ΜΕΡΙΚΕΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

3 Ιουνίου 2015

Διδάσκων: Αχιλλέας Τερτίκας
Γραφείο: Ε306
Ακ. περίοδος: Ε.Ε. 2014-2015
Προσωπική ιστοσελίδα: http://www.math.uoc.gr/~tertikas
Καταγραφή Σημειώσεων : Γαλανάκης Αλέξανδρος

12.2.2015

(Γραμμική θεωρία στις) Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις

Στο μάθημά μας οι άγνωστοι που θα έχουμε θα είναι πάντα συναρτήσεις. Αν έχουμε την εξίσωση:

$$F\left(t, f(t), f'(t), \ldots, f^{(k)}(t)\right) = 0,$$

τότε μιλάμε για συνήθη διαφορική εξίσωση. ένα παράδειγμα είναι η εξίσωση του Νεύτωνα:

$$\vec{F} = m\vec{\gamma},$$

ή γραμμένη ως διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης:

$$\vec{F}(t) = m\vec{x''}(t).$$

όταν έχουμε συνήθεις διαφορικές εξισώσεις τότε μιλάμε για φυσική υλικού σημείου.

Μερικές παράγωγοι: έστω συνάρτηση $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ με $z = f(x, y)$. Τότε ορίζουμε τη μερική παράγωγο ως προς τη μεταβλητή x να είναι το όριο:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h}$$

και τη συμβολίζουμε με $\frac{\partial}{\partial x} f(x, y)$ ή $f_x(x, y)$. όμοια ορίζουμε:

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x, y+h) - f(x, y)}{h}$$

Παράγωγος ως προς κάποια κατεύθυνση: Θεωρώ τυχαίο μοναδιαίο διάνυσμα $\vec{\nu} = k\vec{i} + l\vec{j}$

στον $\mathbf{R}^2$ και $\vec{X} = (x, y)$. Τότε ορίζουμε την παράγωγο της συνάρτησης f στην κατεύθυνση του $\vec{\nu}$ να είναι το όριο:

$$\lim_{t \to 0} \frac{f\left(\vec{X} + t\vec{\nu}\right) - f(\vec{X})}{t} = \frac{\partial f}{\partial \vec{\nu}}(\vec{X}).$$

Μάλιστα όταν η f είναι παραγωγίσιμη στο $\vec{X}$ τότε υπάρχει το όριο αυτό για κάθε κατεύθυνση $\vec{\nu}$, και ισχύει:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{\nu}}(\vec{X}) = \nabla f(\vec{X}) \cdot \vec{\nu},$$

όπου $\nabla f(\vec{X}) = (f_x(x, y), f_y(x, y))$, ο πολλαπλασιασμός δηλώνει ουσιαστικά το εσωτερικό γινόμενο. Σημείωση, η f είναι παραγωγίσιμη στο $\vec{X}$ όταν υπάρχουν οι μερικές παράγωγοι f_x και f_y και όταν υπάρχει το όριο:

$$\lim_{\vec{X} \to \vec{Y}} \frac{f(\vec{X}) - f(\vec{Y}) - \nabla f(\vec{X})(\vec{X} - \vec{Y})}{\|\vec{X} - \vec{Y}\|}$$

και είναι ίσο με 0.

Αρχική συνάρτησης: Πως βρίσκω την αρχική μίας συνάρτησης όταν γνωρίζω τις παραγώγους της· Στην περίπτωση των συναρτήσεων, χρησιμοποιούμε τα θεμελιώδη θεωρήματα του απειροστικού λογισμού:

- **1^o Θ.Θ.Α.Λ.:** Αν $g \in \Re[a, b]$ και φραγμένη, τότε ορίζω τη συνάρτηση:

  $$G(x) = \int_a^x g(\xi) d\xi.$$

  Τότε:

  1. η G είναι Lipschitz συνεχής (άρα και συνεχής και ομοιόμορφα συνεχής), δηλαδή:

     $$|G(x) - G(y)| \le L|x - y| \ , \forall x, y \in [a, b].$$

  2. Αν g είναι συνεχής στο σημείο $x_0 \in [a, b]$ τότε η G είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και μάλιστα $G'(x_0) = g(x_0)$.

- **2^o Θ.Θ.Α.Λ.:** Αν $f \in \mathbf{D}([a, b])$ και η f' είναι Riemann ολοκληρώσιμη, τότε:

  $$f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^x f'(s) ds.$$

Συναρτήσεις πολλών μεταβλητών

Πρόβλημα 1. (Θεμελιώδες) Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ παραγωγίσιμη ως προς x και συνεχής, η οποία έχει την ιδιότητα:

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = 0.$$

Περιγράψτε την f.

Λύση.
Θα αποδείξουμε ότι η $f(x,y) = f(0,y)$[1] για κάθε $x, y \in \mathbf{R}$. Σταθεροποιούμε τη δεύτερη μεταβλητή και βλέπουμε την f ως συνάρτηση μόνο της πρώτης μεταβλητής. Τότε εφαρμόζω το Θ.Μ.Τ. στο διάστημα που δημιουργούν τα x και 0[2]. Τότε υπάρχει $\xi (= \xi(x))$ τέτοιο ώστε:

$$f(x,y) - f(0,y) = (x - 0) \cdot \frac{\partial}{\partial x} f(x,y)\Big|_{x=\xi} = 0 \Rightarrow f(x,y) = f(0,y),$$

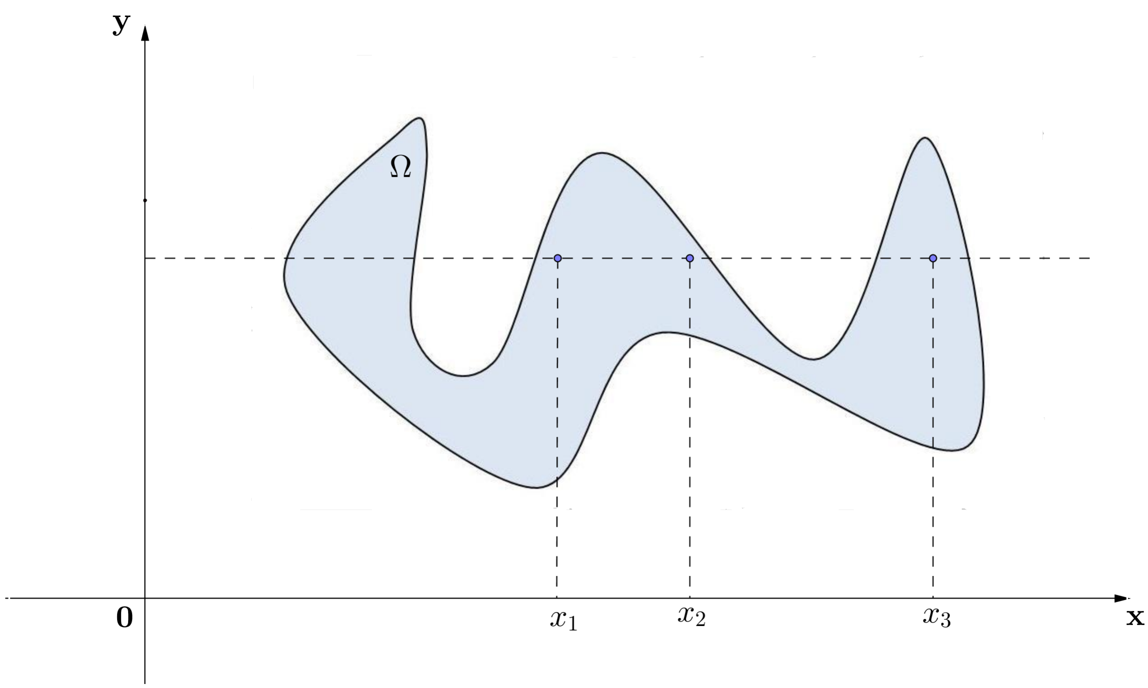
για κάθε $x, y \in \mathbf{R}$.

Πρόβλημα 2. Έστω $\Omega \subseteq \mathbf{R}^2$ ανοιχτό συνεκτικό[3] σύνολο. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : \Omega \to \mathbf{R}$, η οποία είναι παραγωγίσιμη ως προς x στο Ω, συνεχής στο $\bar{\Omega}$, όπου με $\bar{\Omega}$ συμβολίζουμε την κλειστότητα του Ω και έχει την ιδιότητα:

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = 0.$$

Περιγράψτε την f.

Λύση.
Εδω το Θ.Μ.Τ δεν δουλευει διότι το Ω μπορεί να έχει την μορφή του παρακάτω σχήματος:



Σε αυτή την περίπτωση ισχύει ότι $f(x_1) = f(x_2)$ από το Θ.Μ.Τ, αλλά για το $f(x_3)$ δεν έχουμε πληροφορία (τα x_1, x_2 και x_3 είναι τα σημεία του σχήματος).

[1]Η συνάρτηση f που προκύπτει είναι συνάρτηση μόνο της μεταβλητής y, δηλαδή είναι ανεξάρτητη από την επιλογή του x, άρα μπορούμε να επιλέξουμε το x να είναι 0.

[2]Αν $x > 0$ τότε θεωρούμε το διάστημα $[0, x]$, ενώ άν $x < 0$ θεωρούμε το $[x, 0]$. Και στις δύο περιπτώσεις η εξίσωση που προκύπτει από την εφαρμογή του Θ.Μ.Τ. είναι η ίδια.

[3]Συνεκτικό σύνολο ονομάζεται το σύνολο, το οποίο δεν μπορεί να γραφτεί ως ξένη ένωση δύο ανοιχτών συνόλων. Με άλλα λόγια, είναι ένα ενναίο κομμάτι.

Πρόβλημα 3. Έστω $\Omega \subseteq \mathbf{R}^2$ ανοιχτό συνεκτικό σύνολο. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : \Omega \to \mathbf{R}$, η οποία είναι παραγωγίσιμη ως προς x και ώς προς y στο Ω, συνεχής στο $\bar{\Omega}$ και γι` αυτήν ισχύει ότι:

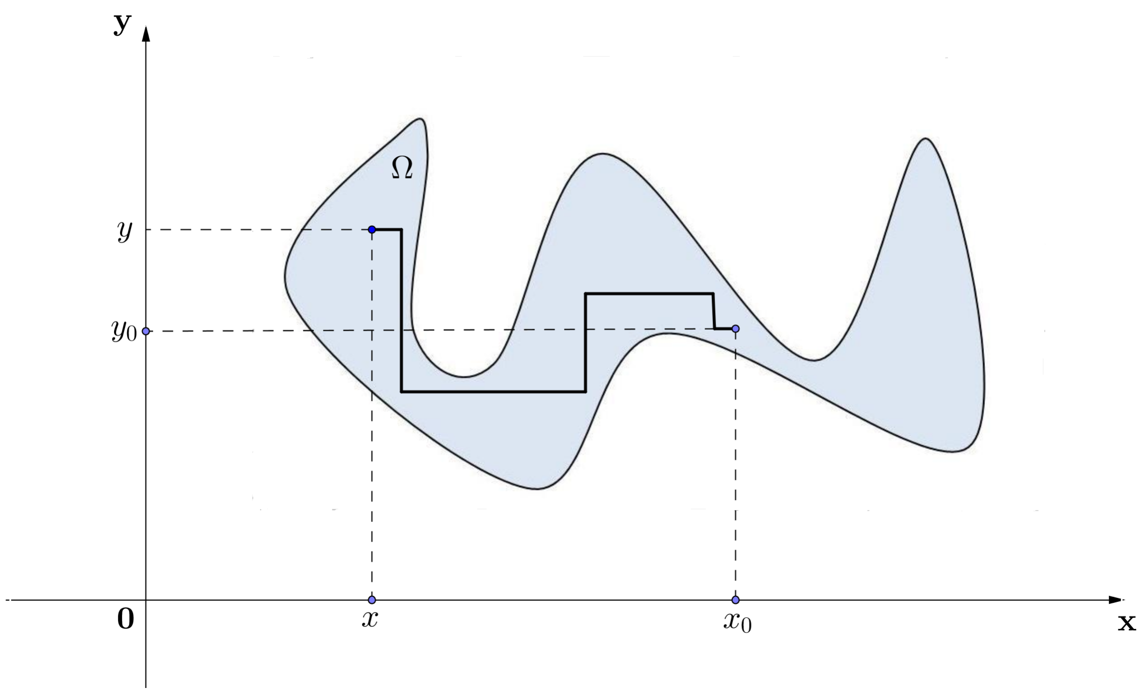
$$\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = 0 = \frac{\partial}{\partial y} f(x,y).$$

Περιγράψτε την f.

Λύση.
Θα δούμε ότι εάν $(x_0, y_0) \in \Omega$ τότε ισχύει ότι $f(x,y) = f(x_0,y_0)$, $\forall (x,y) \in \Omega$. Η πληροφορία που πέρνουμε από το δεδομένο:

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = 0 = \frac{\partial}{\partial y} f(x,y),$$

χρησιμοποιώντας πάλι το Θ.Μ.Τ. είναι ότι κατά μήκος οποιουδήποτε ευθυγράμμου τμήματος που είναι παράλληλο σε κάποιον από τους δύο άξονες η τιμή της συνάρτησης παραμένει σταθερή. άρα εάν επιλέξουμε ένα οποιοδήποτε σημείο (x,y) στο χωρίο Ω, τότε αρκεί να φτιάξουμε μία τεθλασμένη γραμμή από ευθύγραμμα τμήματα παράλληλα ή κάθετα στον άξονα των x, η οποία να ενώνει το τυχαίο σημείο αυτό με το (x_0, y_0), όπως στο παρακάτω σχήμα.



Η ύπαρξη αυτή της τεθλασμένης γραμμής εξασφαλίζεται από το δεδομένο ότι το σύνολο Ω είναι συνεκτικό. άρα:

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) \ , \ \forall (x,y) \in \Omega,$$

για κάποιο $(x_0, y_0) \in \Omega$.

Πρόβλημα 4. Βρείτε όλες τις $\mathbf{C}^1$ συναρτήσεις[4] $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ για τις οποίες:

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = y \text{ και } \frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = x,$$

[4] C^1 συνάρτηση ονομάζεται η συνάρτηση που είναι μία φορά συνεχώς παραγωγίσιμη, δηλαδή μία φορά παραγωγίσιμη και η παράγωγος είναι συνεχής. Γενικότερα, C^n συνάρτηση λέγεται η συνάρτηση που είναι n φορές συνεχώς παραγωγίσιμη.

για κάθε $x, y \in \mathbf{R}$.

Λύση.
έχουμε:

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = y = \frac{\partial (xy)}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x}(f(x,y) - xy) = 0.$$

Η συνάρτηση $f(x,y) - xy$ είναι συνεχής και παραγωγίσιμη ως προς y άρα:

$$\exists\ g(y) \in \mathbf{D}(\mathbf{R}) : f(x,y) - xy = g(y) \Rightarrow f(x,y) = xy + g(y).$$

Επομένως:

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(xy + g(y)\right) = x + g'(y) \Rightarrow y = y + g'(y) \Rightarrow g'(y) = 0 \Rightarrow g(y) = c,$$

για κάποια σταθερά $c \in \mathbf{R}$. άρα:

$$f(x,y) = xy + c\ ,\ \forall x, y \in \mathbf{R},$$

για κάποιο $c \in \mathbf{R}$.

