαστική και μεταβατική· ισχύει $x \geqslant x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, και η μεταβατικότητα αποδεικνύεται όπως στο **(α')**. Δεν είναι συμμετρική, διότι ισχύει π. χ. $1 \geqslant 0$, ενώ δεν ισχύει $0 \geqslant 1$.

(γ′) Αυτή η σχέση είναι ανακλαστική και συμμετρική, καθώς $|x - x| = 0 < 1$ και $|x - y| = |y - x|$ για κ'αθε $x, y \in \mathbb{R}$.

Δεν είναι όμως μεταβατική· αν πάρουμε $x = 1$, $y = \frac{1}{2}$ και $z = 0$, ισχύει $|x - y| = |y - z| < 1$, αλλά $|x - z| = 1$.

(δ′) Αυτή η σχέση ταυτίζεται με την σχέση της ισότητας, οπότε ως σχέση ισοδυναμίας θα είναι ανακλαστική, συμμετρική και μεταβατική.

(ε′) Και αυτή η σχέση είναι σχέση ισοδυναμίας. Για κάθε $x, y, z \in \mathbb{R}$ έχουμε $x - x = 0 \in \mathbb{Q}$, αν ισχύει $x - y \in \mathbb{Q}$, τότε προφανώς και $y - x \in \mathbb{Q}$ (ο αντίθετος ενός ρητού είναι ρητός) και αν $x - y, y - z \in \mathbb{Q}$, τότε και $x - z = (x - y) + (y - z) \in \mathbb{Q}$ (το άθροισμα ρητών είναι ρητός).

(στ′) Αυτή η σχέση είναι μόνο συμμετρική· αν $x - y$ είναι άρρητος, τότε και ο αντίθετός του είναι άρρητος, ο $y - x$. Επειδή όμως ο $x - x = 0$ δεν είναι άρρητος, δεν είναι ανακλαστική, και επειδή το άθροισμα δύο αρρήτων δεν είναι πάντα άρρητος, δεν είναι μεταβατική. Για παράδειγμα, έστω $x = 2$, $y = \sqrt{2}$, $z = 0$. Τότε $x - y = 2 - \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ και $y - z = \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, αλλά $x - z = 2 \in \mathbb{Q}$. □

Άσκηση 5. *Εάν η $\boldsymbol{\rho}$ είναι σχέση ασθενούς διάταξης, τότε η αντίστροφη σχέση είναι επίσης ασθενής διάταξη.*

Απόδειξη. $\boxed{\text{ΑΔ1}}$ Έστω $(x, y), (y, z) \in \boldsymbol{\rho}^{-1}$. Άρα $(z, y), (y, x) \in \boldsymbol{\rho}$ από τον ορισμό της αντίστροφης σχέσης, οπότε $(z, x) \in \boldsymbol{\rho}$, από την (ΑΔ1) για την $\boldsymbol{\rho}$. Ξανά από τον ορισμό της αντίστροφης σχέσης προκύπτει $(x, z) \in \boldsymbol{\rho}^{-1}$.

$\boxed{\text{ΑΔ2}}$ Για κάθε x και y, θα ισχύει τουλάχιστον ένα από τα $(x, y) \in \boldsymbol{\rho}$ ή $(y, x) \in \boldsymbol{\rho}$, ή ισοδύναμα, τουλάχιστον ένα από τα $(y, x) \in \boldsymbol{\rho}^{-1}$ ή $(x, y) \in \boldsymbol{\rho}^{-1}$.

$\boxed{\text{ΑΔ3}}$ Έστω $x \neq y$ και $(x, y) \in \boldsymbol{\rho}^{-1}$, δηλαδή $(y, x) \in \boldsymbol{\rho}$. Από την (ΑΔ3) για την $\boldsymbol{\rho}$, θα ισχύει $(x, y) \notin \boldsymbol{\rho}$, ή ισοδύναμα, $(y, x) \notin \boldsymbol{\rho}^{-1}$. □

Άσκηση 6. *Δείξτε ότι οι παρακάτω είναι σχέσεις ασθενούς διάταξης.*

(α′) *Η σχέση $\boldsymbol{\rho}$ στο σύνολο $\{a, b, c\}$, που περιέχει τα ζεύγη $a\boldsymbol{\rho}a$, $a\boldsymbol{\rho}b$, $a\boldsymbol{\rho}c$, $b\boldsymbol{\rho}b$, $b\boldsymbol{\rho}c$, $c\boldsymbol{\rho}c$.*

(β′) *Η σχέση $\boldsymbol{\sigma}$ στο Ευκλείδειο επίπεδο $\mathbb{R}^2$ που ορίζεται ως:*

$$(x_1, y_1)\boldsymbol{\sigma}(x_2, y_2) \quad \text{εάν} \quad \begin{array}{l} \text{είτε } y_1 < y_2 \\ \text{είτε } y_1 = y_2 \text{ και } x_1 \leqslant x_2. \end{array}$$

(γ′) *Την σχέση $\boldsymbol{\tau}$ στο $A = \{\{0\}, \{0, 1\}, \{0, 1, 2\}, \{0, 1, 2, 3\}\}$, που ταυτίζεται με την σχέση 'υποσύνολο', δηλαδή $a\boldsymbol{\tau}b$ όταν $a \subseteq b$.*

Απόδειξη. **(α')** $\boxed{\text{ΑΔ1}}$ Έστω $x\boldsymbol{\rho}y$ και $y\boldsymbol{\rho}z$, όπου $x, y, z \in \{a, b, c\}$. Αν $x = a$, τότε προφανώς θα ισχύει $x\boldsymbol{\rho}z$, αφού για κάθε $z \in \{a, b, c\}$ παρατηρούμε πως ισ'χυει $a\boldsymbol{\rho}z$. Αν $x = b$, τότε $y = b$ ή c, οπότε και $z = b$ ή c. Σε κάθε περίπτωση ισχύει $x\boldsymbol{\rho}z$. Τέλος, αν $x = c$, τότε αναγκαστικά $y = c$ και $z = c$, οπότε πάλι ισχύει $x\boldsymbol{\rho}z$.

$\boxed{\text{ΑΔ2}}$ Βλέπουμε ότι ισχύει $x\boldsymbol{\rho}x$ για κάθε $x \in \{a, b, c\}$. Αν $x \neq y$, τότε αν $x = a$ ή $y = a$, θα έχουμε $x\boldsymbol{\rho}y$ ή $y\boldsymbol{\rho}x$ αντίστοιχα. Ας υποθέσουμε, λοιπόν, πως $x, y \neq a$. Αφού ισχύει $x \neq y$, ο ένας από τους δύο είναι ο b και ο άλλος ο c. Αν $x = b$ ή $y = b$ θα έχουμε αντίστοιχα $x\boldsymbol{\rho}y$ ή $y\boldsymbol{\rho}x$. Δηλαδή σε κάθε περίπτωση ισχύει $x\boldsymbol{\rho}y$ ή $y\boldsymbol{\rho}x$, ή και τα δύο.

$\boxed{\text{ΑΔ3}}$ Έστω $x \neq y$ και $x\boldsymbol{\rho}y$. Υπάρχουν οι εξής τρεις περιπτώσεις: $(x, y) \in \{(a, b), (a, c), (b, c)\}$. Παρατηρούμε πως τα συμμετρικά ζεύγη (b, a), (c, a), (c, b) δεν ανήκουν στην $\boldsymbol{\rho}$, οπότε η $\boldsymbol{\rho}$ ικανοποιεί και την (ΑΔ3).

(β') $\boxed{\text{ΑΔ1}}$ Έστω $(x_1, y_1)\boldsymbol{\sigma}(x_2, y_2)$ και $(x_2, y_2)\boldsymbol{\sigma}(x_3, y_3)$. Σε κάθε περίπτωση ισχύει $y_1 \leqslant y_2$ και $y_2 \leqslant y_3$, οπότε και $y_1 \leqslant y_3$. Αν $y_1 < y_3$, τότε $(x_1, y_1)\boldsymbol{\sigma}(x_3, y_3)$. Αν $y_1 = y_2 = y_3$, τότε αναγκαστικά θα ισχύει $x_1 \leqslant x_2$ και $x_1 \leqslant x_3$, άρα και $x_1 \leqslant x_3$, οπότε πάλι $(x_1, y_1)\boldsymbol{\sigma}(x_3, y_3)$, άρα ισχύει η (ΑΔ1).

$\boxed{\text{ΑΔ2}}$ Έστω (x_1, y_1), (x_2, y_2) τυχαία σημεία του επιπέδου. Αν $y_1 < y_2$ ή $y_2 < y_1$, θα ισχύει αντίστοιχα $(x_1, y_1)\boldsymbol{\sigma}(x_2, y_2)$ ή $(x_2, y_2)\boldsymbol{\sigma}(x_2, y_2)$. Αν $y_1 = y_2$, τότε ισχύει $x_1 \leqslant x_2$ ή $x_2 \leqslant x_1$, οπότε και θα ισχύει αντίστοιχα $(x_1, y_1)\boldsymbol{\sigma}(x_2, y_2)$ ή $(x_2, y_2)\boldsymbol{\sigma}(x_2, y_2)$, επιβεβαιώνοντας και την (ΑΔ2).

$\boxed{\text{ΑΔ3}}$ Έστω $(x_1, y_1)\boldsymbol{\sigma}(x_2, y_2)$, με $(x_1, y_1) \neq (y_1, y_2)$. Αν $y_1 < y_2$, δεν μπορεί να ισχύει $(x_2, y_2)\boldsymbol{\sigma}(x_1, y_1)$. Αν $y_1 = y_2$, τότε $x_1 < x_2$, αφού έχουμε $(x_1, y_1) \neq (y_1, y_2)$. Ούτε σ'αυτήν την περίπτωση ισχύει $(x_2, y_2)\boldsymbol{\sigma}(x_1, y_1)$, αποδεικνύοντας και την (ΑΔ3).

