Λύσεις Ασκήσεων στην Θεωρία Αριθμών
I

Ρωμανός-Διογένης Μαλικιώσης

Δευτέρα, 18 Οκτωβρίου 2010

Άσκηση 1. *Έστω $a, b \in \mathbb{Z}$ και $n \in \mathbb{N}$. Να δειχθεί ότι $a - b | a^n - b^n$, και αν ο n είναι περιττός, τότε και $a + b | a^n + b^n$.*

Απόδειξη. Ως γνωστόν ισχύουν οι ταυτότητες

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

και όταν ο n είναι περιττός

$$a^n + b^n = (a + b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + \cdots - ab^{n-2} + b^{n-1}),$$

απ'τις οποίες προκύπτει το ζητούμενο, εφόσον όλες οι εν λόγω παραστάσεις είναι ακέραιοι αριθμοί. □

Άσκηση 2. *Να βρεθούν όλοι οι ακέραιοι a για τους οποίους ισχύει $a - 3 | a^3 - 3$.*

Λύση. Από την προηγούμενη άσκηση, ισχύει $a - 3 | a^3 - 27$, θέτοντας $b = n = 3$. Οπότε ισχύει $a - 3 | a^3 - 3$ αν και μόνο αν $a - 3 | 24$, εφόσον $24 = a^3 - 3 - (a^3 - 27)$. Άρα λοιπόν οι ακέραιοι που ικανοποιούν την δοθείσα είναι ακριβώς αυτοί οι ακέραιοι για τους οποίους ο $a - 3$ είναι διαιρέτης του 24, δηλαδή

$$a - 3 \in \{-24, -12, -8, -6, -4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$$

ή ισοδύναμα

$$a \in \{-21, -9, -5, -3, -1, 0, 1, 2, 4, 5, 6, 7, 9, 11, 15, 27\}.$$ □

Άσκηση 3. *Να δειχθεί ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει $7 | A_n$, όπου $A_n = 2^{n+2} + 3^{2n+1}$.*

Απόδειξη. Θα δειχθεί επαγωγικά ως προς n. Για $n = 0$ έχουμε $A_0 = 7$, οπότε $7|A_0$. Έστω ότι ισχύει για $n = k$, δηλαδή $7|A_k$. Θα αποδείξουμε ότι $7|A_{k+1}$. Προς τούτο, αρκεί να δειχθεί ότι $7|A_{k+1} - A_k$. Ισχύει

$$\begin{aligned} A_{k+1} - A_k &= 2^{k+3} + 3^{2k+3} - 2^{k+2} - 3^{2k+1} = 2^{k+2} + (3^2 - 1)3^{2k+1} \\ &= 2^{k+2} + 8 \cdot 3^{2k+1} = A_k + 7 \cdot 3^{2k+1} \end{aligned}$$

το οποίο είναι πολλαπλάσιο του 7 από την επαγωγική υπόθεση ($7|A_k$), αποδεικνύοντας το ζητούμενο. □

Άσκηση 4. *Να δειχθεί ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει $16|B_n$, όπου $B_n = 3^{4n+1} - 2 \cdot 3^{2n} - 1$.*

Απόδειξη. Θα δειχθεί επαγωγικά ως προς n. Για $n = 0$ έχουμε $B_0 = 0$, οπότε $16|B_0$. Έστω ότι ισχύει για $n = k$, δηλαδή $16|B_k$. Προκειμένου να δείξουμε ότι $16|B_{k+1}$, θα αποδείξουμε ισοδύναμα πως $16|B_{k+1} - B_k$. Έχουμε

$$\begin{aligned} B_{k+1} - B_k &= 3^{4k+5} - 2 \cdot 3^{2k+2} - 1 - (3^{4k+1} - 2 \cdot 3^{2k} - 1) \\ &= (3^4 - 1)3^{4k+1} - 2(3^2 - 1)3^{2k} \\ &= 80 \cdot 3^{4k+1} - 16 \cdot 3^{2k} = 16(5 \cdot 3^{4k+1} - 3^{2k}), \end{aligned}$$

αποδεικνύοντας το ζητούμενο. □

Άσκηση 5. *Να δειχθεί ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει $9|C_n$, όπου $C_n = 2^{4n+1} - 2^{2n} - 1$.*