17.2.2015

Λίγα λόγια για τη μοντελοποίηση ενός προβλήματος: Η θεμελιώδης αρχή που υποθέτουμε είναι η ντετερμινιστική αρχή. Σύμφωνα με την αρχή αυτή, η επανάληψη ενός πειράματος κάτω από τις ίδιες συνθήκες δίνει το ίδιο αποτέλεσμα. Σε τι, όμως, μεταφράζεται η αρχή αυτή σε επίπεδο μοντελοποίησης· Η απάντηση είναι στην αρχή του Handamard, δηλαδή στην καλή τοποθέτηση του προβλήματος. ένα πρόβλημα είναι καλά τοποθετημένο όταν έχει τις παρακάτω τρεις ιδιότητες:

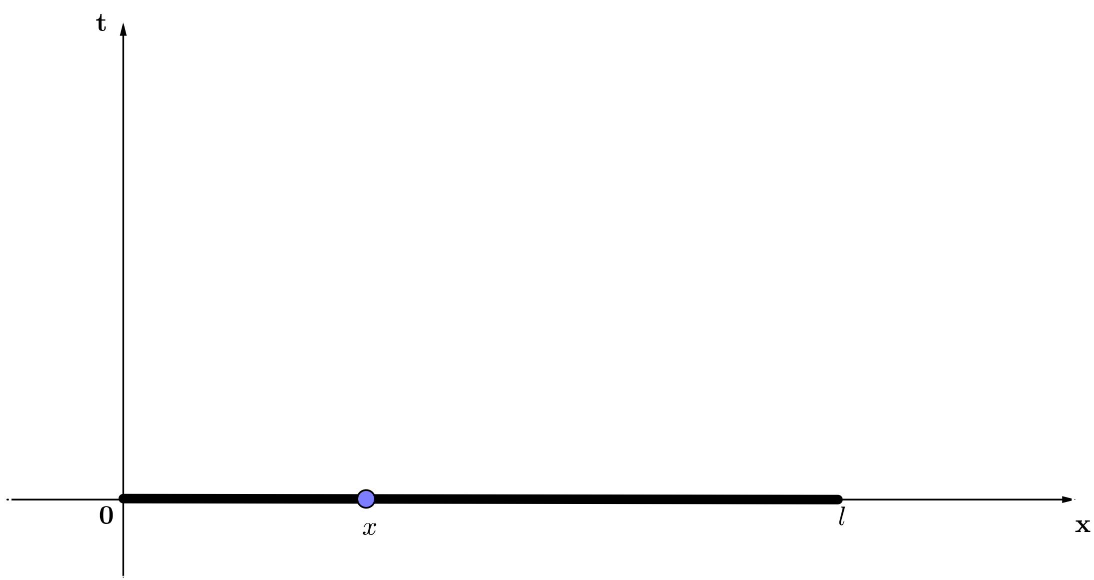
i) Το πρόβλημα έχει μία λύση (ύπαρξη λύσης).

ii) Η λύση αυτή ορίζεται μονοσήμαντα.

iii) Υπάρχει συνεχής εξάρτηση της λύσης από τις παραμέτρους του προβλήματος.

Ξεκινάμε με τις διαφορικές εξισώσεις δευτέρου βαθμου:

1. **Εξίσωση θερμότητας:** Τοποθετούμε τη ράβδο, η οποία έχει μήκος l, στον οριζόντιο άξονα του καρτσεσιανού επιπέδου όπως φαίνεται στο σχήμα:



Η ράβδος είναι μονωμένη οπότε παρεμβαίνω μόνο στο σύνορο, δηλαδή στα άκρα της ράβδου. Το πρόβλημα, λοιπόν, είναι να προσδιορίσουμε τη θερμοκρασία $u(x,t)$ στη θέση x της ράβδου, όπου $0 \leq x \leq l$, τη χρονική στιγμή t. Η διαφορική εξίσωση δευτέρου βαθμού που δίνει τη θερμοκρασία στα ενδιάμεσα σημεία της ράβδου είναι η:

$$u_t(x,t) = k^2 u_{xx}(x,t), \text{ όπου } x \in (0,l) \text{ και } t > 0,$$

η οποία λέγεται εξίσωση της θερμότητας ή παραβολική εξίσωση (μαθηματική ορολογία). Το k είναι μία σταθερά που εξαρτάται από το υλικό της ράβδου. Έχουμε ήδη διαπιστώσει μία διαφορική εξίσωση ενδέχεται να έχει, περισσότερες από μία, λύσεις. Για το λόγο αυτό χρειαζόμαστε κάποιες βοηθητικές συνθήκες, οι οποίες εξασφαλίζουν το μονοσήμαντο της λύσης. Οι δύο κατηγορίες τέτοιων βοηθητικών συνθηκών είναι οι συνοριακές συνθήκες (ή απλά Σ.Σ.) και οι αρχικές συνθήκες (ή απλά Α.Σ.). Οι μεν, έχουν να κάνουν με το τι γίνεται στα σημεία του συνόρου, ενώ οι δε με το τι γίνεται τη χρονική στιγμή t_0 που αρχίζει το πείραμα. Στην περίπτωση του προβλήματός μας, θέτουμε ως συνοριακές συνθήκες:

$$u(0,t) = h_1(t) \text{ και } u(l,t) = h_2(t),$$

αφού τα συνοριακά σημεία είναι τα άκρα της ράβδου, και ώς αρχική συνθήκη την:

$$u(x,0) = g(x), \text{ όπου } 0 \leq x \leq l,$$

δηλαδή η αρχική χρονική στιγμή είναι η $t = 0$. Τονίζουμε ότι οι συναρτήσεις h_1, h_2 και g είναι γνωστές.

Παρατήρηση. Οι συνοριακές συνθήκες, όπως δόθηκαν στο παραπάνω πορόβλημα, ονομάζονται Dirichlet Σ.Σ. Γενικά, υπάρχουν τρεις τύποι συνοριακών συνθηκών. Θα μπορούσαμε να έχουμε τις εξισώσεις:

$$-u_x(0,t) = g_1(t) \text{ και } u_x(l,t) = g_2(t),$$

που εκφράζουν τη ροή της θερμοκρασίας στα άκρα της ράβδου. Αυτές ονομάζονται Neumann Σ.Σ. Τέλος, έχουμε τις συνοριακές συνθήκες μεικτού τύπου ή Robin Σ.Σ., δηλαδή συνθήκες της μορφής:

$$u(0,t) - Au_x(0,t) = k_1(t) \text{ και } u(l,t) + Bu_x(l,t) = k_2(t),$$

όπου A, B θετικές σταθερές.

Η λύση του προβλήματος της θερμοκρασίας της ράβδου που εξετάσαμε παραπάνω αφορά μόνο τη μία διάσταση, αφού η ράβδος ήταν μονοδιάστατη. Ποιά είναι η μοντελοποίηση του προβλήματος στις δύο διαστάσεις· Στην περίπτωση αυτή έχουμε εξίσωση της μορφής:

$$u_t(\vec{x},t) = k^2 \Delta u(\vec{x},t), \text{ όπου } (\vec{x},t) \in \Omega \times (0,+\infty),$$

όπου $\Omega \subseteq \mathbf{R}$ και με $\Delta u(x,t)$ συμβολίζουμε το συντελεστή Laplace[5] της u. Οι Dirichlet Σ.Σ. είναι:

$$u(\vec{x},t) = h_1(\vec{x},t),\ \vec{x} \in \partial\Omega^6 \text{ και } t > 0,$$

ενώ οι αρχικές συνθήκες είναι:

$$u(\vec{x},0) = g(x),\ \vec{x} \in \Omega.$$

Ας επιστρέψουμε, τώρα, στο πρόβλημα της μονοδιάστατης ράβδου. Το ερώτημα είναι το εξής: τι ονομάζουμε (κλασική) λύση σε ένα τέτοιο πρόβλημα· Η απάντηση εξαρτάται από το τι τύπου συνοριακές συνθήκες έχουμε επιλέξει.

[5]Ο συντελεστής Λαπλαςε της συνάρτησης u, ή αλλιώς η λαπλασιανή της u, είναι η συνάρτηση $\Delta u = u_{xx} + u_{yy}$.
[6]Ετσι συμβολίζεται το σύνορο του χωρίου Ω.

- Ας υποθέσουμε ότι έχουμε Dirichlet Σ.Σ.. Τότε η συνάρτησή μας θα πρέπει να είναι δύο φορές παραγωγίσιμη ως προς την μεταβλητή x και μία φορά ως προς την t, δηλαδή θα πρέπει:

  $$u \in \mathbf{D}^{2,1}\big((0,l) \times (0,+\infty)\big),$$

  και να ικανοποιεί την εξίσωση:

  $$u_t(x,t) = k^2 u_{xx}(x,t).$$

  Ακόμα, θέλουμε η u να είναι συνεχής στα άκρα, αλλά και συνεχής στην αρχική τιμή $t = 0$, δηλαδή:

  $$u \in \mathbf{C}\big([0,l] \times (0,+\infty)\big) \cap \mathbf{C}\big([0,l] \times [0,+\infty)\big).$$

- Αν έχουμε Neuman Σ.Σ., η απαίτηση:

  $$u \in \mathbf{D}^{2,1}\big((0,l) \times (0,+\infty)\big)$$

  παραμένει. Προφανώς, ξανά απαιτούμε η συνάρτηση u να επαληθεύει την εξίσωση, αλλά τώρα, θα πρέπει:

  $$u \in \mathbf{C}^{1,0}\big([0,l] \times [0,+\infty)\big)$$

  και:

  $$u \in \mathbf{C}^{0}\big([0,l] \times [0,+\infty)\big),$$

  προκειμένου η λύση να 'αισθάνεται' τις συνοριακές συνθήκες και την αρχική συνθήκη.

2. **Κυματική εξίσωση:** Κυματική εξίσωση ή υπερβολική εξίσωση (μαθηματική ορολογία) ονομάζεται η εξίσωση:

   $$u_{tt}(x,t) = k^2 u_{xx}(x,t), \text{ όπου } x \in (0,l).$$

   έστω ότι έχουμε Dirichlet Σ.Σ.:

   $$u(0,t) = h_1(t) \text{ και } u(l,t) = h_2(t)$$

   και αρχικές συνθήκες:

   $$u(x,0) = g_1(x) \text{ και } u_t(x,0) = g_2(x).$$

   Τότε για να έχουμε (κλασική) λύση u, θα πρέπει:

   $$u \in \mathbf{D}^{2,2}\big((0,l) \times (0,+\infty)\big) \cap \mathbf{C}\big([0,l] \times (0,+\infty)\big) \cap \mathbf{C}^{0,1}\big([0,l] \times [0,+\infty)\big).$$

3. **Εξίσωση Poisson:** Ως εξίσωση Poisson ή ελλειπτική εξίσωση (μαθηματική ορολογία) ορίζεται η:

   $$\Delta u(\vec{x}) = f(\vec{x}), \text{ όπου } \vec{x} \in \Omega \Leftrightarrow u_{xx}(x,y) + u_{yy}(x,y) = f(x,y),$$

   όπου $\Omega \subseteq \mathbf{R}^2$. Η συνοριακή συνθήκη, εδώ, είναι:

   $$u(\vec{x}) = h(\vec{x}), \text{ όπου } \vec{x} \in \partial\Omega.$$

   Για να είναι η u λύση της εξίσωσης Poisson, θα πρέπει:

   $$u \in \mathbf{C}^2(\Omega) \cap \mathbf{C}(\bar{\Omega}).$$

   Σημαντική είναι η περίπτωση όπου $f = 0$. Σε αυτή την περίπτωση οι λύσεις της εξίσωσεις Poisson ονομάζονται αρμονικές.

Συνεχίζουμε, τώρα, με διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξης. Η γενική μορφή των μερικών διαφορικών εξισώσεων πρώτου βαθμού είναι:

$$F\big(t, x, u(x,t), u_t(x,t), u_x(x,t)\big) = 0.$$

Παράδειγμα 1. Η πιο απλή εξίσωση είναι:

$$u_t(x,t) = 0 \ , \ x \in \mathbf{R} \ , \ t > 0.$$

Μπορούμε να πάρουμε ως αρχική συνθήκη:

$$u(x,0) = f(x) \ , \ x \in \mathbf{R}.$$

Τότε για να είναι η u λύση της εξίσωσης αυτής, θα πρέπει:

$$u \in \mathbf{D}^{0,1}\big(\mathbf{R} \times (0,+\infty)\big) \cap \mathbf{C}\big(\mathbf{R} \times [0,+\infty)\big).$$

Η λύση του προβληματος αυτού είναι η συνάρτηση:

$$u(x,t) = f(x), \text{όπου } x \in \mathbf{R} \ , \ t \geq 0.$$

19.2.2015

Παράδειγμα 2. όμοια με το προηγούμενο παράδειγμα, αν έχουμε:

$$u_x(x,t) = 0, \text{ όπου } x, t \in \mathbf{R},$$

τότε για να είναι η u λύση της εξίσωσης θα πρέπει:

$$u \in \mathbf{D}^{1,0}(\mathbf{R}^2).$$

Χρησιμοποιώντας το Θ.Μ.Τ. στο διάστημα που σχηματίζουν τα x και 0, τότε λαμβάνουμε:

$$\exists \xi : u(x,t) - u(0,t) = (x-0)u_x(\xi,t) \Rightarrow u(x,t) = u(0,t),$$

για κάθε $x, t \in \mathbf{R}$, δηλαδή η u είναι μία συνάρτηση μόνο του t.

Πρόβλημα 5. έστω η εξίσωση:

$$u_t(x,t) = u_x(x,t), \text{ όπου } \ x \in \mathbf{R} \ , \ t > 0$$

με αρχική συνθήκη:

$$u(x,0) = f(x) \ , \ x \in \mathbf{R}.$$

Περιγράψτε την u.

Λύση.
Βασικά στο συγκεκριμένο πρόβλημα θα δώσουμε τρεις διαφορετικές λύσεις.

1. Για να είναι η συνάρτηση u λύση του προβλήματός μας θα πρέπει να επαληθεύει τη δοθείσα διαφορική εξίσωση και ταυτόχρονα να 'αισθάνεται' τα αρχικά δεδομένα, δηλαδή:

   $$u \in \mathbf{D}^{1,1}\big(\mathbf{R} \times (0, +\infty)\big) \cap \mathbf{C}\big(\mathbf{R} \times [0, +\infty)\big).$$

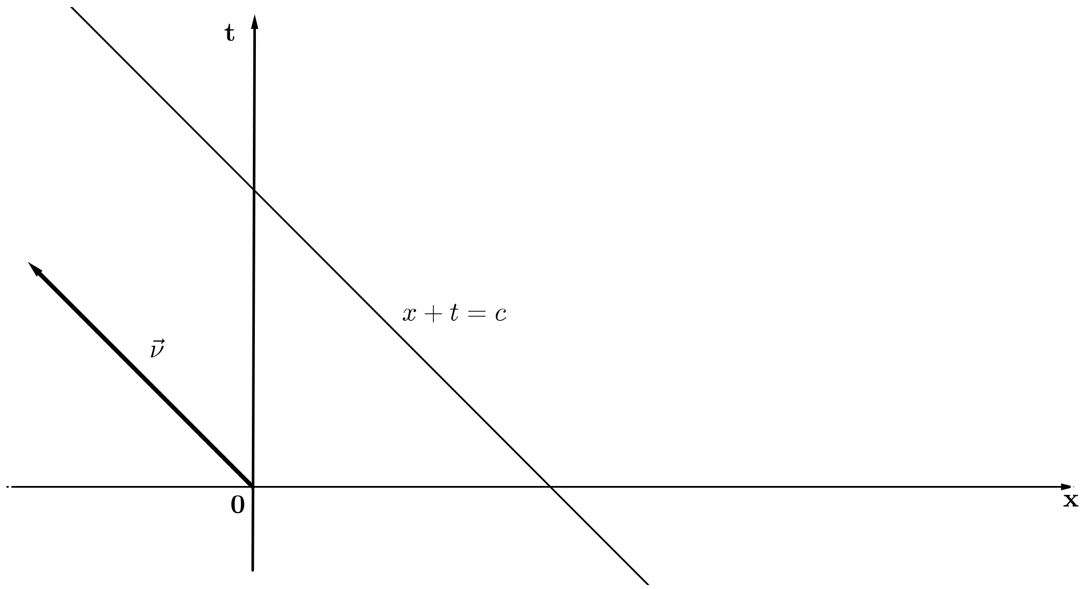
   Από τη διαφορική εξίσωση λαμβάνουμε ότι:

   $$u_x(x,t) - u_t(x,t) = 0 \Rightarrow (u_x, u_t)(-1, 1) = 0.$$

   Θεωρούμε το διάνυσμα $\vec{\nu} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}})$, και τότε:

   $$(u_x, u_t)(1,-1) = (u_x, u_t)(1,-1)\frac{1}{\sqrt{2}} = (u_x, u_t) \cdot \vec{\nu} = \frac{\partial}{\partial \vec{\nu}} u(x,t) = 0,$$

   δηλαδή η παράγωγος στην κατεύθυνση του διανύσματος $\vec{\nu}$ είναι μηδέν. Ορίζουμε, τώρα τη συνάρτηση $h(s) = u((x,t) + s \cdot \vec{\nu})$, όπου $s \in \mathbf{R}$.



Εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Τ. στο κλειστό διάστημα που σχηματίζουν τα s και 0. Τότε, υπάρχει ξ στο (ανοιχτό) διάστημα που σχηματίζουν τα 0 και s, τέτοιο ώστε:

$$h(s) - h(0) = h'(\xi)(s-0) = s \cdot h'(\xi) = s\frac{\partial}{\partial \vec{\nu}} u((x,t) + s\vec{\nu}) \restriction_{s=\xi} = 0,$$

δηλαδή:

$$u((x,t) + s \cdot \vec{\nu}) = u(x,t) \ , \forall s \in \mathbf{R}$$

Αυτό σημαίνει ότι η u έχει σταθερή τιμή, σε κάθε ευθεία παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{\nu}$, δηλαδή της μορφής $x+t=c$. Επομένως, η u είναι της μορφής:

$$u(x,t) = \phi(x+t),$$

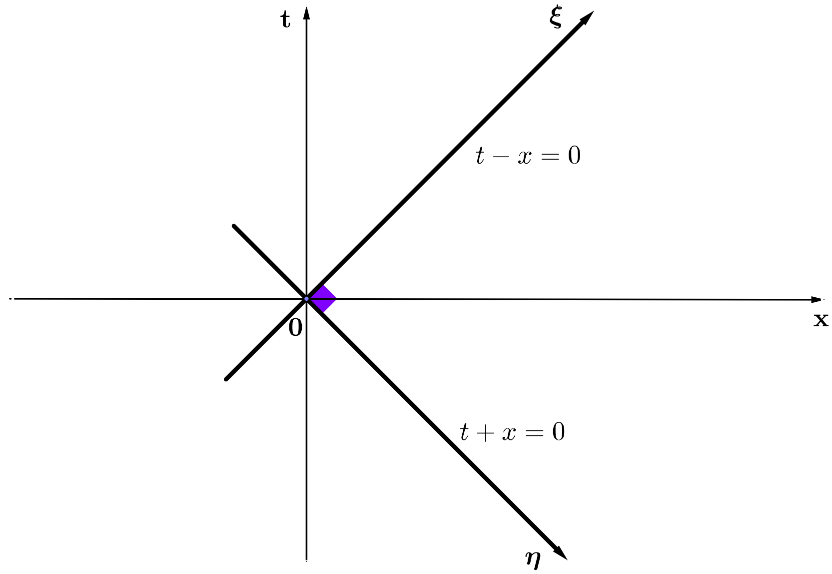
για κάποια παραγωγίσιμη συνάρτηση $\phi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$. άν, λοιπόν, θέσουμε $t=0$, τότε κατὰνάγκη παίρνουμε ότι $\phi(x) = f(x)$. Οπότε τελικά $u(x,t) = f(x+t)$.

2. Ο δεύτερος τρόπος είναι ο αλγεβρικός τρόπος. Με αυτό εννοούμε ότι αλλάζουμε κατάλληλα το σύστημα συντεταγμένων μας. Θεωρούμε:

$$\xi = t - x \text{ και } \eta = t + x$$

και θέτουμε:

$$u(x,t) = U(\xi, \eta).$$



Τότε, σύμφωνα με τον κανόνα της αλυσίδας παίρνουμε:

$$u_t(x,t) = U_\xi(\xi,\eta)\frac{\partial \xi}{\partial t} + U_\eta(\xi,\eta)\frac{\partial \eta}{\partial t} =$$
$$= U_\xi(\xi,\eta) + U_\eta(\xi,\eta).$$

όμοια πράττουμε και για τη μεταβλητη x:

$$u_x(x,t) = U_\xi(\xi,\eta)\frac{\partial \xi}{\partial x} + U_\eta(\xi,\eta)\frac{\partial \eta}{\partial x} =$$
$$= -U_\xi(\xi,\eta) + U_\eta(\xi,\eta).$$

Θέλουμε, τώρα, να εμφανίσουμε τη διαφορική εξίσωση, οπότε γράφουμε:

$$0 = u_t(x,t) - u_x(x,t) = U_\xi + U_\eta - (-U_\xi + U_\eta) = 2U_\xi \Leftrightarrow U_\xi(\xi,\eta) = 0.$$

Τότε, όμως, υπάρχει παραγωγίσιμη συνάρτηση $\psi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, τέτοια ώστε:

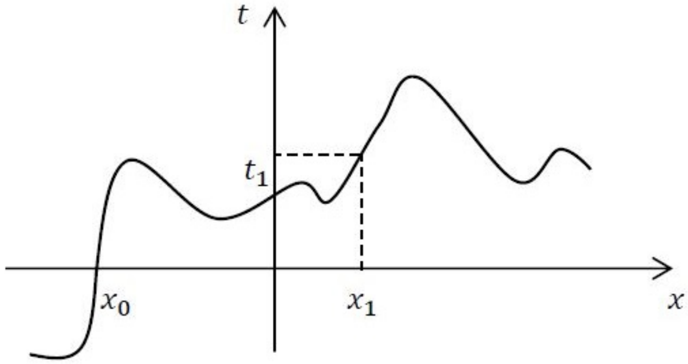
$$U(\xi,\eta) = \psi(\eta) \Rightarrow u(x,t) = \psi(x+t).$$

Και εδώ, θέτωντας $x = 0$ προκύπτει ότι:

$$u(x,t) = f(x+t).$$

3. Η τρίτη λύση για αυτό το πρόβλημα, είναι και η πιο σημαντική, με την έννοια ότι έχει ευρεία χρήση. Την μέθοδο αυτή την καλούμε μεθοδο της χαρακτηριστικής καμπύλης και στόχος είναι να μετατρέψει το δοθέν πρόβλημα σε ένα πρόβλημα συνήθων διαφορικών εξισώσεων.
Ξεκινάμε, θεωρώντας καμπύλη[7] στον $\mathbf{R}^2$ παραμέτρου $s \in \mathbf{R}$. Αποφασίζουμε ότι $(t(0), x(0)) = (0, x_0)$. Ακόμα, για να διέρχεται η καμπύλη από το τυχόν σημείο (t_1, x_1), θα πρέπει να υπάρχει $\bar{s} \in \mathbf{R}$, τέτοιο ώστε $(t(\bar{s}), x(\bar{s})) = (t_1, x_1)$.

[7] Υπενθυμίζουμε ότι μία καμπύλη δεν είναι απαραιτητα συνάρτηση! Για παράδειγμα, εάν σχεδιάσουμε το μοναδιαίο κύκλο στο καρτεσιανό επίπεδο, αφού τότε αυτός είναι μία καμπύλη, αλλά δεν είναι συνάρτηση, η τυχαία κάθετη ευθεία στον οριζόντιο άξονα που τέμνει τον κύκλο, τον τέμνει σε δύο σημεία.



Τότε η λύση του προβλήματος μας είναι μία συνάρτηση που εξαρτάται μονάχα από την παράμετρο s, δηλαδή:

$$u(x(s), t(s)) = \sigma(s) \text{ ,όπου } s \in \mathbf{R}.$$

Παίρνοντας παράγωγο, έχουμε:

$$\sigma'(s) = u_x(x(s), t(s))x'(s) + u_t(x(s), t(s))t'(s).$$

Επιλέγουμε, τώρα:

$$x'(s) = -1, \ , t'(s) = 1,$$

για κάθε $s \in \mathbf{R}$ και θυμόμαστε ότι $x(0) = x_0$ και $t(0) = 0$. έχουμε λοιπόν να λύσουμε το σύστημα:

$$\begin{cases} x'(s) = -1, \text{ όπου } x(0) = x_0 \\ t'(s) = 1 \text{ , όπου } t(0) = 0 \\ \sigma'(s) = 0 \text{ , όπου } \sigma(0) = f(0) \end{cases}$$

Εύκολα, προκύτει, από το σύστημα αυτό ότι $x(s) = s - x_0$ και $t(s) = s$ και για την σ ότι $\sigma(s) = \sigma(0) = f(x_0)$. άρα $u(x_0 - s, s) = f(x_0)$. Τότε:

$$(x(\bar{s}), t(\bar{s})) = (x_1, t_1) \Leftrightarrow x_0 - \bar{s} = x_1 \text{ και } \bar{s} = t_1,$$

δηλαδή $x_0 = t_1 + x_1$. Επιλέγοντας, λοιπόν, $s = \bar{s}$, λαμβάνουμε:

$$u(x_0 - \bar{s}, \bar{s}) = f(x_0) \Leftrightarrow u(x_1, t_1) = f(x_1 + t_1).$$

έτσι, ολοκληρώνεται και η τρίτη απόδειξη.

Παρατήρηση. Γενικότερα, με τη μέθοδο της χαρακτηριστικής καμπύλης επιλύουμε προβλήματα της μορφής:

$$A(x, t, u) \cdot u_x + B(x, t, u) \cdot u_t = \gamma(x, t, u).$$

Παράδειγμα 3. Θέλουμε να λύσουμε το πρόβλημα:

$$u_t + 2x \cdot u_x = x + u \text{ , όπου } x \in \mathbf{R} \text{ , } t > 0,$$

όπου $u(x, 0) = 1 + x^2$, για κάθε $x \in \mathbf{R}$, με τη μέθοδο της χαρακτηριστικής καμπύλης. Παρεπιπτώντως. το συγκεκριμένο πρόβλημα λύνεται και με τους τρεις τρόπους, όπως στο προηγούμενο πρόβλημα. έστω καμπύλη $(x(s), t(s))$, που διέρχεται από τα σημεία $(x(0), t(0)) = (x_0, t_0)$ και (x_1, t_1), και η οποία έχει την ιδιότητα:

$$\sigma'(s) = u(x(s), t(s)) + x(s).$$

Αφού:

$$\sigma'(s) = u_x(x(s), t(s))x'(s) + u_t(x(s), t(s))t'(s),$$

επιλέγουμε:

$$x'(s) = 2x(s) \text{ και } t'(s) = 1.$$

Οπότε προκύπτει το σύστημα:

$$\begin{cases} x'(s) = 2x(s) \text{ , όπου } x(0) = x_0 \\ t'(s) = 1 \text{ ,όπου } t(0) = 0 \\ \sigma'(s) = u(x(s), t(s)) + x(s) \text{ , όπου } \sigma(0) = u(x_0, 0) = 1 + x^2 \end{cases}$$

Προφανώς, $t(s) = s$, για κάθε $s \in \mathbf{R}$. Για την $x(s)$ έχουμε:

$$x'(s) - 2x(s) = 0 \Leftrightarrow e^{-2s}(x'(s) - 2x(s)) = 0 \Rightarrow$$

$$\left(e^{-2s}x(s)\right)' = 0 \Rightarrow x(s) = x_0 e^{2s}.$$

Για την σ, λοιπόν, έχουμε:

$$\sigma'(s) = \sigma(s) + x_0 e^{2s} \Leftrightarrow (e^{-s}\sigma(s))' = x_0 e^s \Rightarrow \left(e^{-s}\sigma(s) - x_0 e^s\right)' = 0 \Rightarrow$$

$$e^{-s}\sigma(s) - x_0 e^s = \sigma(0) - x_0 e^0 \Leftrightarrow \sigma(s) = x_0 e^{2s} + (1 + {x_0}^2 - x_0)e^s \text{ , } \forall s \in \mathbf{R}.$$

Αν $\bar{s}$ είναι η τιμή της παραμέτρου s, ώστε $(x(\bar{s}), t(\bar{s})) = (x_1, t_1)$, τότε $x_0 e^{2\bar{s}} = x_1$ και $\bar{s} = t_1$, ισοδύναμα, $\bar{s} = t_1$ και $x_0 = x_1 e^{-2t_1}$. Επομένως, θέτοντας $s = \bar{s}$ στον τύπο που βρήκαμε για την σ, έπεται τελικά ότι:

$$\sigma(\bar{s}) = x_1 + e_1^t + {x_1}^2 e^{-3t_1} - x_1 e^{-t_1}.$$

Συνεπώς, η λύση που ψάχνουμε είναι η:

$$u(x, t) = x + e^t + x^2 e^{-3t} - x e^{-t}.$$

10.3.2015

Στην προηγούμενη διάλεξη είχαμε μιλήσει για την μοντελοποίηση του προβλήματος της παλλόμενης χορδής. Εξετάσαμε, δηλαδή, το πρόβλημα:

$$u_{tt}(x,t) - c^2 u_{xx}(x,t) = 0 \text{ ,όπου } 0 < x < l \text{ , } t > 0,$$

με συνοριακές συνθήκες $u(0,t) = u(l,t) = 0$, όπου η αρχική θέση ήταν $u(x,0) = f(x)$ και η αρχική ταχύτητα $u_t(x,0) = g(x)$. Θα λύσουμε, τώρα, το ίδιο πρόβλημα με τη διαφορά ότι $x \in \mathbf{R}$. Προφανώς, εδώ, δεν έχουμε τις εξισώσεις $u(0,t) = u(l,t) = 0$. Το σύστημα που θέλουμε, λοιπόν να εξετάσουμε, είναι το:

$$u_{tt}(x,t) - c^2 u_{xx}(x,t) = 0 \text{ , } \in \mathbf{R} \text{ , } t > 0$$

$$u(x,0) = f(x) \text{ , } x \in \mathbf{R}$$

$$u_t(x,0) = g(x) \text{ , } x \in \mathbf{R}.$$

Αυτό το πρόβλημα ονομάζεται πρόβλημα Cauchy.

Η (ομογενής) γενική γραμμική διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης δύο μεταβλητών έχει τη μορφή:

$$A(x,y)u_{xx}(x,y) + 2B(x,y)u_{xy}(x,y) + \Gamma(x,y)u_{yy}(x,y) +$$

$$+\Delta(x,y)u_x(x,y) + E(x,y)u_y(x,y) + Z(x,y)u(x,y) = 0.$$

Προφανώς, αντί για 0 στο δεύτερο μέλος θα μπορούσαμε να έχουμε οποιαδήποτε συνάρτηση των x και y. Ακόμα θέλουμε:

$$|A(x,y)| + |B(x,y)| + |\Gamma(x,y)| \not\equiv 0.$$

Βάσει της γενικής εξίσωσης διακρίνουμε τρεις κατηγορίες κανονικών μορφών:

(I) Η πρώτη κατηγορία είναι η εξίσωση κύματος ή υπερβολική εξίσωση:

$$w_{xx}(x,y) - w_{yy}(x,y) + \text{ όροι μικρότερης της πρώτης τάξης} = 0.$$

Μάλιστα, αντί της διαφοράς $w_{xx} - w_{yy}$ θα μπορούσαμε να έχουμε w_{xy}.

(II) Η δεύτερη κατηγορία είναι η εξίσωση της θερμότητας ή παραβολική εξίσωση, που έχει τη μορφή:

$$w_{xx}(x,y) - w_y(x,y) + \text{ όροι το πολύ πρώτης τάξης ως προς } x = 0$$

(III) Τέλος, έχουμε την ελλειπτική εξίσωση, η οποία έχει τη μορφή:

$$w_{xx}(x,y) + w_{yy}(x,y) + \text{ όροι το πολύ πρώτης τάξης} = 0.$$

Στην περίπτωση όπου λείπουν οι όροι πρώτης τάξης, δηλαδή η εξίσωσή μας έχει τη μορφή:

$$w_{xx} + w_{yy} = 0,$$

οι λύσεις της ονομάζονται αρμονικές συναρτήσεις.

Αν ορίσουμε ως διακρίνουσα ή χαρακτηριστική εξίσωση της γενικής γραμμικής διαφορικής εξίσωσης δύο μεταβλητών την ποσότητα:

$$D(x,y) := 4(B^2(x,y) - A(x,y)\Gamma(x,y)),$$

τότε παρατηρούμε ότι η διάταξη της διακρίνουσας ως προς το 0 καθορίζει τον τύπο της κανονικής μορφής. Πιο συγκεκριμένα:

- Αν $D(x,y) > 0$, τότε η κανονική μορφή της έξίσωσης είναι υπεβολικού τύπου.
- Αν $D(x,y) = 0$, τότε η κανονική μορφή είναι παραβολικού τύπου, ενώ
- αν $D(x,y) < 0$, τότε είναι ελλειπτικού τύπου.