(γ') Η σχέση 'υποσύνολο' ικανοποεί τις (ΑΔ1) και (ΑΔ3) σε κάθε σύνολο συνόλων και είναι επιπλέον ανακλαστική, καθώς είναι σχέση μερικής διάταξης. Για το συγκεκριμένο σύνολο όμως,ικανοποιείται και η (ΑΔ2)· αφού η $\boldsymbol{\tau}$ είναι ανακλαστική, αρκεί να αποδείξουμε την (ΑΔ2) για $x \neq y$. Αν $x = \{0\}$ ή $y = \{0\}$, τότε ισχύει $x\boldsymbol{\tau}y$ ή $y\boldsymbol{\tau}x$ αντίστοιχα. Θεωρούμε λοιπόν πως τα x, y είναι διάφορα του $\{0\}$. Αν $x = \{0, 1\}$ ή $y = \{0, 1\}$, τότε και πάλι ισχύει $x\boldsymbol{\tau}y$ ή $y\boldsymbol{\tau}x$ αντίστοιχα, εφόσον κάθε σύνολο του A διάφορο του $\{0\}$ περιέχει τα $0, 1$. Οι εναπομείνασες περιπτώσεις είναι οι $x = \{0, 1, 2\}$, $y = \{0, 1, 2, 3\}$, ή $x = \{0, 1, 2, 3\}$, $y = \{0, 1, 2\}$, για τις οποίες ισχύει αντίστοιχα $x\boldsymbol{\tau}y$ ή $y\boldsymbol{\tau}x$ αντίστοιχα. Έτσι λοιπόν, αποδείξαμε πως η $\boldsymbol{\tau}$ είναι σχέση ασθενούς διάταξης. □

Άσκηση 7. *Δείξτε ότι κάθε σχέση ασθενούς διάταξης είναι ανακλαστική.*

Απόδειξη. Έστω $\boldsymbol{\rho}$ σχέση ασθενούς διάταξης στο X. Για κάθε $x \in X$, από την (ΑΔ2), ισχύει $x\boldsymbol{\rho}x$, θέτοντας $x = y$, άρα η $\boldsymbol{\rho}$ είναι ανακλαστική. □

Άσκηση 8. *Στο* $A = \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ *ορίζουμε την σχέση* $\boldsymbol{\sigma}$, *δηλαδή* $\boldsymbol{\sigma} \subseteq (\mathbb{N}\times\mathbb{N})\times(\mathbb{N}\times\mathbb{N})$, *ως εξής:*

$$(m, n)\boldsymbol{\sigma}(r, s) \quad \textit{εάν} \quad m + s = r + n.$$

Δείξτε ότι η $\boldsymbol{\sigma}$ *είναι σχέση ισοδυναμίας. Οι κλάσεις ισοδυναμίας αυτής της σχέσης αντιστοιχούν με φυσιολογικό τρόπο στα στοιχεία ενός γνωστού συνόλου. Ποιο είναι αυτό;*

Απόδειξη. $\boxed{(\Sigma\mathrm{I}1)}$ Προφανώς $(m, n)\boldsymbol{\sigma}(m, n)$, για κάθε $(m, n) \in A$, αφού $m+n = m + n$.

$\boxed{(\Sigma\mathrm{I}2)}$ Αν $(m, n)\boldsymbol{\sigma}(r, s)$, τότε $m + s = r + n$, δηλαδή $r + n = m + s$, οπότε $(r, s)\boldsymbol{\sigma}(m, n)$.

$\boxed{(\Sigma\mathrm{I}3)}$ Έστω $(m, n)\boldsymbol{\sigma}(r, s)$ και $(r, s)\boldsymbol{\sigma}(t, u)$, άρα $m+s = r+n$ και $r+u = t+s$. Προσθέτοντας κατά μέλη προκύπτει

$$m + (s + r) + u = n + (r + s) + t$$

και απαλείφοντας έχουμε $m + u = t + n$, οπότε $(m, n)\boldsymbol{\sigma}(t, u)$.

Παρατηρούμε πως οι κλάσεις ισοδυναμίας αυτής της σχέσης αντιστοιχούν στα στοιχεία του συνόλου των ακεραίων, $\mathbb{Z}$, ως εξής:

$$[(m, n)] \longleftrightarrow m - n$$

όπου $[(m, n)]$ είναι η κλάση του στοιχείου (m, n) ως προς την $\boldsymbol{\sigma}$. Αν ορίσουμε την πρόσθεση στο σύνολο των κλάσεων ισοδυναμίας ως

$$[(m, n)] + [(r, s)] = [(m + r, n + s)],$$

τότε το σύνολο αυτό δομείται σε αβελιανή ομάδα, και η παραπάνω αντιστοιχία είναι ισομορφισμός ομάδων, δηλαδή ουσιαστικά 'ταυτίζουμε' το σύνολο αυτό με το σύνολο των ακεραίων. Ας επιβεβαιώσουμε όμως πρώτα το γεγονός πως η πράξη που ορίσαμε είναι καλώς ορισμένη, όπως και ότι η αντιστοιχία είναι καλώς ορισμένη και ισομορφισμός.

Αν $(m, n)\boldsymbol{\sigma}(m', n')$ και $(r, s)\boldsymbol{\sigma}(r', s')$, τότε $m+n' = m'+n$ και $r+s' = r'+s$, οπότε προσθέτοντας κατά μέλη

$$(m + r) + (n' + s') = (m' + r') + (n + s),$$

άρα $[(m + r, n + s)] = [(m' + r', n' + s')]$, ή με άλλα λόγια το αποτέλεσμα της πρόσθεσης των $[(m, n)]$ και $[(r, s)]$ δεν εξαρτάται από τους αντιπροσώπους των κλάσεων που διαλέγουμε, επομένως η πρόσθεση είναι καλά ορισμένη. Μπορούμε τώρα εύκολα να διαπιστώσουμε ότι η πράξη αυτή είναι αντιμεταθετική και προσεταιριστική, το ουδέτερο στοιχείο είναι το $[(0, 0)]$, και το αντίθετο του $[(m, n)]$ είναι το $[(n, m)]$.

Αν θέσουμε $f([(m,n)]) = m-n$, μπορούμε να δούμε πως αν $(m,n)\boldsymbol{\sigma}(r,s)$, τότε $m+s = r+n$, οπότε $m-n = r-s$, δηλαδή η εικόνα του $[(m,n)]$ μέσω της f δεν εξαρτάται από τον αντιπρόσωπο που διαλέγουμε, άρα η f είναι καλώς ορισμένη. Η f είναι επί· έστω a τυχών ακέραιος. Αν $a \geqslant 0$, τότε $a \in \mathbb{N}$ και $f([(a,0)]) = 0$, ενώ αν $a < 0$, τότε $-a \in \mathbb{N}$ και $f([(0,-a)]) = a$. Η f είναι 1-1· αν ισχύει $f([(m,n)]) = f([(r,s)])$ τότε $m-n = r-s$ ή $m+s = r+n$, δηλαδή $(m,n)\boldsymbol{\sigma}(r,s)$ ή $[(m,n)] = [(r,s)]$. Τέλος,

$$\begin{aligned} f([(m,n)]) + f([(r,s)]) &= (m-n)+(r-s) = (m+r)-(n+s) \\ &= f([(m+r, n+s)]) \\ &= f([(m,n)] + [(r,s)]) \end{aligned}$$

οπότε η f είναι ισομορφισμός ομάδων (με άλλα λόγια διατηρεί την δομή του συνόλου των κλάσεων ισοδυναμίας με πράξη την πρόσθεση), όπως ακριβώς θέλαμε να αποδείξουμε. □

Άσκηση 9. *Θεωρούμε τις σχέσεις $\boldsymbol{\rho}$ και $\boldsymbol{\sigma}$ στο X, δηλαδή $\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\sigma} \subseteq X \times X$. Εάν οι $\boldsymbol{\rho}$ και $\boldsymbol{\sigma}$ είναι συμμετρικές, εξετάστε αν οι $\boldsymbol{\rho}^{-1}$, $\boldsymbol{\rho} \cap \boldsymbol{\sigma}$, $\boldsymbol{\rho} \cup \boldsymbol{\sigma}$ και $\boldsymbol{\rho} \setminus \boldsymbol{\sigma}$ είναι επίσης συμμετρικές.*

Λύση. Έστω $(x,y) \in \boldsymbol{\rho}^{-1}$· άρα $(y,x) \in \boldsymbol{\rho}$, και αφού η $\boldsymbol{\rho}$ συμμετρική, θα ισχύει $(x,y) \in \boldsymbol{\rho}$, άρα $(y,x) \in \boldsymbol{\rho}^{-1}$, δηλαδή η $\boldsymbol{\rho}^{-1}$ είναι συμμετρική.

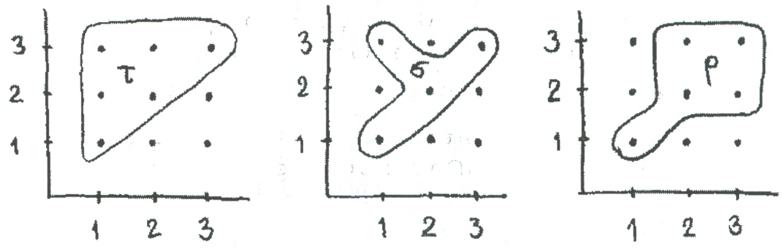
Έστω (x,y) τυχόν στοιχείο της $\boldsymbol{\rho}\cap\boldsymbol{\sigma}$. Τότε $(x,y) \in \boldsymbol{\rho}$ και $(x,y)\boldsymbol{\sigma}$, και εφόσον οι $\boldsymbol{\rho}$, $\boldsymbol{\sigma}$ είναι συμμετρικές θα ισχύει $(y,x) \in \boldsymbol{\rho}$ και $(y,x) \in \boldsymbol{\sigma}$, δηλαδή $(y,x) \in \boldsymbol{\rho}\cap\boldsymbol{\sigma}$, οπότε η $\boldsymbol{\rho} \cap \boldsymbol{\sigma}$ είναι συμμετρική.