Απόδειξη. Όπως και οι δύο προηγούμενες ασκήσεις, θα δειχθεί επαγωγικά ως προς n. Για $n = 0$ έχουμε $C_0 = 0$, οπότε $9|C_0$. Έστω ότι ισχύει για $n = k$, δηλαδή $9|C_k$. Θα δείξουμε ότι $9|C_{k+1}$, ή ισοδύναμα ότι $9|C_{k+1} - C_k$. Ισχύει

$$\begin{aligned} C_{k+1} - C_k &= 2^{4k+5} - 2^{2k+2} - 1 - (2^{4k+1} - 2^{2k} - 1) \\ &= (2^4 - 1)2^{4k+1} - (2^2 - 1)2^{2k} \\ &= 15 \cdot 2^{4k+1} - 3 \cdot 2^{2k} \\ &= 18 \cdot 2^{4k+1} - 3(2^{4k+1} + 2^{2k}), \end{aligned}$$

οπότε αρκεί να δείξουμε ότι $3|2^{4k+1} + 2^{2k}$, για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Αυτό μπορεί να αποδειχθεί είτε με δεύτερη επαγωγή επί του k, ή να παρατηρήσουμε ότι

$$2^{4k+1} + 2^{2k} = 2^{2k}(2^{2k+1} + 1),$$

και $3|2^{2k+1} + 1$ από την πρώτη άσκηση. □

Άσκηση 6. *Να δειχθεί ότι για κάθε* $n \in \mathbb{Z}$ *ισχύει* $6|n(n^2+5)$.

Απόδειξη. Θεωρούμε την Ευκλείδεια Διαίρεση του n με το 6, έστω $n = 6q + r$, όπου $q, r \in \mathbb{Z}$, $0 \leqslant r < 6$. Τότε

$$\begin{aligned}
n(n^2+5) &= (6q+r)[(6q+r)^2+5] \\
&= 6q[(6q+r)^2+5] + r[(6q+r)^2+5] \\
&= 6q[(6q+r)^2+5] + r(36q^2+12qr+r^2+5) \\
&= 6q[(6q+r)^2+5] + 6r(6q^2+2qr) + r(r^2+5),
\end{aligned}$$

οπότε αρκεί να δειχθεί ότι $6|r(r^2+5)$, για κάθε πιθανή τιμή του r. Αυτό όμως είναι εύκολο να ελεγχθεί, καθώς $0 \leqslant r < 6$:

$$\begin{aligned}
0(0^2+5) &= 0 = 6 \cdot 0 \\
1(1^2+5) &= 6 = 6 \cdot 1 \\
2(2^2+5) &= 18 = 6 \cdot 3 \\
3(3^2+5) &= 42 = 6 \cdot 7 \\
4(4^2+5) &= 84 = 6 \cdot 14 \\
5(5^2+5) &= 150 = 6 \cdot 25,
\end{aligned}$$

ολοκληρώνοντας την απόδειξη. □

Άσκηση 7. *Έστω* $n \in \mathbb{N}$, $n > 0$, *τέτοιος ώστε ο αριθμός* 2^n+1 *να είναι πρώτος. Να δειχθεί ότι ο* n *είναι δύναμη του* 2. *(*Οι πρώτοι αυτής της μορφής είναι οι πρώτοι του Fermat*)*

Απόδειξη. Ισοδύναμα, αρκεί να δείξουμε πως ο n δεν έχει περιττό πρώτο διαιρέτη· μια δύναμη του 2 δεν έχει περιττούς διαιρέτες, και αντίστροφα, αν ένας ακέραιος μεγαλύτερος του 1 δεν έχει περιττούς πρώτους διαιρέτες, τότε στην πρωτογενή του ανάλυση δεν εμφανίζονται άλλοι πρώτοι, εκτός του 2, επομένως είναι δύναμη του 2 (επίσης, για $n = 1 = 2^0$, ο δοθείς αριθμός είναι πρώτος).