Εφαρμόζουμε, τώρα, αλλαγή συντεταγμένων, δηλαδή θεωρούμε:

$$\xi = \xi(x,y) \text{ και } \eta = \eta(x,y),$$

οπότε τότε:

$$u(x,y) = U(\xi,\eta)$$

για κάποια U. Τότε κάνουμε τους υπολογισμούς:

$$u_x = \frac{\partial \xi}{\partial x} U_\xi + \frac{\partial \eta}{\partial x} U_\eta$$

άρα:

$$u_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x} U_\xi + \frac{\partial \eta}{\partial x} U_\eta\right) =$$

$$= \left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 U_{\xi\xi} + 2\frac{\partial \xi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} U_{\xi\eta} + \left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} U_\xi + \frac{\partial \eta}{\partial x^2} U_\eta$$

και:

$$u_{xy} = \frac{\partial \xi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial y} U_{\xi\xi} + \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \xi}{\partial y} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x}\right) U_{\xi\eta} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial y} U_{\eta\eta} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial y} U_\xi + \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y} U_\eta.$$

Τέλος, βρίσκουμε ότι:

$$u_{yy} = \left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2 U_{\xi\xi} + 2\frac{\partial \xi}{\partial y} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial y} U_{\xi\eta} + \left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2 + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} U_\xi + \frac{\partial \eta}{\partial y^2} U_\eta.$$

Αντικαθιστώντας στην γενική εξίσωση και εκτελώντας τις πράξεις παίρνουμε μία νέα διαφορική εξίσωση της μορφής:

$$\tilde{A}(\xi,\eta) U_{\xi\xi}(\xi,\eta) + \tilde{B}(\xi,\eta) U_{\xi\eta}(\xi,\eta) + \tilde{\Gamma}(\xi,\eta) u_{\eta\eta}(\xi,\eta) + \text{ όροι πρώτης τάξης} = 0,$$

όπου:

$$\tilde{A} = \left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 A + 2\frac{\partial \xi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial y} B + \left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2 \Gamma,$$

$$\tilde{B} = 2\frac{\partial \xi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} A + 2B\left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \xi}{\partial y} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x}\right) + 2\frac{\partial \xi}{\partial y} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial y} \Gamma$$

και:

$$\tilde{\Gamma} = \left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 A + 2\frac{\partial \eta}{\partial x} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial y} B + \left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2 \Gamma.$$

Προσπαθούμε, τώρα, να προσδιορίσουμε τα ξ και η, ώστε να έχουμε:

$$\tilde{A}(\xi, \eta) = 0 = \tilde{\Gamma}(\xi, \eta).$$

Από την πρώτη ισότητα παίρνουμε:

$$\tilde{A} = 0 \Rightarrow \left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 A + 2\frac{\partial \xi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial y} B + \left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2 \Gamma = 0 \Rightarrow A\rho^2 + 2B\rho + \Gamma = 0,$$

όπου:

$$\rho = \rho(x, y) = \frac{\partial\xi/\partial x}{\partial\xi/\partial y}.$$

όμοια πράττωντας και για την $\tilde{\Gamma}(\xi, \eta) = 0$, παίρνουμε:

$$A{\rho'}^2 + 2B\rho' + \Gamma = 0,$$

όπου τώρα:

$$\rho' = \rho'(x, y) = \frac{\partial\eta/\partial x}{\partial\eta/\partial y}.$$

Αυτό σημαίνει ότι οι ρ και ρ' είναι λύσεις της δευτεροβάθμιας εξίσωσης:

$$At^2 + 2Bt + \Gamma = 0 \text{ ,όπου } t = t(x, y).$$

Εάν η διακρίνουσα είναι θετική, δηλαδή $D(x, y) > 0$, τότε η εξίσωση μας έχει δύο λύσεις $\rho_1 = \rho_1(x, y)$ και $\rho_2 = \rho_2(x, y)$, διακεκριμένες μεταξύ τους, οπότε χ.β.τ.γ.[8] θεωρούμε ότι:

$$\rho = \rho_1 \text{ και } \rho' = \rho_2.$$

Αυτό, επομένως, που κάνουμε είναι ότι λύνουμε ως προς τα ξ και η. Λέμε, αλλιώς, ότι επιλύουμε ως προς τις χαρακτηριστικές καμπύλες.

Παρατήρηση. Στην ειδική περίπτωση όπου οι συντελεστές A, B και Γ δεν εξαρτώνται από τα x και y, είναι, δηλαδή, πραγματικές σταθερές, ο μετασχηματισμός που εφαρμόζουμε ώστε να αλλάξουμε το σύστημα συντεταγμένων είναι γραμμικός. Με άλλα λόγια, είναι της μορφής:

$$\xi = \alpha x + \beta y \text{ και } \eta = \gamma x + \delta y,$$

όπου απαιτούμε:

$$|\alpha| + |\beta| \neq 0 \neq |\gamma| + |\delta|.$$

Πρόβλημα 6. Να βρεθεί η κανονική μορφή της διαφορικής εξίσωσης:

$$4u_{xx} - 12u_{xy} + 9u_{yy} + u_y = 0.$$

[8] Το γεγονός ότι δεν έχει σημασία ποίο από τα ρ και ρ' θα επιλέξουμε ως ρ_1 (και συνεπώς και ως ρ_2) έχει να κάνει με το ότι μπορούμε, την επιλογή που κάναμε για το ξ να την κάνουμε για το η και αντίστροφα, χ.β.τ.γ.

Λύση.
Αρχικά υπολογίζουμε τη διακρίνουσα, η οποία είναι:

$$D(x,y) = 12^2 - 4 \cdot 4 \cdot 9 = 0.$$

Επομένως, η κανονική μορφή είναι παραβολικού τύπου. Εφόσον οι συντελεστές της εξίσωσης είναι σταθεροί αριθμοί, εφαρμόζουμε το γραμμικό μετασχηματισμό:

$$\xi = \alpha x + \beta y \text{ και } \eta = \gamma x + \delta y,$$

με $|\alpha| + |\beta| \neq 0 \neq |\gamma| + |\delta|$. Τότε:

$$u(x,y) = U(\xi,\eta)$$

και εφαρμόζοντας τον κανόνα της αλυσίδας υπολογίζουμε:

$$u_x = \alpha U_\xi + \gamma U_\eta$$

$$u_y = \beta U_\xi + \delta U_\eta$$

$$u_{xx} = \alpha^2 U_{\xi\xi} + 2\alpha\gamma U_{\xi\eta} + \gamma^2 U_{\eta\eta}$$

$$u_{yy} = \beta^2 U_{\xi\xi} + 2\beta\Delta U_{\xi\eta} + \Delta^2 U_{\eta\eta}$$

$$u_{xy} = \alpha\beta U_{\xi\xi} + (\alpha\delta + \beta\gamma) U_{\xi\eta} + \gamma\delta U_{\eta\eta}.$$

Αντικαθιστώντας, λοιπόν, στη δοθείσα εξίσωση, λαμβάνουμε:

$$4\left(\alpha^2 U_{\xi\xi} + 2\alpha\gamma U_{\xi\eta} + \gamma^2 U_{\eta\eta}\right) - 12\left(\alpha\beta U_{\xi\xi} + (\alpha\delta + \beta\gamma) U_{\xi\eta} + \gamma\delta U_{\eta\eta}\right) +$$

$$+9\left(\beta^2 U_{\xi\xi} + 2\beta\delta U_{\xi\eta} + \delta^2 U_{\eta\eta}\right) + \beta U_\xi + \delta U_\eta = 0,$$

ισοδύναμα:

$$(4\alpha^2 - 12\alpha\beta + 9\beta^2) U_{\xi\xi} + (8\alpha\gamma - 12\alpha\delta - 12\beta\gamma + 18\beta\gamma) U_{\xi\eta} + (4\gamma^2 - 12\gamma\delta + 9\Delta^2) U_{\eta\eta} + \beta U_\xi + \delta U_\eta = 0.$$

Απαιτούμε:

$$4\alpha^2 - 12\alpha\beta + 9\beta^2 = 0 \Rightarrow (2\alpha - 3\beta)^2 = 0,$$

οπότε κάνουμε την επιλογή:

$$\alpha = \frac{3}{2}\beta$$

Τότε παρατηρούμε ότι, αντικαθιστώντα το α στο συντελεστή του $U_{\xi\eta}$:

$$8\frac{3}{2}\beta\gamma - 12\frac{3}{2}\beta\delta - 12\beta\gamma + 18\beta\gamma = 0.$$

Αυτό, όχι μόνο δεν συμβαίνει τυχαία, αλλά συμβαίνει πάντα! Βάσει της επιλογής του α, παίρνουμε:

$$\xi = \frac{3}{2}\beta x + \beta y \text{ και } \eta = \gamma x + \delta y.$$

Αν, τώρα, επιλέξουμε $\delta = 0$, τότε:

$$4\gamma^2 U_{\eta\eta} + \beta U_\xi = 0.$$

Κι εφόσον η κανονική μορφή είναι $U_{\eta\eta} - U_{\xi} = 0$, επιλέγουμε:

$$\beta = -4\gamma^2 \ , \gamma \neq 0$$

άρα μία βολική επιλογή είναι:

$$\gamma = 1, \beta = -4, \alpha = -6 \text{ και } \delta = 0,$$

δηλαδή:

$$\xi = -6x - 4y \text{ και } \eta = x.$$

Καταλήξαμε, λοιπόν, στο ότι εάν κάνουμε αυτήν την επιλογή για τα ξ και η τότε φέρνουμε την εξίσωση στην κανονική της μορφή, η οποία είναι η παραβολική.

Θέλουμε, τώρα, να λύσουμε την κυματική εξίσωση:

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 \ , x \in \mathbf{R}, t > 0$$

$$u(x,0) = f(x) \ , x \in \mathbf{R}$$
$$u_t(x,0) = g(x) \ , x \in \mathbf{R}$$

και c είναι μία μη μηδενική σταθερά. Η διακρίνουσα, εδώ, είναι θετική και, όπως και στο τελευταίο πρόβλημα 6, εφαρμόζουμε το μετασχηματισμό:

$$\xi = \alpha t + \beta x \text{ και } \eta = \gamma t + \delta x,$$

με $|\alpha| + |\beta| \neq 0 \neq |\gamma| + |\delta|$, δηλαδή:

$$u(x,t) = U(\xi, \eta).$$

Τότε:

$$u_x = \beta U_{\xi} + \delta U_{\eta}$$
$$u_{xx} = \beta^2 U_{\xi\xi} + 2\beta\delta U_{\xi\eta} + \delta^2 U_{\eta\eta}$$
$$u_t = \alpha U_{\xi} + \gamma U_{\eta}$$
$$u_{tt} = \alpha^2 U_{\xi\xi} + 2\alpha\gamma U_{\xi\eta} + \gamma^2 U_{\eta\eta}.$$

Συνεπώς, με αντικατάσταση στην αρχική εξίσωση, λαμβάνουμε:

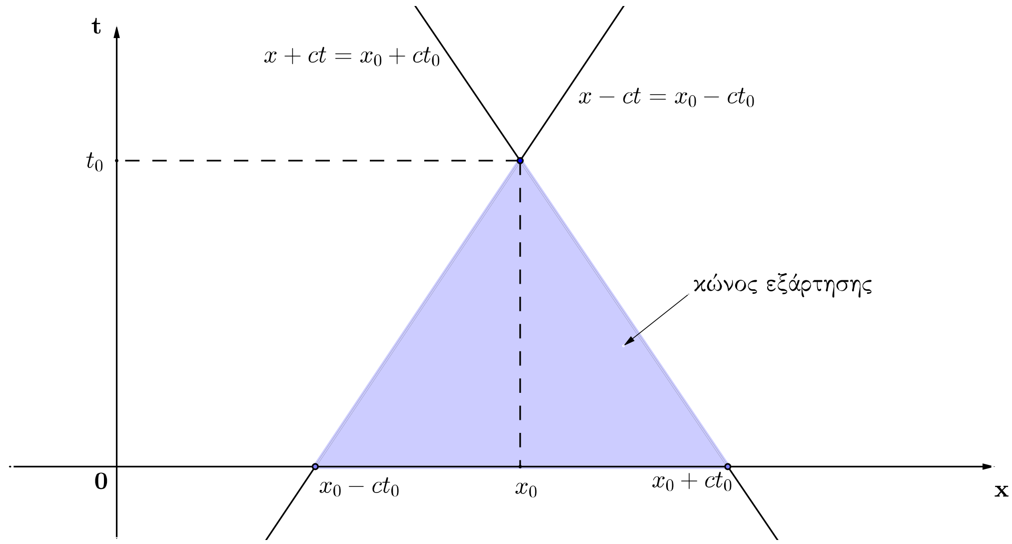
$$(\alpha^2 - \beta^2 c^2) U_{\xi\xi} + (2\alpha\gamma - 2\beta\delta c^2) U_{\xi\eta} + (\gamma^2 - \delta^2 c^2) = 0.$$

Απαιτούμε οι συντελεστές των $U_{\xi\xi}$ και $U_{\eta\eta}$ να είναι 0, απότε προκύπτει το σύστημα:

$$\begin{cases} \alpha^2 - \beta^2 c^2 = 0 \\ \gamma^2 - \delta^2 c^2 = 0 \end{cases} .$$

Θέλουμε, επίσης, το σύστημα που θα προκύψει μετά από την αλλαγή συντεταγμένων να μην έχει παράλληλους άξονες, οπότε το σύστημα μας απλοποιείται ως εξής:

$$\begin{cases} \alpha - \beta c = 0 \\ \gamma + \delta c = 0 \end{cases} .$$



Τότε:

$$(2\alpha\gamma - 2\beta\delta c^2)U_{\xi\eta} = 0 \Leftrightarrow -4\beta\delta c^2 U_{\xi\eta} = 0,$$

άρα μία επιλογή, που βολεύει είναι η:

$$\beta = \delta = 1 \Rightarrow \alpha = \gamma = c,$$

δηλαδή:

$$\xi = x + ct \text{ και } \eta = x - ct.$$

Η εξίσωση $U_{\xi\eta} = 0$ μας δίνει, τότε:

$$\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{\partial}{\partial\xi}U(\xi,\eta)\right) = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial\xi}U(\xi,\eta) = \tilde{f}(\xi) = \frac{\partial}{\partial\xi}\left(\int_0^\xi \tilde{f}(s)ds\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial\xi}\left(U(\xi,\eta) - \int_0^\xi \tilde{f}(s)ds\right) = 0 \Rightarrow U(\xi,\eta) = \int_0^\xi \tilde{f}(s)ds + \tilde{g}(\eta),$$

για κάποιες συναρτήσεις $\tilde{f}, \tilde{g}$. Επομένως, η διαφορική εξίσωση $U_{\xi\eta} = 0$ έχει λύση τη συνάρτηση:

$$U(\xi,\eta) = A(\xi) + B(\eta),$$

όπου A, B είναι συναρτήσεις δύο φορές παραγωγίσιμες. Ισοδύναμα:

$$u(x,t) = A(x+ct) + B(x-ct)\ ,\ x \in \mathbf{R}, t > 0.$$

Τις συναρτήσεις A και B θα τις προσδιορίσουμε μέσω των αρχικών συνθηκών. Συγκεκριμένα:

$$u(x,0) = f(x) \Rightarrow A(x) + B(x) = f(x)\ ,\ x \in \mathbf{R}$$

και:

$$u_t(x,t) = cA'(x+ct) - cB'(x-ct) \Rightarrow g(x) = u_t(x,0) = cA'(x) - cB'(x) \Rightarrow$$

$$\left(A(x) - B(x) - \frac{1}{c}\int_0^x g(s)ds\right)' = 0 \Rightarrow A(x) - B(x) = c_1 + \frac{1}{c}\int_0^x g(s)ds\ ,\ x \in \mathbf{R}$$

για κάποια σταθερά c_1. Επομένως έχουμε να λύσουμε το σύστημα:

$$\begin{cases} A(x) + B(x) = f(x) \\ A(x) - B(x) = c_1 + \frac{1}{c}\int_0^x g(s)ds \end{cases},$$

από το οποίο έπεται:

$$A(x) = \frac{c_1}{2} + \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2c}\int_0^x g(s)ds$$

$$B(x) = -\frac{c_1}{2} + \frac{1}{2}f(x) - \frac{1}{2c}\int_0^x g(s)ds.$$

Συνεπώς:

$$u(x,t) = \frac{c_1}{2} + \frac{1}{2}f(x+ct) + \frac{1}{2c}\int_0^{x+ct} g(s)ds - \frac{c_1}{2} + \frac{1}{2}f(x-ct) - \frac{1}{2c}\int_0^{x-ct} g(s)ds \Rightarrow$$

$$u(x,t) = \frac{1}{2}f(x+ct) + \frac{1}{2}f(x-ct) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(s)ds,$$

όπου:

$$f \in \mathbf{D}^2(\mathbf{R}) \text{ και } g \in \mathbf{D}^1(\mathbf{R}).$$

Το ερώτημα είναι, τώρα το εξής: η λύση που βρήκαμε είναι μοναδική ή υπάρχουν κι άλλες· Η απάντηση είναι ότι η λύση που βρήκαμε είναι μοναδική και αυτό θα αποδείξουμε. Για να φτάσουμε στο ζητούμενο συμπέρασμα θα χρησιμοποιήσουμε τη λεγόμενη <u>ενεργειακή μέθοδο</u>(Μέθοδος Ενέργειας).