Έστω (x,y) τυχόν στοιχείο της $\boldsymbol{\rho} \cup \boldsymbol{\sigma}$. Τότε $(x,y) \in \boldsymbol{\rho}$ ή $(x,y) \in \boldsymbol{\sigma}$. Χωρίς περιορισμό της γενικότητας θεωρούμε πως $(x,y) \in \boldsymbol{\rho}$. Αφού η $\boldsymbol{\rho}$ είναι συμμετρική, τότε $(y,x) \in \boldsymbol{\rho}$, οπότε και $(y,x) \in \boldsymbol{\rho} \cup \boldsymbol{\sigma}$, δηλαδή η $\boldsymbol{\rho} \cup \boldsymbol{\sigma}$ είναι συμμετρική.

Έστω (x,y) τυχόν στοιχείο της $\boldsymbol{\rho} \setminus \boldsymbol{\sigma}$. Τότε $(x,y) \in \boldsymbol{\rho}$ και $(x,y) \notin \boldsymbol{\sigma}$. Αφού οι $\boldsymbol{\rho}$ και $\boldsymbol{\sigma}$ είναι συμμετρικές, τότε θα έχουμε $(y,x) \in \boldsymbol{\rho}$ και $(y,x) \notin \boldsymbol{\sigma}$, επομένως $(y,x) \in \boldsymbol{\rho} \setminus \boldsymbol{\sigma}$, δηλαδή η $\boldsymbol{\rho} \setminus \boldsymbol{\sigma}$ είναι και αυτή συμμετρική.

Καταλήξαμε λοιπόν στο συμπέρασμα πως όλες αυτές οι σχέσεις είναι συμμετρικές. □

Άσκηση 10. *Θεωρούμε το σύνολο $A = \{1,2,3\}$ και τις σχέσεις που ορίζονται στο παρακάτω σχήμα.*



(α′) *Ποιο υποσύνολο του $A \times A$ αποτελεί την σχέση $x > y$ στο A;*

(β′) *Πως συμβολίζουμε συνήθως την σχέση που ορίζεται από το υποσύνολο $\boldsymbol{\tau}$ του $A \times A$;*

(γ′) *Για κάθε μια από τις σχέσεις $\boldsymbol{\rho}$ και $\boldsymbol{\sigma}$ στο A, εξετάστε αν είναι ανακλαστική, συμμετρική, μεταβατική.*

(δ′) *Εάν κάποια από τις $\boldsymbol{\rho}$, $\boldsymbol{\sigma}$ είναι σχέση ισοδυναμίας, ποια είναι η αντίστοιχη διαμέριση του A;*

Απάντηση. (α′) Τα ζεύγη (x, y) που ικανοποιούν την ανισότητα $x > y$ είναι ακριβώς τα $(2, 1)$, $(3, 1)$ και $(3, 2)$, άρα αυτό το υποσύνολο είναι το $\{(2, 1), (3, 1), (3, 2)\}$.

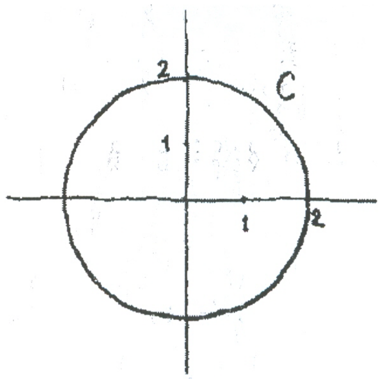
(β′) Εύκολα βλέπουμε πως ισχύει $x\boldsymbol{\tau}y$ ακριβώς τότε όταν $x \leqslant y$, δηλαδή η $\boldsymbol{\tau}$ είναι η σχέση 'μικρότερο ή ίσο'.

(γ′) Θα δούμε ποια είναι η γεωμετρική ιδιότητα των εννοιών αυτών. Μια σχέση είναι ανακλαστική, αν το σύνολο που την περιγράφει περιέχει την διαγώνιο. Είναι συμμετρική, όταν είναι συμμετρική ως προς την διαγώνιο (τα στοιχεία (x, y) και (y, x) είναι συμμετρικά ως προς την ευθεία $x = y$). Οπότε, βλέπουμε εύκολα πως και οι δύο είναι ανακλαστικές, ενώ μόνο η $\boldsymbol{\rho}$ είναι συμμετρική.

Τέλος, και οι δύο είναι μεταβατικές· εφόσον και οι δύο είναι ανακλαστικές, αρκεί να αποδείξουμε πως αν (x, y) και (y, z) ανήκουν σ'αυτές τις σχέσεις με $x \neq y$ και $y \neq z$, τότε και το (x, z) ανήκει στην ίδια σχέση (όντως, αν είχαμε για παράδειγμα $x = y$, τότε $(x, z) = (y, z)$, και το (x, z) ανήκει τετριμμένα στην ίδια σχέση). Για την $\boldsymbol{\sigma}$ υπάρχει μόνο ένα τέτοιο ζεύγος, το $(1, 3)$, οπότε αυτή η σχέση είναι μεταβατική. Για την $\boldsymbol{\rho}$ υπάρχουν δύο τέτοια ζεύγη, τα $(2, 3)$ και $(3, 2)$. Επειδή τα $(2, 2)$ και $(3, 3)$ ανήκουν στην $\boldsymbol{\rho}$, συμπεραίνουμε πως η $\boldsymbol{\rho}$ είναι μεταβατική.

(δ′) Απ'ότι είδαμε στο (γ′) μόνον η $\boldsymbol{\rho}$ είναι σχέση ισοδυναμίας. Βλέπουμε πως ισχύει $(2, 3) \in \boldsymbol{\rho}$, ενώ το 1 σχετίζεται μόνον με τον εαυτό του μέσω της $\boldsymbol{\rho}$. Άρα οι κλάσεις ισοδυναμίας του $\boldsymbol{\rho}$ είναι οι $\{1\}$ και $\{2, 3\}$. $\square$

Άσκηση 11. *Ποια σχέση στο $\mathbb{R}$ ορίζει ο κύκλος $C \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$;*



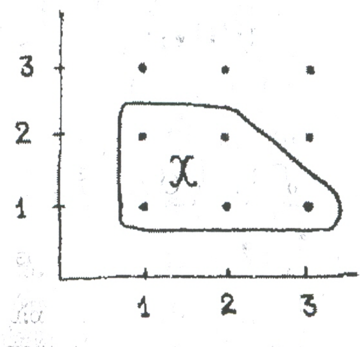
Απάντηση. Ο κύκλος αυτός έχει κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα 2, οπότε $(x, y) \in C$, ακριβώς τότε όταν $x^2 + y^2 = 4$. □

Άσκηση 12. *Σε κάθε μια από τις ακόλουθες περιπτώσεις βρείτε τα ελάχιστα στον αριθμό στοιχεία με τα οποία πρέπει να συμπληρωθεί το σύνολο χ ώστε να ορίζει μια σχέση*

(α′) *ανακλαστική,*

(β′) *συμμετρική,*

(γ′) *μεταβατική.*



Λύση. **(α′)** Μια τέτοια σχέση θα περιέχει την διαγώνιο $(x = y)$, οπότε χρειαζόμαστε μόνο το $(3, 3)$, δηλαδή ένα μονον στοιχείο.

(β′) Μια τέτοια σχέση πρέπει να είναι συμμετρική ως προς την ευθεία $x = y$, οπότε χρειαζόμαστε μόνο το $(1,3)$, δηλαδή ένα μονο στοιχείο.

(γ′) Έχουμε $(3,1),(1,2) \in \boldsymbol{\chi}$, οπότε χρειαζόμαστε οπωσδήποτε το $(3,2)$. Μπορούμε τώρα να διαπιστώσουμε ότι η νέα σχέση που προκύπτει είναι μεταβατική· ελέγχουμε όλα τα ζεύγη (x,y), (y,z), με $x \neq y$ και $y \neq z$ που ανήκουν στο σύνολο $\boldsymbol{\chi} \cup \{(3,2)\}$, θέλοντας να δούμε αν και το ζεύγος (x,z) ανήκει στο ίδιο σύνολο. Όλα αυτά τα ζεύγη ζευγών είναι τα $((1,2),(2,1))$, $((2,1),(1,2))$, $((3,1),(1,2))$ και $((3,2),(2,1))$ και παρατηρούμε πως τα ζεύγη $(1,1)$, $(2,2)$, $(3,1)$ και $(3,2)$ αντίστοιχα ανήκουν στο $\boldsymbol{\chi} \cup \{(3,2)\}$, οπότε αυτό το υποσύνολο ορίζει μια μεταβατική σχέση. □

Άσκηση 13. *Στο $\mathbb{Z}$ θεωρούμε τις σχέσεις $\equiv_6$ και $\equiv_4$. Ποια είναι η σχέση $\equiv_6 \cap \equiv_4$;*

Απάντηση. Θα δείξουμε πως αυτή η σχέση είναι η $\equiv_{12}$. Το τυχαίο στοιχείο (x,y) στο $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ικανοποιεί $(x,y) \in \equiv_6 \cap \equiv_4$, αν και μόνο αν $x \equiv_6 y$ και $x \equiv_4 y$, δηλαδή ακριβώς τότε όταν $6|x-y$ και $4|x-y$. Ισοδύναμα, ο $x-y$ θα είναι κοινό πολλαπλάσιο των ακεραίων 6 και 4, και αυτό συμβαίνει ακριβώς όταν ο $x-y$ διαιρείται από το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο των 6 και 4, δηλαδή όταν $12|x-y$, ή $x \equiv_{12} y$. Οπότε η σχέση $\equiv_6 \cap \equiv_4$ είναι η $\equiv_{12}$. □

Άσκηση 14. *Θεωρούμε τα σύνολα $A = \{1,2,3\}$, $B = \{a,b\}$ και $C = A \times B$.*