Ας υποθέσουμε, λοιπόν, πως ο n έχει έναν περιττό πρώτο διαιρέτη, έστω p, και θα καταλήξουμε σε άτοπο. Αν $p|n$, υπάρχει ακέραιος m, τέτοιος ώστε $n = pm$. Αφού ο p είναι περιττός, τότε ο

$$2^n + 1 = (2^m)^p + 1^p,$$

είναι διαιρετός από τον 2^m+1. Αυτός είναι γνήσιος διαιρέτης του 2^n+1, καθώς $1 < 2^m+1$ και $2^m+1 < 2^n+1$, εφόσον $m < n$ (αφού $p > 1$). Άρα ο n δεν έχει περιττούς πρώτους διαιρέτες, αποδεικνύοντας το ζητούμενο. □

Άσκηση 8. *Να δειχθεί πως για κάθε τιμή του ακεραίου n, το κλάσμα*

$$\frac{3n+5}{8n+13}$$

είναι ανάγωγο.

Απόδειξη. Ισοδύναμα, θα δείξουμε πως ο μέγιστος κοινός διαιρέτης του αριθμητή και του παρονομαστή είναι η μονάδα. Θα χρησιμοποιήσουμε επανειλημμένα την ταυτότητα $(a,b)=(a-kb,b)$, $a,b,k\in\mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned}(8n+13,3n+5) &= (8n+13-2(2n+5),3n+5)\\ &= (2n+3,3n+5)=(2n+3,3n+5-(2n+3))\\ &= (2n+3,n+2)=(2n+3-2(n+2),n+2)\\ &= (-1,n+2)=1.\end{aligned}$$

□

Άσκηση 9. *Έστω F_n η ακολουθία Fibonacci, που ορίζεται αναδρομικά, $F_0 = F_1 = 1$, $F_{n+1}=F_n+F_{n-1}$, για κάθε θετικό ακέραιο n. Να δειχθεί ότι*

$$(F_n,F_{n+1})$$

για κάθε $n\in\mathbb{N}$.

Απόδειξη. Θα αποδειχθεί επαγωγικά ως προς n. Για $n=0$ ισχύει, καθώς $(F_0,F_1) = (1,1)=1$. Έστω ότι ισχύει για $n=k$· θα αποδειχθεί τότε για $n=k+1$. Έχουμε

$$\begin{aligned}(F_{k+1},F_{k+2}) &= (F_{k+1},F_{k+2}-F_{k+1})\\ &= (F_{k+1},F_k)=1,\end{aligned}$$

όπου στην τελευταία σειρά χρησιμοποιήσαμε την επαγωγική υπόθεση. □

Άσκηση 10. *Έστω a,b,c περιττοί αριθμοί. Να δειχθεί ότι*

$$(a,b,c)=\left(\frac{a+b}{2},\frac{b+c}{2},\frac{c+a}{2}\right).$$

Απόδειξη. Θέτουμε $d=(a,b,c)$ και

$$\delta=\left(\frac{a+b}{2},\frac{b+c}{2},\frac{c+a}{2}\right).$$

Θα δείξουμε ότι $d|\delta$ και $\delta|d$, οπότε αφού και οι δύο είναι θετικοί, θα έχουμε $d=\delta$.

$\boxed{d|\delta}$ Γνωρίζουμε πως $d|a$, $d|b$ και $d|c$. Άρα, θα διαιρεί και τα αθροίσματά τους ανά δύο, δηλαδή $d|a+b$, $d|b+c$ και $d|c+a$. Τα αθροίσματα αυτά είναι άρτιοι, ως αθροίσματα δύο περιττών. Ο d είναι περιττός, εφόσον διαιρεί περιττούς αριθμούς, δηλαδή $(d,2)=1$, οπότε

$$d|2\cdot\frac{a+b}{2} \text{ και } (d,2)=1 \Rightarrow d|\frac{a+b}{2},$$

και ομοίως

$$d|\frac{b+c}{2}, \quad d|\frac{c+a}{2},$$

άρα και $d|\delta$, εφόσον όλοι οι κοινοί διαιρέτες κάποιων ακεραίων διαιρούν και τον μέγιστο κοινό διαιρέτη (Πόρισμα 3.1 στο βιβλίο, δεύτερο κεφάλαιο).