12.3.2015

Θεώρημα 1. *Το πρόβλημα Cauchy:*

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = f(x,t)\ ,\ x \in \mathbf{R}, t > 0$$

$$u(x,0) = h(x)\ ,\ x \in \mathbf{R}$$

$$u_t(x,0) = g(x)\ ,\ x \in \mathbf{R},$$

έχει το πολύ μία (κλασική) λύση.

Απόδειξη.
Θα χρησιμοποιήσουμε την ενεργειακή μέθοδο. Αρχικά, θεωρούμε δύο λύσεις u_1 και u_2 του δοθέντος προβλήματος Cauchy. Στόχος είναι να δείξουμε ότι αυτές ταυτίζονται. Παρατηρούμε ότι αν θέσουμε $u = u_1 - u_2$, τότε αυτή επιλύει το αντίστοιχο ομογενές πρόβλημα. Πράγματι:

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = (u_1 - u_2)_{tt} - c^2 (u_1 - u_2)_{xx} = u_{1,tt} - u_{2,tt} - c^2 u_{1,xx} + c^2 u_{2,xx}$$

$$= f(x,t) - f(x,t) = 0\ ,\ x \in \mathbf{R}, t > 0$$

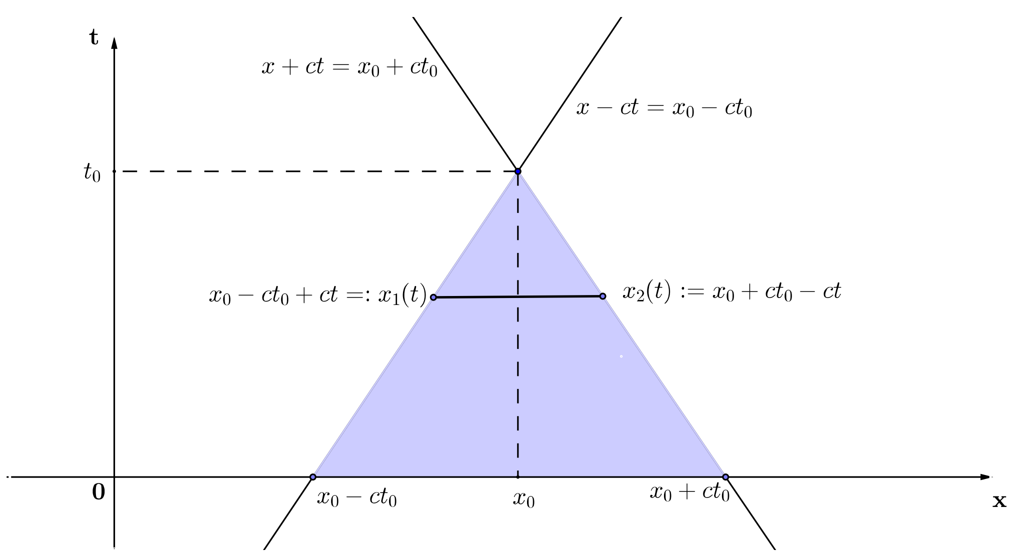
και αντίστοιχα προκύπτει και για τις αρχικές συνθήκες. Δηλαδή, αυτό που θα δείξουμε είναι ότι το πρόβλημα:

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0\ ,\ x \in \mathbf{R}, t > 0$$

$$u(x,0) = 0\ ,\ x \in \mathbf{R}$$

$$u_t(x,0) = 0\ ,\ x \in \mathbf{R},$$

έχει ως μοναδική λύση τη μηδενική, άρα κατ΄ ανάγκη $u \equiv 0$. Ο κώνος εξάρτησης, εφόσον το πρόβλημά μας είναι υπερβολικό, έχει τη μορφή:



Θέλουμε, τώρα, να βρούμε μία συνάρτηση, η οποία να παίξει το ρόλο της ενέργειας. Για να το πετύχουμε αυτό, ολοκληρώνουμε την ποσότητα $u_t(u_{tt}-c^2u_{xx})$ σε όλη την πραγματική ευθεία. Οπότε:

$$\begin{aligned}
0 &= \int_{-\infty}^{+\infty} u_t(u_{tt}-c^2u_{xx})dx \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \big(u_t(x,t)(u_{tt}(x,t)-c^2u_{xx}(x,t))\big)\,dx \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}{u_t}^2(x,t)\right)dx - c^2\int_{-\infty}^{+\infty} u_t(x,t)u_{xx}(x,t)dx \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}{u_t}^2(x,t)\right)dx - c^2\int_{-\infty}^{+\infty} u_{tx}(x,t)u_x(x,t)dx \\
&= \frac{\partial}{\partial t}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}{u_t}^2(x,t)+\frac{c^2}{2}{u_x}^2(x,t)\right)dx
\end{aligned}$$

Επιλέγουμε ως ενέργεια τη συνάρτηση που παραγωγίζεται ως προς t στις περιοχές του κώνου εξάρτησης όπως στο σχήμα , δηλαδή:

$$E(t)=\int_{x_1(t)}^{x_2(t)}\left(\frac{1}{2}{u_t}^2(x,t)+\frac{c^2}{2}{u_x}^2(x,t)\right)dx.$$

Τότε:

$$\begin{aligned}
E'(t) &= \frac{d}{dt}\left(\int_{x_1(t)}^{x_2(t)}\left(\frac{1}{2}{u_t}^2(x,t)+\frac{c^2}{2}{u_x}^2(x,t)\right)dx\right) \\
&= \int_{x_1(t)}^{x_2(t)}\big(u_t(x,t)u_{tt}(x,t)+c^2u_x(x,t)u_{xt}(x,t)\big)\,dx + \\
&\quad +\left(\frac{1}{2}{u_t}^2(x_2(t),t)+\frac{c^2}{2}{u_x}^2(x_2(t),t)\right)x_2'(t)-\left(\frac{1}{2}{u_t}^2(x_1(t),t)+\frac{c^2}{2}{u_x}^2(x_1(t),t)\right)x_1'(t)
\end{aligned}$$

Υπολογίζουμε:

$$\int_{x_1(t)}^{x_2(t)}\big(u_t(x,t)u_{tt}(x,t)+c^2u_x(x,t)u_{xt}(x,t)\big)\,dx = \imath nt_{x_1(t)}^{x_2(t)}u_t(x,t)u_{tt}(x,t)dx-$$

$$-c^2\int_{x_1(t)}^{x_2(t)}u_t(x,t)u_{xx}(x,t)dx + c^2\big(u_x(x_2(t),t)u_t(x_2(t),t)-u_x(x_1(t),t)u_t(x_1(t),t)\big)=$$

$$\int_{x_1(t)}^{x_2(t)}u_t(x,t)\big(u_{tt}(x,t)-c^2u_{xx}(x,t)\big)dx + c^2\big(u_x(x_2(t),t)u_t(x_2(t),t)-u_x(x_1(t),t)u_t(x_1(t),t)\big)=$$

$$=c^2\big(u_x(x_2(t),t)u_t(x_2(t),t)-u_x(x_1(t),t)u_t(x_1(t),t)\big).$$

Επομένως, αντικαθιστώντας στον τύπο της $E'(t)$, λαμβάνουμε ότι:

$$\begin{aligned}
E'(t) &= c^2\big(u_x(x_2(t),t)u_t(x_2(t),t)\big)-c^2\big(u_x(x_1(t),t)u_t(x_1(t),t)\big) \\
&\quad -c\left(\frac{1}{2}{u_t}^2(x_2(t),t)+\frac{c^2}{2}{u_x}^2(x_2(t),t)\right)x_2'(t)-c\left(\frac{1}{2}{u_t}^2(x_1(t),t)+\frac{c^2}{2}{u_x}^2(x_1(t),t)\right)x_1'(t) \\
&= -\frac{c}{2}\left(\Big(u_t(x_2(t),t)-c(u_x(x_2(t),t)\Big)^2+\Big(u_t(x_1(t),t)+cu_x(x_1(t),t)\Big)^2\right)\le 0.
\end{aligned}$$

Αυτό σημαίνει ότι η $E(t)$ είναι φθίνουσα συνάρτηση του χρόνου, δηλαδή:

$$t > 0 \Rightarrow E(t) \leq E(0) = \int_{x_0-ct_0}^{x_0+ct_0} \big(\frac{1}{2}{u_t}^2(x,0) + \frac{c^2}{2}{u_x}^2(x,0)\big)dx = 0.$$

Η ενέργεια, όμως, είναι μία ποσότητα κατά βάση μη αρνητική, δηλαδή $E(t) \geq 0$. Προκύπτει, συνεπώς, ότι:

$$E(t) = 0 \ , \forall t > 0 \Rightarrow \int_{x_1(t)}^{x_2(t)} \left(\frac{1}{2}{u_t}^2(x,t) + \frac{c^2}{2}{u_x}^2(x,t)\right) dx = 0$$

κι αφού $x_1(t) \neq x_2(t)$, τότε:

$$\frac{1}{2}{u_t}^2(x,t) + \frac{c^2}{2}{u_x}^2(x,t) = 0 \Rightarrow u_t(x,t) = 0 = u_x(x,t)^9.$$

Εφαρμόζουμε Θ.Μ.Τ. στο διάστημα $[0,t]$ για τη συνάρτηση u. Τότε:

$$\exists \xi \in (0,t) : u(x,t) - u(x,0) = (t-0)u_t(x,\xi) = 0 \Rightarrow u(x,t) = u(x,0) = 0.$$

Στον κώνο εξάρτησης, λοιπόν, ισχύει ότι $u(x,t) = 0$. Εφόσον, όμως, επιλέξαμε τυχαία το σημείο (x_0,t_0), από το οποίο κατασκευάσαμε τον κώνο εξάρτησης, τότε προκύπτει ότι:

$$u \equiv 0 \Rightarrow u_1 \equiv u_2,$$

το οποίο είναι αντίφαση στο ότι οι u_1 και u_2 είναι διακεκριμένες λύσεις του δοθέντος προβλήματος. □

Πρόβλημα 7. Να αποδείξετε ότι το προβλημα αρχικών-συνοριακών τιμών (Π.Α.Σ.Τ.):

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = f(x,t) \ , \ 0 < x < l, t > 0$$

$$u(0,t) = \phi_1(t) \ , \ t \geq 0$$

$$u(l,t) = \phi_2(t) \ , \ t \geq 0$$

$$u(x,0) = h(x) \ , \ x \in [0,l]$$

$$u_t(x,0) = g(x) \ , \ x \in [0,l]$$

έχει το πολύ μία (κλασική) λύση.

Λύση. Εφαρμόζουμε την ίδια ακριβώς μέθοδο. Κατ΄ αρχάς υποθέτουμε δύο διακεκριμένες λύσεις, u_1 και u_2, του δοθέντος Π.Α.Σ.Τ. και ορίζουμε τη συνάρτηση $u := u_1 - u_2$, η οποία είναι λύση του αντίστοιχου ομογενούς Π.Α.Σ.Τ:

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 \ , \ 0 < x < l, t > 0$$

$$u(0,t) = 0 \ , \ t \geq 0$$

$$u(l,t) = 0 \ , \ t \geq 0$$

$$u(x,0) = 0 \ , \ x \in [0,l]$$

[9] Υπενθυμίζουμε ότι όταν έχουμε εξίσωση της μορφής $\alpha^2 + \beta^2 = 0$ στο $\mathbf{R}$, αυτή έχει μοναδική λύση την $\alpha = 0 = \beta$. Στο $\mathbb{C}$ δεν ισχύει κάτι τέτοιο καθώς η εξίσωση παραγοντοποιείται και παίρνει τη μορφή $(\alpha + i\beta)(\alpha - i\beta) = 0$.

$$u_t(x,0) = 0 \ , \ x \in [0,l].$$

Τότε η:

$$E(t) = \int_0^l \big(\frac{1}{2}{u_t}^2(x,t) + \frac{c^2}{2}{u_x}^2(x,t)\big)dx$$

είναι η ενέργεια του συστήματος. Πράγματι:

$$E'(t) = \int_0^l (u_t u_{tt} + c^2 u_x u_{xt})dx = \int_0^l u_t(u_{tt} - c^2 u_{xx})dx + c^2\big(u_x(l,t)u_t(l,t) - u_x(0,t)u_t(0,t)\big)$$

$$= c^2\big(u_x(l,t)u_t(l,t) - u_x(0,t)u_t(0,t)\big) = 0.$$

άρα:

$$E(t) = E(0) = 0 \Rightarrow E \equiv 0 \Rightarrow u \equiv 0,$$

το οποίο είναι άτομο εξ ορισμού των u_1 και u_2.

Μέχρι τώρα έχουμε αποδείξει ότι το πρόβλημα Cauchy:

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = f(x,t) \ , \ x \in \mathbf{R}, t > 0$$

$$u(x,0) = h(x) \ , \ x \in \mathbf{R}$$

$$u_t(x,0) = g(x) \ , \ x \in \mathbf{R},$$

έχει μονοσήμαντη λύση, και μάλιστα, στην ειδική περίπτωση όπου $f \equiv 0$ έχουμε προσδιορίσει και τη λύση αυτού. Στοχεύουμε, τώρα, στην επιλύση αυτού του προβλήματος όταν η f είναι τυχαία συνάρτηση. Για να το πετύχουμε αυτό, εκμεταλλευόμαστε τη γραμμικότητα της διαφορικής εξίσωσης και χωρίζουμε το αρχικό μας πρόβλημα σε δύο υποπροβλήματα. έτσι, έχουμε να λύσουμε τα προβλήματα:

$$w_{tt}(x,t) - c^2 w_{xx}(x,t) = 0 \ , \ x \in \mathbf{R}, t > 0$$

$$w(x,0) = h(x) \ , \ x \in \mathbf{R}$$

$$u_t(x,0) = g(x) \ , \ x \in \mathbf{R}$$

και:

$$v_{tt}(x,t) - c^2 v_{xx}(x,t) = f(x,t) \ , \ x \in \mathbf{R}, t > 0$$

$$v(x,0) = 0 \ , \ x \in \mathbf{R}$$

$$v_t(x,0) = 0 \ , \ x \in \mathbf{R}.$$

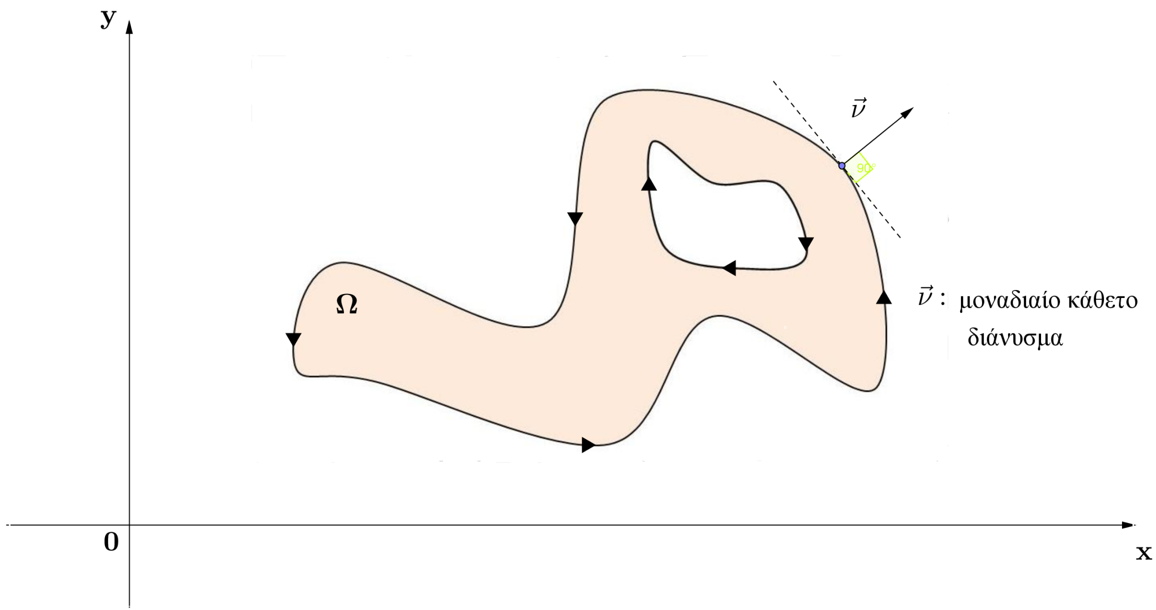
Τότε η λύση u που ζητάμε θα είναι η:

$$u \equiv w + v.$$

Πριν, όμως, προχωρήσουμε, ας θυμηθούμε κάποια αποτελέσματα της ανάλυσης πολλών μεταβλητών που θα χρειαστούμε στην πορεία.