(α′) *Γράψτε όλα τα στοιχεία του C.*

(β′) *Σχεδιάστε το καρτεσιανό γινόμενο $A \times C$.*

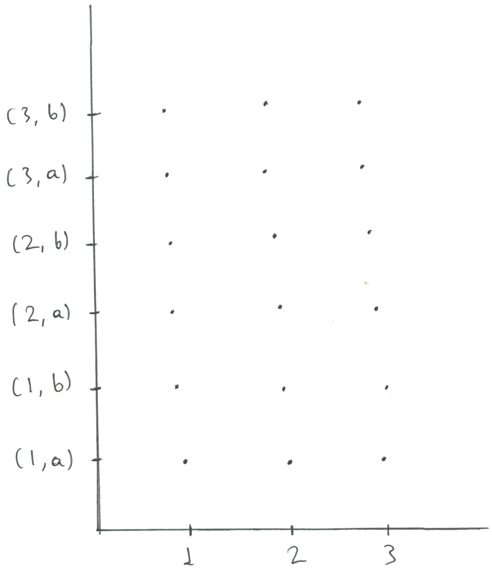
(γ′) *Ορίζουμε την σχέση $\boldsymbol{\rho}$ μεταξύ των συνόλων A και C, με*

$$x\boldsymbol{\rho}(u,v) \text{ αν και μόνο αν } x > u.$$

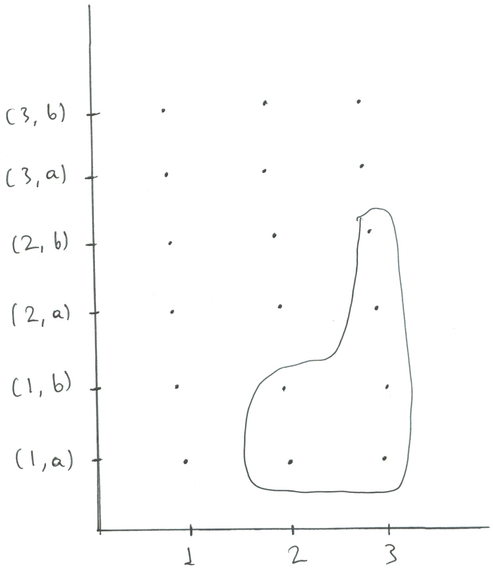
Σημειώστε στο σχέδιο του $A \times C$ το υποσύνολο που ορίζει την σχέση $\boldsymbol{\rho}$.

Λύση. **(α′)** Έχουμε τρείς επιλογές για την πρώτη συντεταγμένη και δύο για την δεύτερη, οπότε θα έχουμε συνολικά έξι στοιχεία, τα οποία είναι τα $(1,a)$, $(1,b)$, $(2,a)$, $(2,b)$, $(3,a)$ και $(3,b)$.

(β′) Κάθε ζεύγος του ζητούμενου καρτεσιανού γινομένου παρίσταται με μια τελεία:



(γ′) Τα κυκλωμένα σημεία καθορίζουν την δοθείσα σχέση:



□

Άσκηση 15. *Τι είδους σχέσεις είναι οι* $\boldsymbol{\rho}^{-1}$, $\boldsymbol{\rho} \cap \boldsymbol{\sigma}$, $\boldsymbol{\rho} \cup \boldsymbol{\sigma}$, $\boldsymbol{\rho} \setminus \boldsymbol{\sigma}$, *όταν οι* $\boldsymbol{\rho}$, $\boldsymbol{\sigma}$ *είναι:*

(α′) *σχέσεις ασθενούς διάταξης;*

(β′) *σχέσεις γνήσιας διάταξης;*

Απάντηση. **(α′)** Από την άσκηση 5, η $\boldsymbol{\rho}^{-1}$ είναι ασθενής διάταξη. Η $\boldsymbol{\rho}\setminus\boldsymbol{\sigma}$ δεν είναι ασθενής διάταξη, καθώς είδαμε στην άσκηση 3 πως δεν είναι ανακλαστική, και γνωρίζουμε πως κάθε σχέση ασθενούς διάταξης είναι ανακλαστική, από την άσκηση 7.

Η $\boldsymbol{\rho}\cup\boldsymbol{\sigma}$ δεν είναι πάντα ασθενής διάταξη· αν θεωρήσουμε ένα σύνολο X με τουλάχιστον δύο στοιχεία, και $\boldsymbol{\sigma}=\boldsymbol{\rho}^{-1}$ (για παράδειγμα, θα μπορούσαμε να πάρουμε $X=\mathbb{R}$, και $\boldsymbol{\rho}$ την σχέση 'μικρότερο ή ίσο'), τότε $\boldsymbol{\rho}\cup\boldsymbol{\sigma}=\boldsymbol{\rho}\cup\boldsymbol{\rho}^{-1}=X\times X$, από την (ΑΔ2) για την $\boldsymbol{\rho}$. Όντως, για κάθε ζεύγος (x,y) του $X\times X$, ισχύει $(x,y)\in\boldsymbol{\rho}$ ή $(y,x)\in\boldsymbol{\rho}$, ή ισοδύναμα, ισχύει $(x,y)\in\boldsymbol{\rho}\cup\boldsymbol{\rho}^{-1}$. Εφόσον όμως το X έχει τουλάχιστον δύο στοιχεία, μπορούμε να πάρουμε $x\neq y$, και βλέπουμε πως και τα δύο ζεύγη (x,y) και (y,x) ανήκουν στην $\boldsymbol{\rho}\cup\boldsymbol{\rho}^{-1}$, οπότε δεν ισχύει η (ΑΔ3) για την $\boldsymbol{\rho}\cup\boldsymbol{\rho}^{-1}$.

Η $\boldsymbol{\rho}\cap\boldsymbol{\sigma}$ δεν είναι πάντα ασθενής διάταξη· θεωρούμε ξανά ένα σύνολο X με τουλάχιστον δύο στοιχεία, και $\boldsymbol{\sigma}=\boldsymbol{\rho}^{-1}$. Έστω $x\neq y$, με $x,y\in X$. Από την (ΑΔ2) για την $\boldsymbol{\rho}$ θα ισχύει είτε $x\boldsymbol{\rho}y$ είτε $y\boldsymbol{\rho}x$. Χωρίς περιορισμό της γενικότητας, θεωρούμε πως ισχύει $x\boldsymbol{\rho}y$. Τότε από την (ΑΔ3), δεν θα ισχύει $y\boldsymbol{\rho}x$, ή $x\boldsymbol{\rho}^{-1}y$. Με άλλα λόγια, $(x,y)\notin\boldsymbol{\rho}^{-1}$, και $(y,x)\notin\boldsymbol{\rho}$, δηλαδή κανένα από τα ζεύγη (x,y) και (y,x) δεν ανήκουν στο $\boldsymbol{\rho}\cap\boldsymbol{\rho}^{-1}$, οπότε δεν ισχύει η (ΑΔ2) για την σχέση αυτή, άρα δεν είναι σχέση ασθενούς διάταξης.

(β′) Μόνον η $\boldsymbol{\rho}^{-1}$ είναι σχέση γνήσιας διάταξης. Επιβεβαιώνουμε τις ιδιότητες της γνήσιας διάταξης για την $\boldsymbol{\rho}^{-1}$:

$\boxed{\text{ΓΔ1}}$ Έστω $(x,y),(y,z)\in\boldsymbol{\rho}^{-1}$. Τότε $(z,y),(y,x)\in\boldsymbol{\rho}$, και από την (ΓΔ1) για την $\boldsymbol{\rho}$, θα έχουμε $(z,x)\in\boldsymbol{\rho}$, οπότε $(x,z)\in\boldsymbol{\rho}^{-1}$.

$\boxed{\text{ΓΔ2}}$ Θεωρούμε δύο τυχαία στοιχεία x,y. Από την (ΓΔ2) για την $\boldsymbol{\rho}$, θα ισχύει ακριβώς ένα από τα εξής:

$$x\boldsymbol{\rho}y \quad \text{ή} \quad y\boldsymbol{\rho}x \quad \text{ή} \quad x=y,$$

ή ισοδύναμα,

$$y\boldsymbol{\rho}^{-1}x \quad \text{ή} \quad x\boldsymbol{\rho}^{-1}y \quad \text{ή} \quad x=y,$$

δηλαδή ισχύει και η (ΓΔ2) για την $\boldsymbol{\rho}^{-1}$.

Η $\boldsymbol{\rho}\setminus\boldsymbol{\sigma}$ δεν είναι πάντα σχέση γνήσιας διάταξης· αν θέσουμε $\boldsymbol{\sigma}=\boldsymbol{\rho}$, τότε $\boldsymbol{\rho}\setminus\boldsymbol{\sigma}=\varnothing$, και παρατηρούμε πως δεν ισχύει η (ΓΔ2) για την κενή σχέση (σε ένα σύνολο με τουλάχιστον δύο στοιχεία: αν πάρουμε $x\neq y$, τότε δεν ισχύει καμία από τις $(x,y)\in\boldsymbol{\rho}\setminus\boldsymbol{\sigma}$, $(y,x)\in\boldsymbol{\rho}\setminus\boldsymbol{\sigma}$, ή $x=y$).

Ούτε η $\boldsymbol{\rho}\cap\boldsymbol{\sigma}$ είναι πάντα σχέση γνήσιας διάταξης. Αν θέσουμε $\boldsymbol{\sigma}=\boldsymbol{\rho}^{-1}$, τότε η $\boldsymbol{\rho}\cap\boldsymbol{\sigma}$ είναι η κενή σχέση από την (ΓΔ2) για την $\boldsymbol{\rho}$ (αν $(x,y)\in\boldsymbol{\rho}\cap\boldsymbol{\rho}^{-1}$, τότε έχουμε ταυτόχρονα $x\boldsymbol{\rho}y$ και $y\boldsymbol{\rho}x$, το οποίο είναι άτοπο), για την οποία είδαμε πως δεν είναι σχέση γνήσιας διάταξης πάνω σε ένα σύνολο με τουλάχιστον δύο στοιχεία.