$\boxed{\delta|d}$ Ο δ είναι κοινός διαιρέτης των $\frac{a+b}{2}$, $\frac{b+c}{2}$ και $\frac{c+a}{2}$, άρα θα διαιρεί και κάθε ακέραιο γραμμικό συνδυασμό τους. Οι παρακάτω ισότητες, μας δείχνουν πως μπορούμε να εκφράσουμε τους a, b, c ως γραμμικούς συνδυασμούς αυτών των αριθμών:

$$\begin{aligned} a &= \frac{a+b}{2}-\frac{b+c}{2}+\frac{c+a}{2} \\ b &= \frac{a+b}{2}+\frac{b+c}{2}-\frac{c+a}{2} \\ c &= -\frac{a+b}{2}+\frac{b+c}{2}+\frac{c+a}{2} \end{aligned}$$

επομένως ο δ είναι κοινός διαιρέτης των a, b, c, ολοκληρώνοντας την απόδειξη. □

Άσκηση 11. *Έστω $p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$ η ακολουθία όλων των πρώτων αριθμών σε αύξουσα μορφή, δηλαδή $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$, κ. ο. κ. Να δειχθεί ότι για κάθε ακέραιο $n \geqslant 2$ ισχύει*

$$p_n \leqslant p_1p_2\cdots p_{n-1}+1.$$

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε πως κάτι τέτοιο δεν ισχύει, δηλαδή υπάρχει $n \geqslant 2$, τέτοιος ώστε

$$p_n > p_1p_2\cdots p_{n-1}+1.$$

Θέτουμε $N = p_1p_2\cdots p_{n-1}+1$. Ο ακέραιος $N-1 = p_1p_2\cdots p_{n-1}$ είναι κοινό πολλαπλάσιο των $p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}$ επομένως ο N δεν διαιρείται από κανέναν από αυτούς. Απ'την άλλη, ο N δεν διαιρείται ούτε από τους $p_n, p_{n+1}, \ldots$, εφόσον είναι μικρότερός τους κατάπόλυτη τιμή (θυμίζουμε πως ισχύει $N < p_n$). Καταλήξαμε στο γεγονός πως ο ακέραιος N δεν διαιρείται από κανέναν πρώτο αριθμό, άτοπο, εφόσον $N \geqslant p_1+1 = 3$. Άρα ισχύει

$$p_n \leqslant p_1p_2\cdots p_{n-1}+1.$$ □

Άσκηση 12. *Με τον ίδιο συμβολισμό όπως στην παραπάνω άσκηση, να δειχθεί*

$$p_n \leqslant 2^{2^{n-1}},$$

για κάθε θετικό ακέραιο n.

Απόδειξη. Επαγωγικά ως προς n. Για $n = 1$ έχουμε $p_1 = 2$ και $2^{2^0} = 2$, οπότε η δοθείσα ανισότητα ισχύει. Έστω ότι ισχύει για $n \leqslant k$ (ισχυρή επαγωγή)· θα αποδειχθεί και για $n = k + 1$. Χρησιμοποιώντας την παραπάνω άσκηση και την υπόθεση της επαγωγης προκύπτει

$$\begin{aligned} p_{k+1} &\leqslant p_1 p_2 \cdots p_k + 1 \\ &\leqslant 2^{2^0} \cdot 2^{2^1} \cdots 2^{2^{k-1}} + 1 \\ &= 2^{2^0+2^1+\cdots+2^{k-1}} + 1 \\ &= 2^{2^k-1} + 1 \\ &\leqslant 2^{2^k}, \end{aligned}$$

ολοκληρώνοντας την απόδειξη. □

Άσκηση 13. *Να δειχθεί ότι κάθε πρώτος $p > 3$ είναι της μορφής $6k \pm 1$, όπου $k \in \mathbb{Z}$.*

Απόδειξη. Με άλλα λόγια, αρκεί να δειχθεί ότι κάθε τέτοιος πρώτος αφήνει υπόλοιπο 1 ή 5 όταν διαιρεθεί με το 6. Έστω λοιπόν πως $p = 6q + r$, όπου $q, r \in \mathbb{Z}$, $0 \leqslant r < 6$. Αν $r = 0, 2$ ή 4, τότε ο p είναι άρτιος, το οποίο είναι άτοπο, εφόσον ο μοναδικός άρτιος πρώτος είναι ο 2, και έχουμε $p > 3$. Αν $r = 3$, τότε $3|p$, το οποίο είναι επίσης άτοπο, αφού $p > 3$. Επομένως, οι μόνες επιτρεπτές τιμές του r είναι οι 1 και 5, και τελειώνουμε την απόδειξη παρατηρώντας πως $6q+5 = 6(q+1)-1$. □

Άσκηση 14. *Να δειχθεί πως αν οι ακέραιοι p και $8p - 1$ είναι πρώτοι, τότε ο $8p + 1$ είναι σύνθετος.*

Απόδειξη. Για $p \leqslant 3$ η συνθήκη του προβλήματος ισχύει μόνο για $p = 3$ (για $p = 2$, ο $8p - 1 = 15$ είναι σύνθετος), και σ'αυτήν την περίπτωση έχουμε $8p + 1 = 25$, που είναι σύνθετος.