Ταυτότητες Green

Για να μιλήσουμε για τις ταυτότητες του Green, χρειάζεται να υιοθετήσουμε μία συνθήκη. Αυτή είναι ότι εργαζόμαστε σε χωρίο προσανατολισμένο θετικά, το οποίο μπορεί να γραφεί ως ένωση απλών κλειστών καμπυλών. ένα παράδειγμα τέτοιου χωρίου είναι:



Το θεώρημα του Green μας λέει ότι εάν έχουμε δύο συναρτήσεις $P, Q : \Omega \to \mathbf{R}$, μία φορά συνεχώς παραγωγίσιμες, τότε:

$$\iint_\Omega \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \int_{\partial\Omega} Pdx + Qdy.^{10}$$

Εδώ, υπενθυμίζουμε και το θεώρημα του Gauss, το οπόιο μας λέει ότι, για ένα $\mathbf{C}^1$-διανυσματικό πεδίο $\vec{F}$, ισχύει ότι:

$$\iiint_\Omega div(\vec{F})dxdydz = \iint_S \vec{F} \cdot \vec{\nu} dS,$$

όπου $S = \partial\Omega$ και με $div(\vec{F})$ συμβολίζουμε την απόκλιση του διανυσματικού πεδίου $\vec{F}$. Περνάμε τώρα στις ταυτότητες Green.

1. Υπενθυμίζουμε ότι με Δ συμβολίζουμε τη λαπλασιανή, δηλαδή $\Delta = \nabla^2 = \nabla \cdot \nabla$. Η πρώτη ταυτότητα του Green είναι η:

$$\int_\Omega f(x) \cdot \Delta g(x) dx = -\int_\Omega \nabla f(x) \cdot \nabla g(x) dx + \int_{\partial\Omega} f(x) \frac{\partial g}{\partial \vec{\nu}} dS,$$

   όπου $\frac{\partial g}{\partial \vec{\nu}} = \nabla g \cdot \vec{\nu}$.

2. Εαν απλά εναλλάσουμε τους ρόλους των f και g, δηλαδή προκύπτει :

$$\int_\Omega \nabla f(x) \cdot g(x) dx = -\int_\Omega \nabla f(x) \cdot \nabla g(x) dx + \int_{\partial\Omega} g(x) \frac{\partial f}{\partial \vec{\nu}} dS.$$

[10] Το μονοδιάστατο ανάλογο του θεωρήματος του Green είναι το 2^o Θεμελιώδες Θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού, δηλαδή:

$$\int_\alpha^\beta f'(s)ds = f(\beta) - f(\alpha).$$

3. Η δεύτερη ταυτότητα του Green προκύπτει από κατά μέλη αφαίρεση των προηγούμενων δύο και είναι η:

$$\int_{\Omega}(f \cdot \Delta g - g \cdot \Delta f)dx = \int_{\partial\Omega}\left(f \cdot \frac{\partial g}{\partial \vec{\nu}} - g \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{\nu}}\right)dS.$$

Παρατήρηση. Ουσιαστικά η ιδέα που κρύβεται πίσω από το θεώρημα και τις ταυτότητες Green είναι η ολοκλήρωση κατά μέρη στις πολλές μεταβλητές.

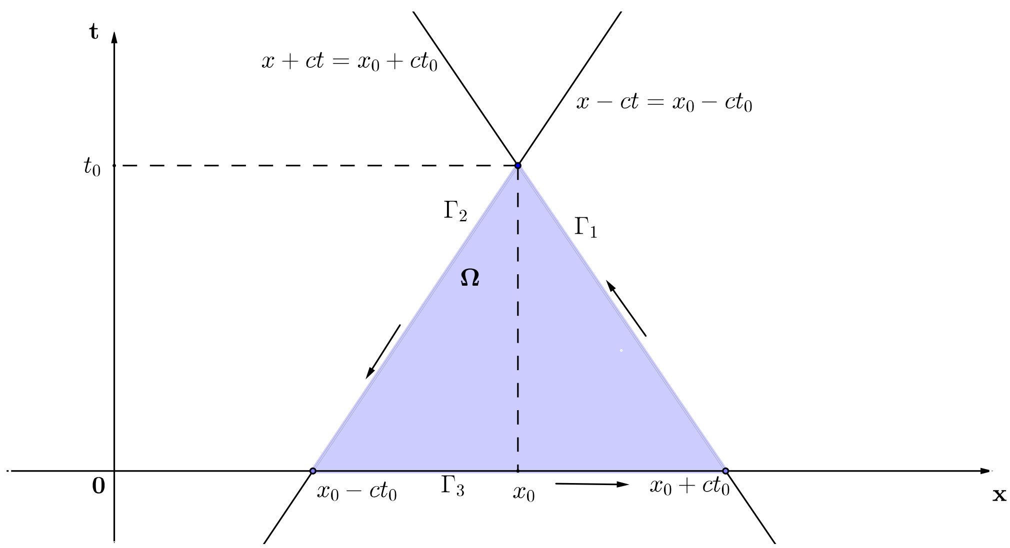
Πρόβλημα 8. Να λύσετε το πρόβλημα:

$$u_{tt}(x,t) - c^2 u_{xx}(x,t) = f(x,t) \ , \ x \in \mathbf{R}, t > 0$$

$$u(x,0) = 0 \ , \ x \in \mathbf{R}$$

$$u_t(x,0) = 0 \ , \ x \in \mathbf{R}.$$

Λύση. Για την επίλυση του προβλήματος αυτού θα χρησιμοποιήσουμε τις ταυτότητες του Γρεεν. Το χωρίο στο οποίο θα εφαρμόσουμε Green είναι ο κώνος εξάρτησης, ο οποίος υπενθυμίζουμε ότι έχει τη μορφή:



Πράγματι, λοιπόν, μπορούμε να εφαρμόσουμε Green, αφού ο κώνος εξάρτησης είναι απλή κλειστή καμπύλη, λεία κατά τμήματα. έτσι, υπολογίζουμε:

$$A := \iint_{\Omega}\big(u_{tt}(x,t) - c^2 u_{xx}(x,t)\big)dxdt = \iint_{\Omega} f(x,t)dxdt = \int_0^{t_0}\left(\int_{x_0-ct_0+ct}^{x_0+ct_0-ct} f(x,t)dxdt\right).$$

Εάν, λοιπόν, ορίσουμε $Q(x,t) = -c^2 u_x(x,t)$ και $P(x,t) = -u_t(x,t)$, τότε από το θεώρημα του Green προκύπτει ότι:

$$A = \int_{\partial\Omega}(P(x,t)dx + Q(x,t)dt) = \int_{\partial\Omega}\big(-u_t(x,t)dx - c^2 u_x(x,t)dt\big).$$

όμως το σύνορο του Ω γράφεται ως ένωση των τριών ευθυγράμμων τμημάτων Γ_1, Γ_2 και Γ_3, όπως φαίνεται στο σχήμα, δηλαδή $\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$. Επομένως, υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα σε καθένα από τα Γ_1, Γ_2 και Γ_3 κι έπειτα αθροίζουμε για να βρούμε το A. Το Γ_1 είναι το σύνολο:

$$\Gamma_1 \subseteq \{(x,t) \in \mathbf{R}^2 \mid x + ct = x_0 + ct_0\}.$$

Συνεπώς στο Γ_1 ισχύει ότι $dx + c \cdot dt = 0$. άρα:

$$\int_{\Gamma_1} \big(-u_t(x,t)dx - c^2 u_x(x,t)dt \big) = \int_{\Gamma_1} \big(-u_t(-c \cdot dt) - c^2 u_x(-dx)\frac{1}{c} \big) = c\int_{\Gamma_1} \big(u_t dt + u_x dx \big).$$

όμως, γνωρίζουμε ότι $du = u_x dx + u_t dt$, που σημαίνει ότι:

$$c\int_{\Gamma_1} \big(u_t dt + u_x dx \big) = c\int_{\Gamma_1} du = c\big(u(x_0,t_0) - u(x_0 + ct_0, 0) \big) = cu(x_0,t_0).$$

όμοια προκύπτει και ότι:

$$\int_{\Gamma_2} \big(-u_t(x,t)dx - c^2 u_x(x,t)dt \big) = cu(x_0,t_0).$$

Κι εφόσον στο Γ_3, έχουμε $t = 0$ και άρα και $dt = 0$, εύκολα διαπιστώνουμε ότι:

$$\int_{\Gamma_3} \big(-u_t(x,t)dx - c^2 u_x(x,t)dt \big) = 0.$$

Τελικά λαμβάνουμε ότι:

$$A = \int_{\Gamma_1} \big(-u_t(x,t)dx - c^2 u_x(x,t)dt \big) + \int_{\Gamma_2} \big(-u_t(x,t)dx - c^2 u_x(x,t)dt \big) + \int_{\Gamma_3} \big(-u_t(x,t)dx - c^2 u_x(x,t)dt \big)$$

$$= 2cu(x_0,t_0) \Rightarrow \iint_{\Omega} f(x,t)dxdt = 2cu(x_0,t_0) \Rightarrow u(x_0,t_0) = \frac{1}{2c}\iint_{\Omega} f(x,t)dxdt.$$

Αυτή, λοιπόν, είναι μία ειδική λύση στο δοθέν πρόβλημά μας, ορισμένη στον κώνο εξάρτησης.

Πρόβλημα 9. Να λυθεί το πρόβλημα:

$$u_{tt}(x,t) - c^2 u_{xx}(x,t) = 0 \ , \ x > 0, t > 0$$

$$u(x,0) = f(x) \ , \ x \geq 0$$
$$u_t(x,0) = g(x) \ , \ x \geq 0.$$
$$u(0,t) = 0.$$

Απόδειξη. Λύνουμε, το πρόβλημα:

$$w_{tt} - c^2 w_{xx} = 0 \ , \ x \in \mathbf{R}, t > 0$$

$$w(x,0) = f_\pi(x) \ , \ x \in \mathbf{R}$$
$$w_t(x,0) = g_\pi(x) \ , \ x \in \mathbf{R},$$

όπου με f_π και g_π, συμβολίζουμε τις περιττές επεκτάσεις[11] των συναρτήσεων f και g της εκφώνησης, αντίστοιχα. Τότε, όμως, έχουμε προσδιορίσει τη λύση, η οποία είναι:

$$w(x,t) = \frac{1}{2}\big(f_\pi(x-ct) + f_\pi(x+ct)\big) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g_\pi(s)ds \ , \ x \geq 0, t \geq 0.$$

Ελέγχουμε, τώρα, τις συνοριακές συνθήκες:

$$w(0,t) = \frac{1}{2}\big(f_\pi(-ct) + f_\pi(ct)\big) + \frac{1}{2c}\int_{-ct}^{ct} g_\pi(s)ds = 0,$$

εφόσον οι f_π και g_π είναι περιττές συναρτήσεις. Επομένως, για $x > 0$ και $t > 0$ έχουμε $u \equiv w$. όμως μέσα στη συνάρτηση f_π εμφανίζονται οι ποσότητες $x - ct$ και $x + ct$. Η δεύτερη είναι πάντα θετική, αφού το c είναι μία θετικά σταθερά. Επομένως, η λύση που παίρνουμε είναι:

$$u(x,t) = \begin{cases} \frac{1}{2}\big(f(x-ct) + f(x+ct)\big) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(s)ds & , \text{αν } x - ct \geq 0 \\ \\ \frac{1}{2}\big(-f(x-ct) + f(x+ct)\big) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(s)ds & , \text{αν } x - ct < 0 \end{cases}.$$

□

Παρατήρηση. Αναγνωρίζουμε, αρχικά, τον τύπο των συνοριακών συνθηκών και μετά επιλέγουμε την επέκταση που θα χρησιμοποιήσουμε. Ιδιαίτερα, εδώ, έχουμε Dirichlet Σ.Σ. γι΄ αυτό και επιλέγουμε περιττή επέκταση. Αν είχαμε Neumann Σ.Σ. τότε θα επιλέγαμε άρτια απέκταση.

[11] Περιττή επέκταση μίας συνάρτησης $f(x)$, με $x \geq 0$, ονομάζεται η συνάρτηση:

$$f_\pi(x) = \begin{cases} f(x) & , \text{αν } x \geq 0 \\ -f(-x) & , \text{αν } x < 0 \end{cases}.$$

17.3.2015

Παρατήρηση. όσον αφορά στη μονάδικότητα της λύσης ενός προβλήματος, η επαλήθευση δεν βοηθάει. Με άλλα λόγια, εάν έμείς έχουμε υπολογίσει μία λύση ενός προβλήματος που μας δίνεται, και απλά την επαληθεύσουμε, αυτό δε μας δίνει πληροφορία για το αν η συγκεκριμένη λύση είναι μοναδική, ή όχι. Για παράδειγμα, η συνάρτηση e^x επάληθεύει τη διαφορική εξίσωση $f(x) = f'(x)$, αλλά δεν είναι η μοναδική της λύση, καθώς οποιαδήποτε συνάρτηση της μορφής ce^x, είναι λύση.

Παρατήρηση. Κατά τη διαδικασία εύρεσης της ολικής ενέργειας ενός συστήματος προκύπτει το ερώτημα, ποιά είναι αυτή. Η απάντηση είναι ότι ο προσδιορισμός της μπορεί να γίνει με δύο τρόπους. Ο πρώτος είναι ο φυσικός τρόπος, κατα τον οποίο μεταφράζουμε το μαθηματικό πρόβλημα που μας δίνεται στο αντίστοιχο φυσικό φαινόμενο και εκεί ψάχνουμε να δούμε ποιά είναι η ενέργεια. Για παράδειγμα, η ολική ενέργεια μπορεί να είναι το άθροισμα της κινητικής και της δυναμικής ενέργειας. Εν γένει, επειδή είναι δύσκολη ή και αδύνατη η φυσική προσέγγιση ενός προβλήματος, υπολογίζουμε την ολική ενέργεια ως εξής: πολλαπλασιάζουμε το μέλος της διαφορικής εξίσωσης, που εξισώνεται με το 0, με u_t και ύστερα ολοκληρώνουμε στον κώνο εξάρτησης. Τελικά, ως ενέργεια επιλ ;ργουμε τη συνάρτηση που παραγωγίζεται ως προς το χρόνο. Αυτός είναι και ο δεύτερος τρόπος.

Θα λύσουμε, τώρα ένα πρόβλημα, προκειμένου να δούμε και τις δύο προσεγγίσεις σε ότι αφορά στονς υπολογισμό της ολικής ενέργειας ενός συστήματος.

Πρόβλημα 10. Αποδείξτε ότι το Π.Α.Σ.Τ.:

$$u_t = u_{xx} \ , \ 0 < x < l, t > 0$$

$$u(0,t) = u(l,t) = f(t) \ , \ t \geq 0$$

$$u(x,0) = g(x) \ , \ x \in [0,l]$$

έχει το πολύ μία λύση.