Τέλος, ούτε η $\boldsymbol{\rho}\cup\boldsymbol{\sigma}$ είναι πάντα σχέση γνήσιας διάταξης. Με το ίδιο αντιπαράδειγμα, δηλαδή X σύνολο με τουλάχιστον δύο στοιχεία και $\boldsymbol{\sigma}=\boldsymbol{\rho}^{-1}$, τότε αν $x\boldsymbol{\rho}y$, θα ισχύουν ταυτόχρονα οι $(x,y)\in\boldsymbol{\rho}\cup\boldsymbol{\rho}^{-1}$ και $(y,x)\in\boldsymbol{\rho}\cup\boldsymbol{\rho}^{-1}$, επομένως δεν ισχύει η (ΓΔ3) γι'αυτήν την σχέση. □

Άσκηση 16. *Ορίζουμε την σύνθεση των σχέσεων* $\boldsymbol{\rho} \subseteq X \times Y$ *και* $\boldsymbol{\sigma} \subseteq Y \times Z$, *την σχέση*

$$\boldsymbol{\rho} \circ \boldsymbol{\sigma} = \{(x, z) \in X \times Z | \text{υπάρχει } y \in Y, \text{ με } x\boldsymbol{\rho}y \text{ και } y\boldsymbol{\sigma}z\},$$

δηλαδή ισχύει η συνεπαγωγή

$$x\boldsymbol{\rho}y, y\boldsymbol{\sigma}z \Rightarrow x(\boldsymbol{\rho} \circ \boldsymbol{\sigma})z.$$

Να δειχθεί ότι η σχέση $\boldsymbol{\rho} \subseteq X \times X$ *είναι σχέση ασθενούς διάταξης, αν και μόνο αν ισχύουν τα εξής:*

$\boxed{(\mathrm{A\Delta1})'}$ $\boldsymbol{\rho} \circ \boldsymbol{\rho} \subseteq \boldsymbol{\rho}$.

$\boxed{(\mathrm{A\Delta2})'}$ $\boldsymbol{\rho} \cup \boldsymbol{\rho}^{-1} = X \times X$.

$\boxed{(\mathrm{A\Delta3})'}$ $\boldsymbol{\rho} \cap \boldsymbol{\rho}^{-1} \subseteq \iota_X$, *όπου* ι_X *η σχέση της ισότητας στο* X, *δηλαδή* $\iota_X = \{(x, x) | x \in X\}$.

Απόδειξη. Θα δείξουμε πρώτα πως η (ΑΔ1) είναι ισοδύναμη της (ΑΔ1)′. Όντως, ας υποθέσουμε ότι ισχύει η (ΑΔ1), και ας θεωρήσουμε ένα τυχαίο στοιχείο του $\boldsymbol{\rho} \circ \boldsymbol{\rho}$, έστω (x, z). Τότε υπάρχει $y \in X$, με $x\boldsymbol{\rho}y$ και $y\boldsymbol{\rho}z$. Από την (ΑΔ1) για την $\boldsymbol{\rho}$, θα έχουμε $x\boldsymbol{\rho}z$, δηλαδή $(x, z) \in \boldsymbol{\rho}$. Αφού το ζεύγος αυτό ήταν τυχαίο, καταλήγουμε στο συμπέρασμα $\boldsymbol{\rho} \circ \boldsymbol{\rho} \subseteq \boldsymbol{\rho}$. Αντίστροφα, ας υποθέσουμε πως ισχύει $\boldsymbol{\rho} \circ \boldsymbol{\rho} \subseteq \boldsymbol{\rho}$. Έστω $x\boldsymbol{\rho}y$ και $y\boldsymbol{\rho}z$. Τότε $(x, z) \in \boldsymbol{\rho} \circ \boldsymbol{\rho}$, άρα $(x, z) \in \boldsymbol{\rho}$, ή $x\boldsymbol{\rho}z$, οπότε ισχύει η (ΑΔ1).

Τώρα θα δείξουμε πως η (ΑΔ2)′ είναι ισοδύναμη της (ΑΔ2). Ας υποθέσουμε πως ισχύει η (ΑΔ2) για την $\boldsymbol{\rho}$. Τότε για κάθε ζεύγος $(x, y) \in X \times X$ θα ισχύει είτε $x\boldsymbol{\rho}y$ είτε $y\boldsymbol{\rho}x$, ή ισοδύναμα, είτε $(x, y) \in \boldsymbol{\rho}$ είτε $(x, y) \in \boldsymbol{\rho}^{-1}$, δηλαδή σε κάθε περίπτωση, $(x, y) \in \boldsymbol{\rho} \cup \boldsymbol{\rho}^{-1}$, οπότε $\boldsymbol{\rho} \cup \boldsymbol{\rho}^{-1} = X \times X$. Αντίστροφα, έστω ότι ισχύει η (ΑΔ2)′ για την $\boldsymbol{\rho}$. Έστω x, y τυχαία στοιχεία του X. Τότε $(x, y) \in \boldsymbol{\rho} \cup \boldsymbol{\rho}^{-1}$, δηλαδή ισχύει είτε $(x, y) \in \boldsymbol{\rho}$ είτε $(x, y) \in \boldsymbol{\rho}^{-1}$, ή ισοδύναμα, $x\boldsymbol{\rho}y$ ή $y\boldsymbol{\rho}x$, με άλλα λόγια ισχύει η (ΑΔ2).

Τέλος, θα δείξουμε οως η (ΑΔ3) είναι ισοδύναμη της (ΑΔ3)′. Ας υποθέσουμε πως ισχύει η (ΑΔ3) για την $\boldsymbol{\rho}$. Έστω (x, y) τυχαίο στοιχείο της $\boldsymbol{\rho} \cap \boldsymbol{\rho}^{-1}$. Οπότε θα ισχύει $x\boldsymbol{\rho}y$ και $x\boldsymbol{\rho}^{-1}y$, δηλαδή $x\boldsymbol{\rho}y$ και $y\boldsymbol{\rho}x$. Αυτό όμως δεν μπορεί να ισχύει όταν $x \neq y$, από την (ΑΔ3), άρα αναγκαστικά θα έχουμε $x = y$, ή $(x, y) \in \iota_X$. Οπότε αποδείξαμε πως $\boldsymbol{\rho} \cap \boldsymbol{\rho}^{-1} \subseteq \iota_X$. Αντίστροφα, ας υποθέσουμε πως ισχύει η (ΑΔ3)′. Θεωρούμε δύο στοιχεία x και y του X, τέτοια ώστε $x \neq y$ και $x\boldsymbol{\rho}y$. Αν ίσχυε $y\boldsymbol{\rho}x$, τότε θα είχαμε $x\boldsymbol{\rho}y$ και $x\boldsymbol{\rho}^{-1}y$, άρα $(x, y) \in \boldsymbol{\rho} \cap \boldsymbol{\rho}^{-1} \subseteq \iota_X$, οπότε $x = y$, άτοπο. Άρα δεν θα ισχύει $y\boldsymbol{\rho}x$, επομένως η (ΑΔ3) ισχύει για την $\boldsymbol{\rho}$.

Δείξαμε λοιπόν, πως οι (ΑΔ1), (ΑΔ2), (ΑΔ3) είναι ισοδύναμες των (ΑΔ1)′, (ΑΔ2)′ και (ΑΔ3)′ αντίστοιχα, πράγμα που αποδεικνύει το ζητούμενο. □

Άσκηση 17. *Οι παρακάτω συναρτήσεις έχουν πεδίο τιμών το $\mathbb{R}$, και πεδίο ορισμού κάποιο υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Βρείτε σε κάθε περίπτωση ποιο είναι το μεγαλύτερο δυνατό πεδίο ορισμού.*

(α') $h(x) = \log x$

(β') $\alpha(v) = -v$

(γ') $j(\beta) = \frac{1}{\beta^2 - 1}$

(δ') $g(u) = \log \log \cos u$

Λύση. **(α')** Ο λογάριθμος ορίζεται ακριβώς τότε όταν το όρισμά του είναι θετικός πραγματικός αριθμός, οπότε το μέγιστο δυνατό περίο ορισμού είναι το $(0, +\infty)$ σ'αυτήν την περίπτωση.

(β') Η παράσταση αυτή ορίζεται για κάθε πραγματικό v, οπότε μπορούμε να πάρουμε ως πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

(γ') Η παράσταση αυτή ορίζεται ακριβώς τότε όταν ο παρονομαστής είναι μη μηδενικός. Ο παρονομαστής μηδενίζεται για $\beta = \pm 1$, οπότε το μέγιστο δυνατό πεδίο ορισμού είναι το $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.

(δ') Η συνάρτηση αυτή ορίζεται ακριβώς όταν έχουμε $\log \cos u > 0$, ή ισοδύναμα, όταν $\cos u > 1$, λόγω μονοτονίας της λογαριθμικής συνάρτησης. Δεν υπάρχει όμως καμία πραγματική τιμή του u για την οποία να ισχύει αυτή η ανισότητα, επομένως το μέγιστο δυνατό πεδίο ορισμού αυτής της συνάρτησης είναι το $\varnothing$, με άλλα λόγια η g είναι η *κενή συνάρτηση*. $\square$

Άσκηση 18. *Προσδιορίστε την εικόνα για τις ακόλουθες συναρτήσεις $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.*

(α') $f(x) = x^3$

(β') $f(x) = x - 4$

(γ') $f(x) = e^x + 3$

(δ') $f(x) = \begin{cases} 1/x & \textit{αν } x \neq 0 \\ 0 & \textit{αν } x = 0 \end{cases}$

Λύση. **(α')** Η εικόνα είναι όλο το $\mathbb{R}$· αν $y \geqslant 0$, τότε $f(\sqrt[3]{y}) = y$, ενώ αν $y < 0$, ισχύει $f(-\sqrt[3]{-y}) = y$.

(β') Μια γραμμική συνάρτηση στο $\mathbb{R}$ έχει προφανώς εικόνα όλο το $\mathbb{R}$· για κάθε $y \in \mathbb{R}$, ισχύει $f(y + 4) = y$.

(γ') Η εικόνα είναι το σύνολο $(3, +\infty)$· για κάθε $y \in (3, +\infty)$ ισχύει $f(\log(y - 3)) = y$. Επιπλέον, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε $f(x) > 3$, αποδεικνύοντας πως η εικόνα είναι το $(3, +\infty)$.