Αν $p > 3$, τότε υπάρχει ακέραιος k με $p = 6k \pm 1$, σύμφωνα με την προγούμενη άσκηση. Η συνθήκη δεν ισχύει όταν $p = 6k - 1$, καθώς τότε έχουμε $8p - 1 = 48k - 9 = 3(16k - 3)$ και $8p - 1 > 23$, δηλαδή ο $8p - 1$ είναι σύνθετος. Άρα, αν οι p, $8p - 1$ είναι πρώτοι με $p > 3$, τότε αναγκαστικά έχουμε $p = 6k + 1$ για κάποιον $k \in \mathbb{Z}$. Όμως τότε, $8p + 1 = 48k + 9 = 3(16k + 3)$ και $8p + 1 > 25$, οπότε ο $8p + 1$ είναι σύνθετος. □

Άσκηση 15. *Έστω* $\alpha, \mu \in \mathbb{N}$*, με* $\alpha, \mu > 1$*. Να δειχθεί ότι*

$$(\alpha-1, \mu) = \left(\frac{\alpha^\mu - 1}{\alpha - 1}, \mu\right).$$

Απόδειξη. Από την πρώτη άσκηση γνωρίζουμε πως $\alpha - 1|\alpha^k - 1$, για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Επομένως υπάρχει $Q \in \mathbb{Z}$, τέτοιος ώστε

$$(\alpha^{\mu-1} - 1) + (\alpha^{\mu-2} - 1) + \cdots + (\alpha - 1) + (1 - 1) = (\alpha - 1)Q,$$

οπότε

$$\begin{aligned} \frac{\alpha^\mu - 1}{\alpha - 1} &= \alpha^{\mu-1} + \alpha^{\mu-2} + \cdots + \alpha + 1 \\ &= (\alpha - 1)Q + \mu, \end{aligned}$$

επομένως

$$\begin{aligned} \left(\frac{\alpha^\mu - 1}{\alpha - 1}, \mu\right) &= ((\alpha - 1)Q + \mu, \alpha - 1) \\ &= ((\alpha - 1)Q + \mu - (\alpha - 1)Q, \alpha - 1) \\ &= (\mu, \alpha - 1). \end{aligned}$$

□

Άσκηση 16. *Να δειχθεί ότι* $30|n^5 - n$ *για κάθε* $n \in \mathbb{Z}$*.*

Απόδειξη. Παραγοντοποιούμε την παράσταση:

$$n^5 - n = n(n^4 - 1) = n(n^2 - 1)(n^2 + 1) = n(n - 1)(n + 1)(n^2 + 1).$$

Εφόσον $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$, τότε αρκεί να δείξουμε πως οι 2, 3, 5 διαιρούν ξεχωριστά την παράσταση αυτή, αφού είναι πρώτοι μεταξύ τους ανά δύο. Ισχύει $2|n^5 - n$, εφόσον ένας από τους n, $n - 1$ είναι άρτιος (και οι δύο είναι παράγοντες της παράστασης). Επίσης, $3|n^5 - n$, εφόσον ακριβώς ένας από τους $n - 1$, n, $n + 1$, που είναι παράγοντες της παράστασης, είναι πολλαπλάσιο του 3.