Λύση.
Θα εφαρμόσουμε, ξανά, την ενεργειακή μέθοδο. Υποθέτουμε ότι το πρόβλημα μας έχει δύο διακεκριμένες λύσεις u_1 και u_2. Τότε η διαφορά τους $u = u_1 - u_2$ θα είναι λύση του αντίστοιχου ομογενούς προβλήματος:

$$u_t = u_{xx} \ , \ 0 < x < l, t > 0$$

$$u(0,t) = u(l,t) = 0 \ , \ t \geq 0$$

$$u(x,0) = 0 \ , \ x \in [0,l].$$

Η συνάρτηση $u(x,t)$ εκφράζει τη θερμόκρασία στη θέση x τη χρονική στιγμή t, δηλαδή η ολική ενέργεια του συστήματος μας εδώ, είναι η θερμική ενέργεια, δηλαδή η:

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_0^l u^2(x,t)dx.$$

Τότε:

$$E'(t) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^l u^2(x,t)dx = \frac{1}{2}\int_0^l \frac{\partial}{\partial t}u^2(x,t)dx = \int_0^l u(x,t)u_{xx}(x,t) =$$

$$-\int_0^l u_x(x,t)u_x(x,t)dx + u(l,t)u_x(l,t) - u(0,t)u_t(0,t) = -\int_0^l {u_x}^2(x,t)dx \leq 0.$$

Επομένως,

$$0 \leq E(t) \leq E(0) = 0 \Rightarrow E(t) = 0 \Rightarrow u \equiv 0.$$

Αυτή ήταν η φυσική προσέγγιση. Ακολουθώντας την άλλο τρόπο, υπολογίζουμε:

$$\int_0^l u_t(u_t - u_{xx})dx = \int_0^l {u_t}^2 dx - \int_0^l u_t u_{xx} dx = \int_0^l {u_t}^2 dx + \frac{1}{2}\int_0^l \frac{\partial}{\partial t}{u_x}^2 dx = \int_0^l {u_t}^2 dx + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^l {u_x}^2 dx.$$

Επιλέγουμε, λοιπόν, ώς ενέργεια του συστήματος την:

$$\tilde{E}(t) = \frac{1}{2}\int_0^l {u_x}^2 dx.$$

Τότε:

$$\tilde{E}'(t) = \frac{1}{2}\int_0^l 2u_x u_{xt} dx = -\int_0^l {u_{xx}}^2 dx \leq 0,$$

για $t \geq 0$, άρα:

$$0 \leq \tilde{E}(t) \leq \tilde{E}(0) = 0,$$

άρα $u_x \equiv 0$, επομένως $u(x,t) = u(0,t) = 0$, για κάθε $t \geq 0$, συνεπώς $u \equiv 0$.

Παρατήρηση. Ο προσδιορισμός της ενέργειας ενός συστήματος δεν είναι μονοσήμαντος. Μπορούμε, δηλαδή, με διαφορετικούς τρόπους, να βρούμε διαφορετικές συναρτήσεις, οι οποίες να παίζουν το ρόλο της ενέργειας. Μάλιστα, για το συγκεκριμένο πρόβλημα, μπορούμε να ελέγξουμε ότι οποιαδήποτε συνάρτηση της μορφής:

$$E(t) = \frac{1}{p}\int_0^l |u(x,t)|^p dx \ , \ p > 1,$$

μπορεί να λειτουργήσει ως ενέργεια και έτσι να καταλήξουμε στο ζητούμενή αντίφαση, δηλαδή στο αποτέλεσμα $u \equiv 0$.

Περνάμε, τώρα, στην εξίσωση της θερμότητας. έχουμε να λύσουμε το πρόβλημα:

$$u_t(x,t) = u_{xx}(x,t) \ , \ 0 < x < \pi, t > 0$$

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \ , \ t \geq 0$$

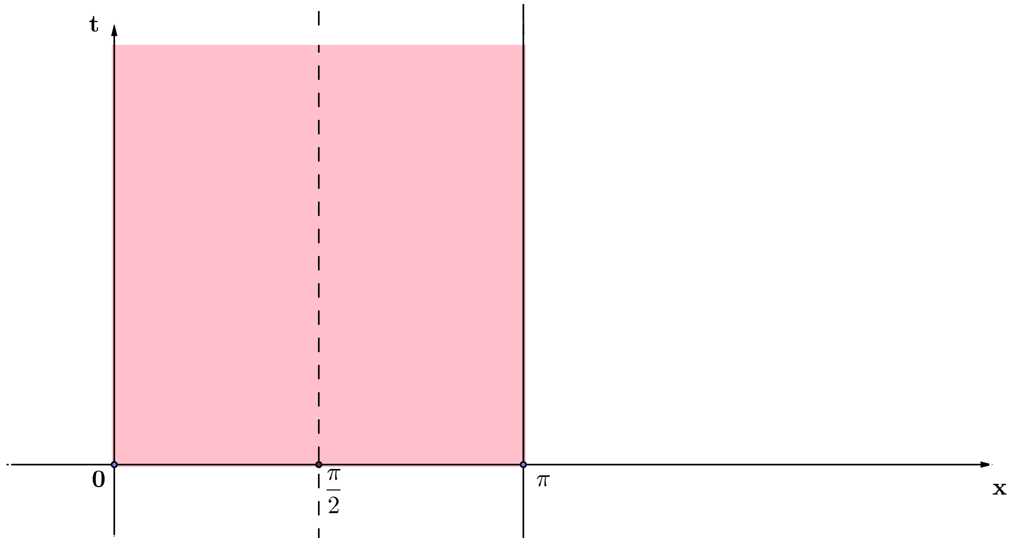
$$u(x,0) = f(x) \ , \ x \in [0,\pi].$$

Αρχικός μας στόχος είναι να βρούμε τη λύση του ανωτέρω προβλήματος. Για να το πετύχουμε αυτό θα κάνουμε κάτι λίγο διαφορετικό. Θα βρούμε τη γενική λύση του προβλήματος

$$u_t(x,t) = u_{xx}(x,t) \ , \ 0 < x < \pi, t > 0,$$

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \ , \ t \geq 0$$

που είναι το ομογενές πρόβλημα χωρίς τις αρχικές συνθήκες. Για να πετύχουμε τον στόχο αυτό θα υπολογίσουμε ‘πολλές’ λύσεις (πέρα από τη μηδενική που είναι πάντοτε λύση) του δεύτερου ομογενούς προβλήματος. Για να επιλύσουμε το πρόβλημα αυτό θα χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο Fourier. Εδώ, το χωρίο στο οποίο δουλεύουμε είναι φραγμένο, όπως φαίνεται παρακάτω:



Παρατηρούμε ότι το χωρίο μας, δηλαδή το χρωματισμένο χωρίο του σχήματος παρουσιάζει χωρική συμμετρία. Πράγματι, η ευθεία $x = \frac{\pi}{2}$ είναι αξονας συμμετρίας του χωρίου μας. έτσι οδηγούμαστε στην προσπάθεια εύρεσης λύσεων της μορφής:

$$u(x,t) = X(x)T(t).$$

Τότε η διαφορική εξίσωση $u_t(x,t) = u_{xx}(x,t)$ γίνεται:

$$X(x)T'(t) = X''(x)T(t) \Rightarrow \left(\frac{X''}{X}\right)(x) = \left(\frac{T'}{T}\right)(t).$$

όμως, εφόσον η εξίσωση μας έχει διαφορετικές μεταβλητές σε κάθε μέλος, οι οποίες μάλιστα είναι σταθερές, τότε κάθε μέλος ισούται με μία σταθερά, δηλαδή:

$$\left(\frac{X''}{X}\right)(x) = \left(\frac{T'}{T}\right)(t) = -\lambda.$$

Ακόμα λαμβάνουμε, ότι:

$$u(0,t) = 0 \Rightarrow X(0)T(t) = 0 \Rightarrow X(0) = 0,$$

εφόσον δε θέλουμε να ισχύει $T \equiv 0$. Ομοίως, προκύπτει και ότι $X(\pi) = 0$. Επομένως, η επίλυση ενός προβλήματος μερικών διαφορικών εξισώσεων ανάγεται στην επίλυση δύο προβλημάτων συνήθων διαφορικών εξισώσεων. Αυτά είναι:

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0 \ , \ 0 < x < \pi$$

$$X(0) = X(\pi) = 0$$

και:

$$T'(t) + \lambda T(t) = 0 \ , \ t \geq 0.$$

Λύνουμε, αρχικά, το πρώτο πρόβλημα, μιας και εκεί έχουμε και την περισσότερη πληροφορία. Η χαρακτηριστική εξίσωση της διαφορικής εξίσωσης $X''(x) + \lambda X(x) = 0$, είναι η:

$$\rho^2 + \lambda = 0.$$

Διακρίνουμε, τώρα, τρεις περιπτώσεις:

1. Εάν $\lambda = 0$, τότε $X''(x) = 0 \Rightarrow X(x) = c_1 x + c_2$, με $0 \leq x \leq \pi$, για κάποιες σταθερές c_1 και c_2. Τότε, από τη σχέση $X(0) = X(\pi) = 0$ προκύπτει ότι $c_1 = 0 = c_2$, δηλαδή $X \equiv 0$. Αυτή, λοιπόν, η περίπτωση, απορρίπτεται.

2. Αν $\lambda < 0$, τότε η εξίσωση $\rho^2 + \lambda = 0$ έχει δύο διακεκριμένες λύσεις, τις $\rho = \pm\sqrt{-\lambda}$. Συνεπώς, η λύση της διαφορικής εξίσωσης είναι η:

$$X(x) = c_1 e^{\sqrt{\lambda}x} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda}x},$$

για κάποιες σταθερές c_1 και c_2. Τότε, όμως, οι συνθήκες $X(0) = X(\pi) = 0$, οδηγούν στο σύστημα:

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ c_1 e^{\sqrt{\lambda}\pi} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda}\pi} = 0 \end{cases},$$

απ΄ όπου εύκολα προκύπτει ξανά, ότι $c_1 = 0 = c_2$. Και αυτή η περίπτωση, λοιπόν, απορρίπτεται.

3. Αν $\lambda > 0$, τότε $\rho = \pm i\sqrt{\lambda}$, δηλαδή υπάρχουν πραγματικές σταθερές c_1 και c_2, τέτοιες ώστε:

$$X(x) = c_1 \cos(\sqrt{\lambda}x) + c_2 \sin(\sqrt{\lambda}x).$$

Τότε:

$$X(0) = 0 \Rightarrow c_1 = 0$$

και:

$$X(\pi) = 0 \Rightarrow c_2 \sin(\sqrt{\lambda}\pi) = 0.$$

όμως, απαιτούμε $c_2 \neq 0$ ώστε να μην οδηγηθούμε ξανά στη μηδενική λύση, άρα θα πρέπει:

$$\sin(\sqrt{\lambda}\pi) = 0 \Rightarrow \lambda = k^2 \ , \ k \in \mathbb{N}.$$

Δηλαδή έχουμε άπειρες τιμές για το λ, οι οποίες εξαρτώνται από το φυσικό αριθμό k, γι᾿ αυτό και το λ, θα το συμβολίζουμε με λ_k. Τα λ_k ονομάζονται *ιδιοτιμές*. Για τον ίδιο λόγο, τη λύση $X(x)$ που αντιστοιχεί σε μία συγκεκριμένη επιλογή του k, δηλαδή σε μία συγκεκριμένη ιδιοτιμή, θα τη συμβολίζουμε με $X_k(x)$. Δηλαδή:

$$X_k(x) = \sin(kx) \ , \ k \in \mathbb{N}.$$

Η συνάρτηση $X_k(x)$ ονομάζεται <u>ιδιοσυνάρτηση που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ_k</u>.

Η μοναδική δεκτή περίπτωση, λοιπόν, είναι η $\lambda = \lambda_k > 0$, όπου $k \in \mathbb{N}$. Σε αυτήν την περίπτωση $\lambda = k^2$ και $X_k(x) = \sin(kx)$. Περνάμε, τώρα στην επίλυση της εξίσωσης:

$$T'(t) + \lambda T(t) = 0$$

Ξανά, η λύση που θα βρούμε θα εξαρτάται από την επιλογή του k, άρα συμβολίζουμε με T_k τη λύση που θα βρούμε. Τότε:

$$T'(t) + \lambda T(t) = 0 \Leftrightarrow T_k'(t) + k^2 T_k(t) = 0 \Rightarrow T_k(t) = ce^{-k^2 t}.$$

Χ.β.τ.γ. μπορούμε να ξεχάσουμε το συντελεστή c για την ώρα, οπότε η λύση που βρίσκουμε είναι η:

$$u_k(x,t) = e^{-k^2 t} \sin(kx).$$

Η γενική λύση, λοιπόν, του προβλήματος:

$$u_t(x,t) = u_{xx}(x,t) \ , \ 0 < x < \pi, t > 0$$

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \ , \ t \geq 0$$

είναι η:

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{+\infty} c_k u_k(x,t) = \sum_{k=1}^{+\infty} c_k e^{-k^2 t} \sin(kx).$$

Οι συντελεστές c_k θα προσδιοριστούναπό τις τις αρχικές συνθήκες που έχουμε (όπως θα δούμε αργότερα).

Τι γίνεται όμως, στην περίπτωση όπου το χωρίο μας είναι άφραχτο; Ας υποθέσουμε πως έχουμε το πρόβλημα:

$$u_t(x,t) = u_{xx}(x,t) \ , \ x > 0, \ \ t > 0$$

$$u(0,t) = 0 \ , \ t \geq 0$$

$$u(x,0) = f(x) \ , \ x \geq 0.$$

Για το πρόβλημα αυτό, θέλουμε να υπολογίσουμε φραγμένες λύσεις. Εφαρμόζουμε, ξανά μέθοδο Fourier. Ψάχνουμε, επομένως, λύσεις της μορφής:

$$u(x,t) = X(x)T(t).$$

Τότε, όπως υπολογίσαμε παραπάνω, η διαφορική εξίσωση μας δίνει τις εξισώσεις:

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0 \text{ και } T'(t) + \lambda T(t) = 0,$$

όπου $\lambda \in \mathbf{R}$. Ακόμα από τη συνοριακή συνθήκη $u(0,t) = 0$, παίρνουμε ότι $X(0) = 0$. Διακρίνουμε, ξανά, τρεις περιπτώσεις:

1. Αν $\lambda = 0$, τότε η λαμβάνουμε τη λύση $X(x) = c_1 x$, όπου c_1 είναι κάποια σταθερά. όμως αυτή η λύση είναι άφραχτη, οπότε απορρίπτεται.

2. Αν $\lambda < 0$ τότε παίρνουμε τη λύση $X(x) = c_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x}$. άρα από το δεδομένο $X(0) = 0$, τότε παίρνουμε ότι $c_1 + c_2 = 0$, δηλαδή $X(x) = c_1\big(e^{\sqrt{-\lambda}x} - e^{-\sqrt{-\lambda}x}\big)$. Τότε, παρατηρούμε ότι για $x \to +\infty$, η συνάρτηση είναιάφρακτη εκτός εαν πάρουμε $c_1 = 0$, δηλαδή η λύση που βρίσκουμε είναι η μηδενική.

3. Κατ΄ ανάγκη, λοιπόν, ισχύει ότι $\lambda > 0$. Τότε η λύση που παίρνουμε ότι:

   $$X(x) = c_1 \cos(\sqrt{\lambda}x) + c_2 \sin(\sqrt{\lambda}x),$$

   οπότε από το δεδομένο $X(0) = 0$, λαμβάνουμε ότι $c_1 = 0$, δηλαδή:

   $$X(x) = c_2 \sin(\sqrt{\lambda}x)$$

Πάλι, λοιπόν, αδηγούμαστε στη λύση·

$$u_\lambda(x,t) = c(\lambda)e^{-\lambda t}\sin(\sqrt{\lambda}x).$$

Τότε, η γενική λύση που παίρνουμε είναι η:

$$u(x,t) = \int_0^{+\infty} c(\lambda)e^{-\lambda t}\sin(\sqrt{\lambda}x)d\lambda.$$

έπειτα υπολογίζουμε τα $c(\lambda)$ από τις αρχικές συνθήκες.