(δ′) Η εικόνα είναι όλο το $\mathbb{R}$· αν $y \neq 0$, τότε $f(1/y) = y$, και αφού $f(0) = 0$, το 0 ανήκει προφανώς στην εικόνα της f. □

Άσκηση 19. *Για κάθε μια από τις συναρτήσεις της παραπάνω άσκησης βρείτε αν είναι*

(α′) *1-1*

(β′) *επί*

(γ′) *αμφιμονοσήμαντη.*

Λύση. **(α′)** Είναι όλες 1-1· αν έχουμε $x^3 = y^3$, τότε αναγκαστικά $x = y$. Αν $y = 0$, τότε και $x = 0$, ενώ αν $y \neq 0$, τότε $(x/y)^3 = 1 \Rightarrow x/y = 1 \Rightarrow x = y$. Αν $x - 4 = y - 4$, τότε προφανώς $x = y$. Αν $e^x + 3 = e^y + 3$, τότε $e^x = e^y \Rightarrow e^{x-y} = 1 \Rightarrow x - y = 0 \Rightarrow x = y$. Τέλος, αν $1/x = 1/y$, τότε $x = y$, και όλες οι τιμές της μορφής $1/x$, $x \neq 0$, είναι μη μηδενικές (δηλαδή διάφορες του $f(0)$).

(β′) Από την προηγούμενη άσκηση βλέπουμε πως οι **(α′)**, **(β′)** και **(δ′)** είναι επί.

(γ′) Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε πως οι **(α′)**, **(β′)** και **(δ′)** της προηγούμενης άσκησης είναι αμφιμονοσήμαντες. □

Άσκηση 20. *Δώστε παραδείγματα συναρτήσεων $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ που να είναι:*

(α′) *ούτε 1-1, ούτε επί,*

(β′) *1-1, αλλά όχι επί,*

(γ′) *επί, αλλά όχι 1-1,*

(δ′) *1-1 και επί.*

Λύση. **(α′)** Η $f(x) = x^2$· έχουμε $f(x) = f(-x)$ για κάθε ακέραιο x, οπότε δεν είναι 1-1, και $f(x) \geqslant 0$ για κάθε $x \in \mathbb{Z}$, οπότε δεν είναι ούτε επί.

(β′) Η $f(x) = 2x$· είναι 1-1, καθώς αν $2x = 2y$, τότε $x = y$. Δεν είναι επί, καθώς η εικόνα της είναι το σύνολο των αρτίων αριθμών.

(γ′) Η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x/2 & \text{αν ο } x \text{ είναι άρτιος} \\ x & \text{αν ο } x \text{ είναι περιττός} \end{cases}$$

είναι επί, καθώς για κάθε $y \in \mathbb{Z}$ ισχύει $f(2y) = y$, ενώ δεν είναι 1-1, εφόσον έχουμε $f(1) = f(2) = 1$.

(δ′) Η ταυτοτική συνάρτηση, $f(x) = x$, είναι προφανώς αμφιμονοσήμαντη. □

Άσκηση 21. *Δίδονται οι συναρτήσεις f, g και h από τους φυσικούς αριθμούς στους φυσικούς αριθμούς, που ορίζονται από:*

(α′) $f(n) = n + 1$

(β′) $g(n) = 2n$

(γ′) $h(n) = \begin{cases} 0 & \textit{αν ο } n \textit{ είναι άρτιος} \\ 1 & \textit{αν ο } n \textit{ είναι περιττός} \end{cases}$

Καθορίστε συναρτήσεις $f \circ f$, $f \circ g$, $g \circ f$, $g \circ h$, $h \circ g$ και $(f \circ g) \circ h$.

Λύση. Προφανώς όλες αυτές οι συναρτήσεις ορίζονται από τους φυσικούς στους φυσικούς. Ισχύουν τα εξής:

$$\begin{aligned} f \circ f(n) &= f(f(n)) = f(n+1) = n+2 \\ f \circ g(n) &= f(g(n)) = f(2n) = 2n+1 \\ g \circ f(n) &= g(f(n)) = g(n+1) = 2n+2 \\ h \circ g(n) &= h(g(n)) = h(2n) = 0. \end{aligned}$$

Επίσης,

$$g \circ h(n) = g(h(n)) = 2h(n) = \begin{cases} 0 & \text{αν ο } n \text{ είναι άρτιος} \\ 2 & \text{αν ο } n \text{ είναι περιττός} \end{cases}$$

και

$$(f \circ g) \circ h(n) = f \circ g(h(n)) = 2h(n) + 1 = \begin{cases} 1 & \text{αν ο } n \text{ είναι άρτιος} \\ 3 & \text{αν ο } n \text{ είναι περιττός.} \end{cases} \qquad \square$$

Άσκηση 22. *Δίδονται συναρτήσεις f και g τέτοιες ώστε να ορίζεται η σύνθεση $g \circ f$. Δείξτε ότι*

(α′) *Αν η $g \circ f$ είναι επί, τότε η g είναι επί.*

(β′) *Αν η $g \circ f$ είναι 1-1, τότε η f είναι 1-1.*

(γ′) *Βρείτε παραδείγματα συναρτήσεων f και g για να δείξετε ότι δεν ισχύουν οι αντίστροφες συνεπαγωγές, δηλαδή ότι εάν η g είναι επί ή εάν η f είναι 1-1, δεν ισχύει υποχρεωτικά το ίδιο για την σύνθεση $g \circ f$.*

Απόδειξη. **(α′)** Οι g και $g \circ f$ έχουν το ίδιο πεδίο τιμών, έστω C. Εφόσον η $g \circ f$ είναι επί, για κάθε $y \in C$ υπάρχει x στο πεδίο ορισμού της $g \circ f$, τέτοιο ώστε $g \circ f(x) = y$, ή με άλλα λόγια το στοιχείο $f(x)$ στο πεδίο ορισμού της g ικανοποιεί $g(f(x)) = y$. Αφού το y είναι τυχαίο, η g θα είναι επί.

(β′) Οι $g \circ f$ και f έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού, έστω A. Αφού η $g \circ f$ είναι 1-1, θα ισχύει η συνεπαγωγή $g \circ f(x) = g \circ f(y) \Rightarrow x = y$. Θεωρούμε $x, y \in A$, τέτοια ώστε $f(x) = f(y)$, άρα και $g(f(x)) = g(f(y))$, ή ισοδύναμα $g \circ f(x) = g \circ f(y)$, οπότε από την παραπάνω συνεπαγωγή, θα έχουμε $x = y$. Εφόσον τα x, y είναι τυχαία, συμπεραίνουμε πως η f είναι 1-1.

(γ′) Θεωρούμε την ταυτοτική συνάρτηση $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $g(x) = x$, και την παραβολή $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x = x^2)$. Η g είναι προφανώς επί, αλλά δεν ισχύει το ίδιο για την $g \circ f = f$, της οποίας το σύνολο τιμών είναι το $[0, +\infty)$, κι όχι όλο το $\mathbb{R}$. Αν αλλάξουμε τους ρόλους των συναρτήσεων, δηλαδή αν θέσουμε $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $g(x) = x^2$ και $f(x) = x$, τότε η f είναι 1-1, αλλά δεν ισχύει το ίδιο για την $g \circ f = g$. □

Άσκηση 23. *Εάν οι $f : A \to B$ και $g : B \to C$ είναι αμφιμονοσήμαντες, τότε και η $g \circ f : A \to C$ είναι αμφιμονοσήμαντη.*

Απόδειξη. Έστω x, y τυχαία στοιχεία του A, τέτοια ώστε $g \circ f(x) = g \circ f(y)$. Τότε θα έχουμε

$$\begin{aligned} g(f(x)) = g(f(y)) &\Rightarrow f(x) = f(y) \\ &\Rightarrow x = y, \end{aligned}$$

εφόσον οι f, g είναι 1-1. Άρα και η $g \circ f$ είναι 1-1.

Τώρα, θεωρούμε ένα τυχαίο στοιχείο $z \in C$. Αφού η g είναι επί, θα υπάρχει $y \in B$, τέτοιο ώστε $g(y) = z$. Αφού η f είναι επί, θα υπάρχει $x \in A$, τέτοιο ώστε $f(x) = y$, άρα $g(f(x)) = g(y) = z$, δηλαδή το x ικανοποιεί $g \circ f(x) = z$. Αφού το z ήταν τυχαίο, συμπεραίνουμε πως η $g \circ f$ είναι και αυτή επί, επομένως είναι αμφιμονοσήμαντη. □

Άσκηση 24. *Εάν $f : A \to B$ είναι συνάρτηση και $U, V \subseteq A$, $X, Y \subseteq B$, δείξτε ότι*

(α′) $f(\varnothing) = \varnothing$, $f^{-1}(\varnothing) = \varnothing$, $f^{-1}(B) = A$.

(β′) $f(U \cap V) \subseteq f(U) \cap f(V)$

(γ′) *Εάν η f είναι 1-1, τότε* $f(U \cap V) = f(U) \cap f(V)$

(δ′) $f^{-1}(X \cup Y) = f^{-1}(X) \cup f^{-1}(Y)$

(ε′) $f^{-1}(X \cap Y) = f^{-1}(X) \cap f^{-1}(Y)$

(στ′) $f^{-1}(B \setminus X) = A \setminus f^{-1}(X)$

Απόδειξη. **(α')** Αν $f(\varnothing) \neq \varnothing$, τότε θα υπήρχε κάποιο $y \in f(\varnothing)$, οπότε και θα υπήρχε κάποιο $x \in \varnothing$, τέτοιο ώστε $f(x) = y$, άτοπο. Ομοίως, αν $f^{-1}(\varnothing) \neq \varnothing$, τότε θα υπήρχε $x \in A$ με $f(x) \in \varnothing$, άτοπο. Άρα $f(\varnothing) = f^{-1}(\varnothing) = \varnothing$.

Επιπλέον, ισχύει $f^{-1}(B) = \{x \in A | f(x) \in B\}$. Όμως, από τον ορισμό της f, ισχύει $f(x) \in B$ για κάθε $x \in A$, επομένως $f^{-1}(B) = A$.

(β') Θεωρούμε ένα τυχαίο στοιχείο του $f(U \cap V)$, έστω y. Εξ ορισμού, θα υπάρχει $x \in U \cap V$ με $f(x) = y$. Άρα $x \in U$ και $x \in V$, επομένως $y = f(x) \in f(U)$ και $y = f(x) \in f(V)$, οπότε $y \in f(U \cap V)$. Επειδή το y πάρθηκε τυχαία, θα ισχύει $f(U \cap V) \subseteq f(U) \cap f(V)$.