Τέλος, θα αποδείξουμε πως τουλάχιστον ένας από αυτούς τους παράγοντες είναι πολλπλάσιο του 5. Θεωρούμε την Ευκλείδεια διαίρεση του n με τον 5, δηλαδή $n = 5q + r$, $0 \leqslant r < 5$. Αν $r = 1, 0$ ή 4, τότε έχουμε αντίστοιχα $5|n - 1$, $5|n$, $5|n + 1$. Αν $r = 2$, τότε

$$n^2 + 1 = (5q + 2)^2 + 1 = 25q^2 + 20q + 5 = 5(5q^2 + 4q + 1),$$

δηλαδή $5|n^2 + 1$, και τέλος, αν $r = 3$, τότε

$$n^2 + 1 = (5q + 3)^2 + 1 = 25q^2 + 30q + 10 = 5(5q^2 + 6q + 2),$$

δηλαδή και πάλι $5|n^2 + 1$. Άρα σε κάθε περίπτωση, $5|n^5 - n$, και τελικά $30|n^5 - n$. □

Άσκηση 17. *Αν* $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Z}$, *να δειχθεί ότι*

$$([\alpha, \beta], [\beta, \gamma], [\gamma, \alpha]) = [(\alpha, \beta), (\beta, \gamma), (\gamma, \alpha)].$$

Απόδειξη. Έστω $p_1, p_2, \ldots, p_n$ όλοι οι πρώτοι που διαιρούν τουλάχιστον έναν από τους α, β, γ. Τότε σύμφωνα με το Θεμελιώδες Θεώρημα της Αριθμητικής, υπάρχουν μοναδικοί φυσικοί a_i, b_i, c_i, με $1 \leqslant i \leqslant n$, τέτοιοι ώστε

$$\begin{aligned} \alpha &= p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_n^{a_n} \\ \beta &= p_1^{b_1} p_2^{b_2} \cdots p_n^{b_n} \\ \gamma &= p_1^{c_1} p_2^{c_2} \cdots p_n^{c_n}. \end{aligned}$$

Άρα έχουμε

$$\begin{aligned} (\alpha, \beta) &= p_1^{\min(a_1, b_1)} p_2^{\min(a_2, b_2)} \cdots p_n^{\min(a_n, b_n)} \\ (\beta, \gamma) &= p_1^{\min(b_1, c_1)} p_2^{\min(b_2, c_2)} \cdots p_n^{\min(b_n, c_n)} \\ (\gamma, \alpha) &= p_1^{\min(c_1, a_1)} p_2^{\min(c_2, a_2)} \cdots p_n^{\min(c_n, a_n)} \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} [\alpha, \beta] &= p_1^{\max(a_1, b_1)} p_2^{\max(a_2, b_2)} \cdots p_n^{\max(a_n, b_n)} \\ [\beta, \gamma] &= p_1^{\max(b_1, c_1)} p_2^{\max(b_2, c_2)} \cdots p_n^{\max(b_n, c_n)} \\ [\gamma, \alpha] &= p_1^{\max(c_1, a_1)} p_2^{\max(c_2, a_2)} \cdots p_n^{\max(c_n, a_n)} \end{aligned}$$

από τις Προτάσεις 8.1 και 8.3, στο δεύτερο κεφάλαιο του βιβλίου. Αυτό μας δείχνει πως στις πρωτογενείς αναλύσεις των $([\alpha, \beta], [\beta, \gamma], [\gamma, \alpha])$ και $[(\alpha, \beta), (\beta, \gamma), (\gamma, \alpha)]$ εμφανίζονται μόνον οι πρώτοι $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Αρκεί να δείξουμε πως ο εκθέτης κάθε τέτοιου πρώτου, έστω p_i, είναι ο ίδιος και στις δύο αυτές αναλύσεις. Εφαρμόζοντας ξανά τις Προτάσεις 8.1 και 8.3, οι εκθέτες αυτοί θα είναι αντίστοιχα

$$\max(\min(a_i, b_i), \min(b_i, c_i), \min(c_i, a_i))$$

και

$$\min(\max(a_i, b_i), \max(b_i, c_i), \max(c_i, a_i)).$$

Λόγω συμμετρίας των a_i, b_i, c_i σ'αυτούς τους εκθέτες, μπορούμε να υποθέσουμε $a_i \leqslant b_i \leqslant c_i$, χωρίς περιορσμό της γενικότητας. Οπότε

$$\begin{aligned} \max(\min(a_i, b_i), \min(b_i, c_i), \min(c_i, a_i)) &= \max(a_i, b_i, a_i) \\ &= b_i \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} \min(\max(a_i, b_i), \max(b_i, c_i), \max(c_i, a_i)) &= \min(b_i, c_i, c_i) \\ &= b_i, \end{aligned}$$

ολοκληρώνοντας την απόδειξη. □