(γ') Από το **(β')** ήδη ξέρουμε πως ισχύει $f(U \cap V) \subseteq f(U) \cap f(V)$, οπότε αρκεί να αποδείξουμε πως αν η f είναι 1-1, τότε $f(U \cap V) \supseteq f(U) \cap f(V)$. Έστω y τυχαίο στοιχείο του $f(U) \cap f(V)$, οπότε $y \in f(U)$ και $y \in f(V)$, άρα υπάρχουν $x \in U$ και $x' \in V$, τέτοια ώστε $f(x) = f(x') = y$. Αφού η f είναι 1-1, τότε θα έχουμε $x = x'$, οπότε $x \in U \cap V$ και $y = f(x) \in f(U \cap V)$, αποδεικνύοντας τελικά πως $f(U \cap V) \supseteq f(U) \cap f(V)$.

(δ') Θα χρησιμοποιήσουμε διαδοχικά ισοδυναμίες της μορφής $x \in f^{-1}(Z) \Leftrightarrow f(x) \in Z$. Ισχύει:

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(X \cup Y) &\Leftrightarrow f(x) \in X \cup Y \\ &\Leftrightarrow f(x) \in X \text{ ή } f(x) \in Y \\ &\Leftrightarrow x \in f^{-1}(X) \text{ ή } x \in f^{-1}(Y) \\ &\Leftrightarrow x \in f^{-1}(X) \cup f^{-1}(Y), \end{aligned}$$

το οποίο μας δείχνει πως τα εν λόγω σύνολα έχουν ακριβώς τα ίδια στοιχεία.

(ε') Όπως και στο **(δ')**, ισχύει

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(X \cap Y) &\Leftrightarrow f(x) \in X \cap Y \\ &\Leftrightarrow f(x) \in X \text{ και } f(x) \in Y \\ &\Leftrightarrow x \in f^{-1}(X) \text{ και } x \in f^{-1}(Y) \\ &\Leftrightarrow x \in f^{-1}(X) \cap f^{-1}(Y), \end{aligned}$$

οπότε $f^{-1}(X \cap Y) = f^{-1}(X) \cap f^{-1}(Y)$.

(στ') Και εδώ,

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(B \setminus X) &\Leftrightarrow f(x) \in B \setminus X \\ &\Leftrightarrow f(x) \notin X \\ &\Leftrightarrow x \notin f^{-1}(X) \\ &\Leftrightarrow x \in A \setminus f^{-1}(X). \end{aligned}$$ □

Άσκηση 25. *Εάν $A = \{1, 2\}$ και $B = \{a, b, c\}$, πόσες διαφορετικές συναρτήσεις υπάρχουν από το A στο B; Πόσες από το B στο A; Πόσες σε κάθε περίπτωση είναι 1-1; Πόσες είναι επί; Πόσες είναι αμφιμονοσήμαντες;*

Απάντηση. Υπάρχουν $3^2 = 9$ διαφορετικές συναρτήσεις από το A στο B· κάθε συνάρτηση καθορίζεται από τις τιμές της στο πεδίο ορισμού, και εφόσον υπάρχουν 3 επιλογές για κάθε ένα από τα $f(1)$ και $f(2)$ (*ανεξάρτητες μεταξύ τους*), θα έχουμε συνολικά 9 συναρτήσεις. Με παρόμοιο τρόπο βλέπουμε πως υπάρχουν $2^3 = 8$ διαφορετικές συναρτήσεις από το B στο A, εφόσον για κάθε μια από τις τιμές $g(a)$, $g(b)$, $g(c)$, υπάρχουν 2 δυνατές επιλογές.

Για να είναι μια συνάρτηση $f : A \to B$ 1-1, θα πρέπει οι τιμές $f(1)$ και $f(2)$ να είναι διαφορετικές. Αν επιλέξουμε μια τυχαία τιμή για την $f(1)$ (3 επιλογές), θα έχουμε αναγκαστικά 2 επιλογές για την $f(2)$, οπότε θα υπάρχουν $3 \cdot 2 = 6$ 1-1 συναρτήσεις. Καμία τέτοια συνάρτηση δεν είναι επί, καθώς η f έχει το πολύ 2 διαφορετικές τιμές, ενώ το πεδίο τιμών έχει τρεις (ή με πιο απλά λόγια, το B έχει περισσότερα στοιχεία από το A). Επομένως δεν υπάρχει και καμία αμφιμονοσήμαντη.

Δεν υπάρχουν αμφιμονοσήμαντες συναρτήσεις $g : B \to A$, καθώς η αντίστροφος μιας τέτοιας συνάρτησης θα ήταν μια αμφιμονοσήμαντη συνάρτηση από το A στο B, και όπως είδαμε πιο πριν δεν υπάρχουν τέτοιες συναρτήσεις. Επίσης, δεν υπάρχουν ούτε 1-1 συναρτήσεις, καθώς θα έπρεπε οι τιμές $g(a)$, $g(b)$ και $g(c)$ να είναι όλες διαφορετικές, πράγμα αδύνατον, καθώς οι δυνατές τιμές για την κάθε μια είναι μόνον δύο, οι 1 και 2. Υπάρχουν όμως επί συναρτήσεις· για να μην είναι μια συνάρτης επί, θα πρέπει αναγκαστικά να ισχύει $g(a) = g(b) = g(c)$. Αυτό γίνεται σε μόνο δύο περιπτώσεις, όταν όλες οι τιμές είναι ίσες με 1, ή όταν όλες οι τιμές είναι ίσες με 2. Επειδή όλες οι συναρτήσεις από το B στο A είναι 8, συμπεραίνουμε πως υπάρχουν 6 επί συναρτήσεις από το B στο A. □

Άσκηση 26. *Δίδεται η συνάρτηση* $f : \{a, b, c\} \to \{1, 2, 3, 4\}$ *όπως στο παρακάτω σχήμα. Βρείτε τα σύνολα*

(α′) $f(\{a, b\})$

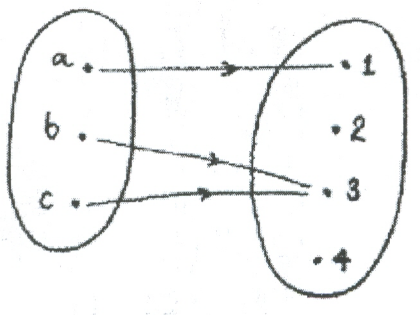
(β′) $f(\{b, c\})$

(γ′) $f^{-1}(\{1\})$

(δ′) $f^{-1}(\{2\})$

(ε′) $f^{-1}(\{3\})$

(στ′) $f^{-1}(\{1, 2\})$



Λύση. **(α΄)** Έχουμε $f(a) = 1$ και $f(b) = 3$, οπότε $f(\{a, b\}) = \{1, 3\}$.

(β΄) Εδώ έχουμε $f(b) = f(c) = 3$, οπότε $f(\{b, c\}) = \{3\}$.

(γ΄) Το 1 έχει ακριβώς μια αντίστροφη εικόνα, το a, οπότε $f^{-1}(\{1\}) = \{a\}$.

(δ΄) Κανένα στοιχείο του $\{a, b, c\}$ δεν απεικονίζεται στο 2, οπότε $f^{-1}(\{2\}) = \varnothing$.

(ε΄) Οι αντίστροφες εικόνες του 3 είναι ακριβώς τα b και c, οπότε $f^{-1}(\{3\}) = \{b, c\}$.

(στ΄) Από την άσκηση 21, έχουμε $f^{-1}(\{1, 2\}) = f^{-1}(\{1\} \cup \{2\}) = f^{-1}(\{1\}) \cup f^{-1}(\{2\}) = \{a\} \cup \varnothing = \{a\}$. □

Άσκηση 27. *Βρείτε το μεγαλύτερο υποσύνολο του $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ στο οποίο ορίζεται η συνάρτηση δύο μεταβλητών*

$$f(x, y) = \frac{x^2 + 3xy}{(x - 1)y}.$$

Λύση. Η κλασματική αυτή παράσταση δεν ορίζεται ακριβώς τότε όταν ο παρονομαστής είναι ίσος με μηδέν, δηλαδή όταν ισχύει $(x - 1)y = 0$, ή ισοδύναμα, $x = 1$ ή $y = 0$. Επομένως, αν εξαιρέσουμε τις ευθείες $x = 1$ και $y = 0$, παίρνουμε το ζητούμενο σύνολο. Αυτό μπορεί να περιγραφεί ως εξής:

$$\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} | x \neq 1 \text{ και } y \neq 0\}.$$ □

Άσκηση 28. *Βρείτε την ένωση και την τομή των παρακάτω οικογενειών συνόλων με σύνολο δεικτών A.*

(α΄) $A = \{1, 2, \ldots, n\}$ $\quad S_\alpha = [0, \alpha + 1]$.

(β΄) $A = \mathbb{N}$ $\quad S_n = (0, \frac{1}{n}) = \{x \in \mathbb{R} | 0 < x < \frac{1}{n}\}$.

Λύση. **(α′)** Για κάθε $\alpha \in A$ ισχύει $1 \leqslant \alpha \leqslant n$, οπότε έχουμε $[0,2] = S_1 \subseteq S_\alpha \subseteq S_n = [0, n+1]$, επομένως

$$\bigcup_{\alpha=1}^{n} S_\alpha = S_n = [0, n+1],$$

αφού όλα τα εν λόγω σύνολα είναι υποσύνολα του S_n, και

$$\bigcap_{\alpha=1}^{n} S_\alpha = S_1 = [0, 2],$$

αφού όλα τα εν λόγω σύνολα είναι υπερσύνολα του S_1.

(β′) Εδώ για κάθε $n \in A$ ισχύει $m \geqslant 1$ ή ισοδύναμα $\frac{1}{n} \leqslant 1$, οπότε θα έχουμε $S_n \subseteq S_1 = (0,1)$ για κάθε $n \in A$, επομένως

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} S_n = S_1 = (0,1).$$

Θα αποδείξουμε τώρα πως

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} S_n = \varnothing.$$

Αν δεν ίσχυε αυτή η ισότητα, τότε θα υπήρχε πραγματικός x, τέτοιος ώστε $x \in S_n$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, δηλαδή θα ίσχυε $0 < x < \frac{1}{n}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, ή ισοδύναμα, $n < \frac{1}{x}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, κάτι το οποίο θα σήμαινε πως το σύνολο των φυσικών αριθμών είναι άνω φραγμένο, που φυσικά δεν ισχύει (αν θέσουμε $n = [\frac{1}{x} + 1]$, όπου $[y]$ το ακέραιο μέρος του $y \in \mathbb{R}$, τότε θα είχαμε $n > \frac{1}{x}$). Άρα η τομή τους είναι κενή. □

Άσκηση 29. *Δίδεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, που ορίζεται ως $f(x) = (x+1)^2$.*

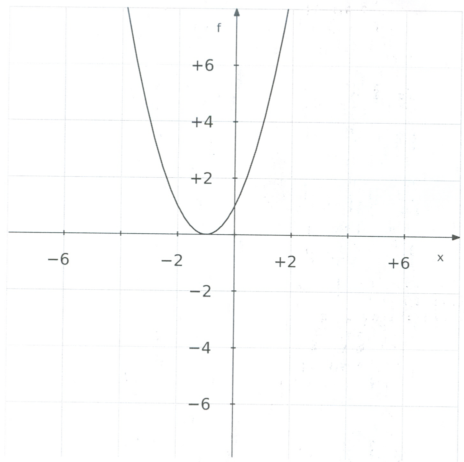
(α′) *Σχεδιάστε το γράφημα της f.*

(β′) *Προσδιορίστε τα σύνολα $B = f(\mathbb{R})$, $f^{-1}([-1,4])$, $f^{-1}(\{-2\})$, $f^{-1}([-2,0))$.*

(γ′) *Βρείτε δύο διαφορετικά δεξιά αντίστροφα της $f : \mathbb{R} \to B$.*

(δ′) *Βρείτε δύο υποσύνολα του $\mathbb{R}$, A_1 και A_2, τέτοια ώστε $A_1 \cup A_2 = \mathbb{R}$ και $f|_{A_i}$ για $i = 1, 2$ να είναι 1-1. Βρείτε σε κάθε περίπτωση ένα αριστερό αντίστροφο της $f|_{A_i} : A_i \to \mathbb{R}$.*

Λύση. **(α′)** Το γράφημα της f είναι η γνωστή παραβολή, που έχει κορυφή το σημείο $(-1, 0)$:



(β′) Για κάθε $y \geqslant 0$ ισχύει $y = [(\sqrt{y}-1)+1]^2 = f(\sqrt{y}-1)$, θα έχουμε $B = [0, +\infty)$. Υπενθυμίζουμε πως κανένας αρνητικός αριθμός δεν είναι τετράγωνο πραγματικού. Στην συνέχεια, θα χρησιμοποιήσουμε την ισοδυναμία $x \in f^{-1}(X) \Leftrightarrow f(x) \in X$:

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}([-1,4]) &\Leftrightarrow f(x) \in [-1,4] \\ &\Leftrightarrow -1 \leqslant (x+1)^2 \leqslant 4 \\ &\Leftrightarrow (x+1)^2 \leqslant 4 \\ &\Leftrightarrow |x+1| \leqslant 2 \\ &\Leftrightarrow -2 \leqslant x+1 \leqslant 2 \\ &\Leftrightarrow -3 \leqslant x \leqslant 1 \\ &\Leftrightarrow x \in [-3,1], \end{aligned}$$

άρα $f^{-1}([-1,4]) = [-3,1]$. Επίσης, $f^{-1}(\{-2\}) = \varnothing$, καθώς δεν υπάρχει πραγματικός του οποίου το τετράγωνο να είναι αρνητικός αριθμός. Για τον ίδιο λόγο, $f^{-1}([-2,0)) = \varnothing$.

(γ′) Είναι οι συναρτήσεις $g, h : B \to \mathbb{R}$, που ορίζονται ως εξής: $g(y) = \sqrt{y} - 1$ και $h(y) = -\sqrt{y} - 1$. Εύκολα διαπιστώνουμε πως οι συνθέσεις $f \circ g$ και $f \circ h$ είναι ίσες με την ταυτοτική συνάρτηση στο B.

(δ′) Ισχύει $f(x) = f(y)$ ακριβώς τότε όταν $x + 1 = \pm(y+1)$, ή ισοδύναμα όταν $x = y$ ή $x + y = -2$. Αν θεωρήσουμε τα σύνολα $A_1 = (-\infty, -1)$ και $A_2 = [-1, \infty)$, τότε για κάθε i, $i = 1, 2$, αν πάρουμε $x, y \in A_i$ και $x \neq y$, τότε θα ισχύει $x + y \neq 2$ ($x + y < -2$, αν $i = 1$, και $x + y > -2$, αν $i = 2$), ή $f(x) \neq f(y)$, οπότε ο περιορισμός της f στο A_i είναι 1-1, για $i = 1, 2$. Αν θέσουμε $g : \mathbb{R} \to A_1$ με $g(y) = -\sqrt{y} - 1$ και $h : \mathbb{R} \to A_2$ με $h(y) = \sqrt{y} - 1$, μπορούμε εύκολα να διαπιστώσουμε πως οι $g \circ f|_{A_1}$ και $h \circ f|_{A_2}$ είναι οι ταυτοτικές στα A_1 και A_2 αντίστοιχα. □

Άσκηση 30. *Έστω X ένα σύνολο και για κάθε $A \subseteq X$ ορίζουμε την χαρακτηριστική συνάρτηση του A ως εξής:*

$$\mathbf{1}_A = \begin{cases} 1, & \text{αν } x \in A, \\ 0, & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

Δείξτε ότι, αν A και B είναι οποιαδήποτε σύνολα του X, τότε ισχύουν τα εξής:

(α′) $A = B$ *αν και μόνο αν* $\mathbf{1}_A = \mathbf{1}_B$.

(β′) $\mathbf{1}_A \mathbf{1}_B = \mathbf{1}_{A\cap B}$.

(γ′) $\mathbf{1}_{A\cup B} = \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B - \mathbf{1}_A\mathbf{1}_B$.

Απόδειξη. **(α′)** Αν $A = B$, τότε προφανώς $\mathbf{1}_A = \mathbf{1}_B$. Αντίστροφα, έστω $\mathbf{1}_A = \mathbf{1}_B$. Χρησιμοποιώντας τις ισοδυναμίες $x \in Y \Leftrightarrow \mathbf{1}_Y(x) = 1$, προκύπτει

$$x \in A \Leftrightarrow \mathbf{1}_A(x) = 1 \Leftrightarrow \mathbf{1}_B(x) = 1 \Leftrightarrow x \in B,$$

που αποδεικνύει πως $A = B$.

(β′) Αν $x \in A\cap B$, τότε $x \in A$ και $x \in B$, οπότε $\mathbf{1}_{A\cap B}(x) = \mathbf{1}_A(x) = \mathbf{1}_B(x) = 1$, άρα

$$\mathbf{1}_A\mathbf{1}_B(x) = \mathbf{1}_{A\cap B}(x) = 1.$$

Αν $x \notin A \cap B$, τότε είτε $x \notin A$ είτε $x \notin B$, ή ισοδύναμα, είτε $\mathbf{1}_A(x) = 0$ είτε $\mathbf{1}_B(x) = 0$. Σε κάθε περίπτωση, θα έχουμε

$$\mathbf{1}_A\mathbf{1}_B(x) = \mathbf{1}_{A\cap B}(x) = 0,$$

άρα τελικά

$$\mathbf{1}_A\mathbf{1}_B = \mathbf{1}_{A\cap B}.$$

(γ′) Αν $x \notin A\cup B$, τότε $x \notin A$ και $x \notin B$, οπότε $\mathbf{1}_{A\cup B}(x) = \mathbf{1}_A(x) = \mathbf{1}_B(x) = 0$, επομένως

$$\mathbf{1}_{A\cup B}(x) = \mathbf{1}_A(x) + \mathbf{1}_B(x) - \mathbf{1}_A(x)\mathbf{1}_B(x) = 0.$$

Έστω τω'ρα πως $x \in A\cup B$. Χωρίς περιορισμό της γενικότητας, υποθέτουμε πως $x \in A$. Τότε

$$\begin{aligned} \mathbf{1}_A(x) + \mathbf{1}_B(x) - \mathbf{1}_A(x)\mathbf{1}_B(x) &= 1 + \mathbf{1}_B(x)(1 - \mathbf{1}_A(x)) \\ &= 1 = \mathbf{1}_{A\cup B}(x), \end{aligned}$$

άρα σε κάθε περίπτωση

$$\mathbf{1}_{A\cup B} = \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B - \mathbf{1}_A\mathbf{1}_B.$$

□

Άσκηση 31. *Για δύο σύνολα X, Y ορίζουμε την συνάρτηση προβολής $P_X : X \times Y \to X \times Y$ θέτοντας $P_X(x, y) = (x, 0)$ και την $P_Y : X \times Y \to X \times Y$ θέτοντας $P_Y(x, y) = (0, y)$. Δείξτε ότι*

(α′) $P_X \circ P_X = P_X$,

(β′) $P_Y \circ P_Y = P_Y$,

(γ′) $P_X \circ P_Y = P_Y \circ P_x = \mathbf{0}$, *όπου με* $\mathbf{0}$ *συμβολίζουμε την συνάρτηση που απεικονίζει οποιοδήποτε* $(x, y) \in X \times Y$ *στο* $(0, 0)$.

Απόδειξη. **(α′)** Για κάθε $(x, y) \in X \times Y$ ισχύει

$$P_X \circ P_X(x, y) = P_X(P_X(x, y)) = P_X(x, 0) = (x, 0) = P_X(x, y),$$

οπότε έχουμε $P_X \circ P_X = P_X$.

(β′) Η απόδειξη είναι όπως ακριβώς στο **(α′)**.

(γ′) Για κάθε $(x, y) \in X \times Y$ ισχύει

$$P_X \circ P_Y(x, y) = P_X(P_Y(x, y)) = P_X(0, y) = (0, 0)$$

και

$$P_Y \circ P_X(x, y) = P_Y(P_X(x, y)) = P_Y(x, 0) = (0, 0),$$

αποδεικνύοντας το ζητούμενο. □