Ξαναγυρνάμε τώρα, στο διακριτό πρόβλημα, δηλαδή για $0 < x < \pi$. Είδαμε, ότι η γενική λύση του προβλήματος:

$$u_t(x,t) = u_{xx}(x,t)\ ,\ 0 < x < \pi, t > 0$$
$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0\ ,\ t \geq 0$$

είναι η:

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{+\infty} c_k u_k(x,t) = \sum_{k=1}^{+\infty} c_k e^{-k^2 t}\sin(kx).$$

Για να λύσουμε τώρα τοπρόβλημα Αρχικών-Συνοριακών Τιμών

$$u_t(x,t) = u_{xx}(x,t)\ ,\ 0 < x < \pi, t > 0$$

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0\ ,\ t \geq 0$$
$$u(x,0) = f(x)\ ,\ x \in [0,\pi]$$

Αν υποθέσουμε ότι η γενική λύση που κατασκευάσαμε είναι 'καλή' δηλαδή μπορούμε να υποθέσουμε ότι οι πράξεις που θα ακολουθήσουν θα μπορέσουμε να κάποια στιγμή να αποδείξουμε ότι σωστά τις κάναμε, τότε μπορούμε να προχωρήσουμε να προσδιορήσουμε τους συντελεστές c_k. Αν υποθέσουμε ότι η γενική λύση είναι συνεχής τότε θα πρέπει να έχουμε

$$u(x,0) = \sum_{k=1}^{+\infty} c_k \sin(kx) = f(x) \Rightarrow \sin(mx)f(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} c_k \sin(kx)\sin(mx)\ ,\ m \in \mathbb{N}$$

κι εφόσον η f είναι ολοκληρώσιμη, παίρνουμε:

$$\int_0^\pi f(x)\sin(mx)dx = \int_0^\pi \left(\sum_{k=1}^{+\infty} c_k \sin(kx)\sin(mx)\right)dx = \sum_{k=1}^{+\infty} c_k \int_0^\pi \sin(kx)\sin(mx)dx.$$

Βέβαια, για να έχει νόημα αυτό, θα πρέπει η αρχική σειρά να συγκλίνει ομοιόμορφα η με κάποιο τρόπο να έχουμε η ιδιότητα των ολοκληρωμάτων που έχουμε εφαρμόσει πιό πάνω. Σε αυτό το σημείο, χρησιμοποιούμε τις τριγωνομετρικές ταυτότητες:

$$\sin A\sin B = \frac{1}{2}\big(\cos(A-B) - \cos(A+B)\big)$$

$$\cos(A \pm B) = \cos A\cos B \mp \sin A\sin B.$$

Βάσει αυτών:

$$\int_0^{\pi} \sin{(kx)}\sin{(mx)}dx = \begin{cases} 0 & \text{, αν } k \neq m \\ \frac{\pi}{2} & \text{, αν } k = m \end{cases}.$$

Επομένως, μένει μονάχα ο m-οστός όρος, άρα:

$$c_m = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin{(mx)}dx \ , \ m = 1, 2, \ldots.$$

έτσι, υπολογίσαμε τους συντελεστές c_k, οι οποίοι ονομάζονται συντελεστές Fourier. Καταλήξαμε επομένως, στην εύρεση κάποιας λύσης του αρχικού προβλήματος μας που είναι:

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin{(kx)}dx\right)e^{-k^2 t}\sin{(kx)}.$$

Θα δούμε αργότερα κάτα πόσο η λύση αυτή ορίζεται καλά η όχι.

19.3.2015

Στην προηγούμενη διάλεξη είχαμε μιλήσει για την εξίσωση της θερμότητας. Είχαμε υπολογίσει τη λύση του προβλήματος:

$$u_t(x,t) = u_{xx}(x,t) \ , \ 0 < x < \pi, t > 0$$
$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \ , \ t \geq 0$$
$$u(x,0) = f(x) \ , \ x \in [0,\pi].$$

Αυτή είναι:

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{+\infty} c_k e^{-k^2 t} \sin(kx),$$

όπου:

$$c_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin(kx) dx.$$

Ακόμα, είδαμε ότι για το αντίστοιχο άφραχτο πρόβλημα η λύση είναι:

$$u(x,t) = \int_0^{+\infty} c(\lambda) e^{-\lambda t} \sin(\sqrt{\lambda} x) dx,$$

όπου $\lambda > 0$. Τότε για $t = 0$, έχουμε:

$$f(x) = \int_0^{+\infty} c(\lambda) \sin(\sqrt{\lambda} x) dx$$

Μέχρι τώρα οι Σ.Σ. που μας δίνονταν για το συγκεκριμένο πρόβλημα ήταν τύπου Dirichlet. Θα επιλύσουμε, τώρα, το ίδιο πρόβλημα με Neumann Σ.Σ.. έστω, λοιπόν, το πρόβλημα:

$$u_t(x,t) = u_{xx}(x,t) \ , \ 0 < x < \pi, t > 0$$
$$u_x(0,t) = u_x(\pi,t) = 0 \ , \ t \geq 0$$
$$u(x,0) = f(x) \ , \ x \in [0,\pi].$$

Όπως και πριν θα βρούμε αρχικά τη γενική λύση του αντίστοιχου ομογενούς προβλήματος:

$$u_t(x,t) = u_{xx}(x,t) \ , \ 0 < x < \pi, t > 0$$
$$u_x(0,t) = u_x(\pi,t) = 0 \ , \ t \geq 0$$

Ψάχνουμε για μη τετριμμένες λύσεις, οι οποίες είναι της μορφής, λόγω συμμετρίας του χωρίου:

$$u(x,t) = X(x)T(t).$$

Εφόσον, δεν αλλάζει η διαφορική εξίσωση, αλλά μόνο οι συνοριακές συνθήκες, τότε παίρνουμε ξανά τις εξισώσεις:

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0 \text{ και } T'(t) + \lambda T(t) = 0.$$

Ακόμα:

$$u_x(0,t) = u_x(\pi,t) = 0 \Rightarrow X'(0) = X'(\pi) = 0$$

Διακρίνουμε, κι εδώ τις περιπτώσεις:

1. Αν $\lambda < 0$, τότε εύκολα διαπιστώνουμε ότι η λύση μας είναι η τετριμμένη οπότε η περίπτωση αυτή είναι αδύνατη.

2. Αν $\lambda = 0$, τότε $X(x) = c_1 x + c_2$, όπου c_1 και c_2 είναι πραγματικές σταθερές. Τότε:

$$X'(0) = 0 \Rightarrow c_1 = 0 \Rightarrow X(x) = c_2.$$

Επομένως, στην ιδιοτιμή $\lambda = 0$ αντιστοιχεί η ιδιοσυνάρτηση:

$$X_0(x) = 1$$

3. Αν $\lambda > 0$, τότε $X(x) = c_1 \cos(\sqrt{\lambda}x) + c_2 \sin(\sqrt{\lambda}x)$. Οπότε:

$$X(x) = -\sqrt{\lambda}\big(c_1 \sin(\sqrt{\lambda}x) + c_2 \cos(\sqrt{\lambda}x)\big).$$

Κι εφόσον $X'(0) = 0$, τότε $c_2 = 0$. Από τη σχέση $X(\pi) = 0$, προκύπτει ότι:

$$-c_1\sqrt{\lambda}\sin(\sqrt{\lambda}\pi) = 0.$$

Κι εφόσον, θέλουμε μη τετριμμένη λύση τότε $c_1 \neq 0$. Τότε:

$$\sin(\sqrt{\lambda}\pi) = 0 \Rightarrow \lambda = k^2 =: \lambda_k \ , \ k \in \mathbb{N}.$$

Η ιδιοτισυνάρτηση που αντιστοιχεί στην ιδιότημή $\lambda_k = k^2$ είναι ή:

$$X_k(x) = \cos(kx) \ , \ k \in \mathbb{N}.$$

Από την εξίσωση:

$$T'(t) + \lambda T(t) = 0,$$

τώρα, αν $\lambda = 0$, τότε $T_0(t) = 0$, ενώ αν $\lambda > 0$, τότε $T_k(t) = e^{-k^2 t}$, όπου $k \in \mathbb{N}$. Επομένως:

$$u_0(x,t) = 1,$$

περίπτωση την οποία θα ξεχωρίζουμε πάντα, και:

$$u_k(x,t) = e^{-k^2 t}\cos(kx) \ , \ k \in \mathbb{N}.$$

Η γενική λύση, συνεπώς, είναι της μορφής:

$$u(x,t) = \frac{c_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} c_k e^{-k^2 t}\cos(kx).$$

Από την αρχική συνθήκη $u(x,0) = f(x)$, θα προσδιορίσουμε τους συντελεστές c_k. έχουμε:

$$f(x) = \frac{c_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} c_k e^{-k^2 t}\cos(kx) \Rightarrow \int_0^{\pi}\left(\frac{c_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} c_k e^{-k^2 t}\cos(kx)\right)dx = \int_0^{\pi} f(x)dx \Rightarrow$$

$$\frac{c_0}{2}\int_0^{\pi} dx + \sum_{k=1}^{+\infty} c_k \int_0^{\pi}\cos(kx)dx = \int_0^{\pi} f(x)dx \Rightarrow c_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)dx.$$

Πολλαπλασιάζοντας με $\cos(mx)$, όπως κάναμε και παραπάνω υπολογίζουμε του συντελεστές Fourier, οι οποίοι είναι της μορφής:

$$c_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos(kx)dx \ , \ k \in \mathbb{N}.$$

Οπότε, τελικά, η λύση είναι:

$$u(x,t) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\pi} f(x)dx + \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\left(\int_0^{\pi} f(x)\cos(kx)dx\right)e^{-k^2 t}\cos(kx)\right),$$

όπου $x \in [0,2\pi]$ και $t \geq 0$.

Πρόβλημα 11. Να αποδείξετε το μονοσήμαντο της λύσης του προβλήματος:

$$u_{tt} - u_{xxtt} - u_{xx} = f(x,t) \ , \ 0 < x < 1, t > 0$$

$$u(x,0) = \phi(x)$$

$$u_t(x,0) = \psi(x)$$

$$u_x(0,t) = h(t)$$

$$u_x(1,t) = g(t).$$

Λύση.
Θεωρούμε δυο διακεκριμένες λύσεις του δοθέντος Π.Α.Σ.Τ. u_1 και u_2. Τότε, η συνάρτηση $u \equiv u_1 - u_2$ είναι λύση του αντίστοιχου ομογενούς προβλήματος:

$$u_{tt} - u_{xxtt} - u_{xx} = 0 \ , \ 0 < x < 1, t > 0$$

$$u(x,0) = 0$$

$$u_t(x,0) = 0$$

$$u_x(0,t) = 0$$

$$u_x(1,t) = 0.$$

Υπολογίζουμε (στο πρόχειρο) το:

$$\int_0^1 (u_t u_{tt} - u_t u_{xxtt} - u_t u_{xx})dx$$

έχουμε:

$$\int_0^1 u_t u_{tt} dx = \int_0^1 \frac{1}{2}({u_t}^2)_t dx = \frac{d}{dt}\int_0^1 \frac{1}{2}{u_t}^2 dx$$

και:

$$-\int_0^1 u_t u_{xxtt} dx = \int_0^1 u_{tx} u_{txt} dx - (u_t u_{xtt})|_0^1 = \int_0^1 \frac{1}{2}({u_{tx}}^2)_t dx = \frac{d}{dt}\int_0^1 \frac{1}{2}{u_{tx}}^2 dx.$$

Τέλος:

$$-\int_0^1 u_t u_{xx} dx = \int_0^1 u_{tx} u_x dx - (u_t u_x)|_0^1 = \int_0^1 \frac{1}{2}({u_x}^2)_t dx = \frac{d}{dt}\int_0^1 \frac{1}{2}{u_x}^2 dx.$$

Επομένως:
$$\int_0^1 (u_t u_{tt} - u_t u_{xxtt} - u_t u_{xx})dx = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1 \left({u_t}^2 + {u_{tx}}^2 + {u_x}^2\right)dx.$$
άρα, επιλέγουμε ως ενέργεια τη συνάρτηση:
$$E(t) = \frac{1}{2}\int_0^1 \left({u_t}^2 + {u_{tx}}^2 + {u_x}^2\right)dx.$$
Τότε, αφού (γιατί ;)
$$E'(t) = 0,$$
έπεται ότι $E(t) = E(0) = 0$, άρα $u_t \equiv 0$. Επομένως $u(x,t) = u(0,t) = 0$, δηλαδή $u \equiv 0 \Rightarrow u_1 \equiv u_2$, το οποίο όμως είναι αντίφαση στην υπόθεση μας ότι οι u_1 και u_2 είναι διακεκριμένες.

24.3.2015

Συνεχίζουμε μελετώντας την εξίσωση της θερμότητας, με τη διαφορά ότι τώρα έχουμε περιοδικές Σ.Σ.. έχουμε, λοιπόν, το πρόβλημα:

$$u_t(x,t) = u_{xx}(x,t) \ , \ x \in [0, 2\pi], t > 0$$

$$u(0,t) = u(2\pi, t) \ , \ t \geq 0$$
$$u_x(0,t) = u_x(2\pi, t) \ , \ t \geq 0$$
$$u(x,0) = f(x) \ , \ 0 \leq x \leq 2\pi.$$

Εδώ, σημαντικό ρόλο θα παίξουν οι περιοδικές συναρτήσεις, δηλαδή οι συναρτήσεις $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, για τις οποίες υπάρχει $T \in \mathbf{R}$ με την ιδιότητα:

$$f(x + T) = f(x) \ , \ \forall x \in \mathbf{R}.$$

Με τη μέθοδο Fourier, ψάχνουμε λύσεις της μορφής:

$$u(x,t) = X(x)T(t).$$

Τότε:

$$u(0,t) = u(2\pi, t) \Leftrightarrow X(0) = X(2\pi),$$
$$u_x(0,t) = u_x(2\pi, t) \Leftrightarrow X'(0) = X'(2\pi)$$

και από τη διαφορική εξίσωση παίρνουμε ξανά:

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0 \text{ και } T'(t) + \lambda T(t) = 0.$$

Λύνουμε το πρόβλημα:

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0$$
$$X(0) = X(2\pi)$$
$$X'(0) = X'(2\pi).$$

Διακρίνουμε τρεις περιπτώσεις, όπως ακριβώς έχουμε κάνει και στιε προηγούμενες περιπτώσεις εφαρμογής της μεθόδου Fourier:

1. Αν $\lambda < 0$, τότε $\rho = \pm\sqrt{-\lambda}$, οπότε παίρνουμε λύση της μορφής:

   $$X(x) = c_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x}.$$

   Τότε:

   $$X(0) = X(2\pi) \Leftrightarrow \left(e^{\sqrt{-\lambda}2\pi} - 1\right)c_1 + \left(e^{-\sqrt{-\lambda}2\pi} - 1\right)c_2 = 0$$

   και:

   $$X'(0) = X'(2\pi) \Leftrightarrow \left(e^{\sqrt{-\lambda}2\pi} - 1\right)c_1 - \left(e^{-\sqrt{-\lambda}2\pi} - 1\right)c_2 = 0.$$

   Οι εξισώσεις, όμως, αυτές αποτελούν ένα σύστημα το οποίο μας δίνει ώς μοναδική λύση την $c_1 = c_2 = 0$. Συνεπώς, η περίπτωση αυτή απορρίπτεται.

2. Αν $\lambda = 0$, τότε $X(x) = c_1 x + c_2$, άρα εύκολα από τη σχέση $X(0) = X(2\pi)$, προκύπτει ότι $c_1 = 0$. Ξεχνώντας σε πρώτη φάση τη σταθερά c_2, η ιδιοσυνάρτηση, που αντιστοιχει στην ιδιοτιμή $\lambda = 0$, είναι η $X_0(x) = 1$.

3. Τέλος, αν $\lambda > 0$, τότε:
$$X(x) = c_1 \cos(\sqrt{\lambda}x) + c_2 \sin(\sqrt{\lambda}x).$$
Τότε:
$$X(0) = X(2\pi) \Leftrightarrow c_1 = c_1 \cos(\sqrt{\lambda}2\pi) + c_2 \sin(\sqrt{\lambda}2\pi)$$
και:
$$c_2 = -c_1 \sin(\sqrt{\lambda}2\pi) + c_2 \cos(\sqrt{\lambda}2\pi).$$
έχουμε λοιπόν το σύστημα:
$$\begin{cases} \big(\cos(\sqrt{\lambda}2\pi) - 1\big)c_1 + \sin(\sqrt{\lambda}2\pi)c_2 = 0 \\ -\sin(\sqrt{\lambda}2\pi)c_1 + \big(\cos(\sqrt{\lambda}2\pi) - 1\big)c_2 = 0 \end{cases}.$$
Η ορίζουσα του συστήματος αυτού είναι:
$$D = \big(\cos(\sqrt{\lambda}2\pi) - 1\big)^2 + \big(\sin(\sqrt{\lambda}2\pi)\big)^2.$$
Για να έχουμε, λοιπόν, άπειρες, μη μηδενικές λύσεις θα πρέπει $D = 0$, ή με άλλα λόγια:
$$\sin(\sqrt{\lambda}2\pi) = 0 \text{ και } \cos(\sqrt{\lambda}2\pi) = 1$$
άρα:
$$\lambda_k := \lambda = k^2 \ , \ k \in \mathbb{N}.$$
Τότε η λύση που λαμβάνουμε είναι η:
$$X_k(x) = c_1 \cos(kx) + x_2 \sin(kx),$$
όπου $k \in \mathbb{N}$ και $c_1, c_2 \in \mathbf{R}$. Στις ιδιοτιμές, λοιπόν, $\lambda_k = k^2$, αντιστοιχεί ένας χώρος ιδιοσυναρτήσεων διάστασης 2, ο οποίος παράγεται από τις γραμμικά ανεξάρτητες συναρτήσεις:
$$X_{k,1}(x) = \cos(kx) \text{ και } X_{k,2}(x) = \sin(kx).$$

Από τη σχέση:
$$T'(t) + \lambda T(t) = 0,$$
εύκολα προκύπτει ότι·
$$T(t) = e^{-k^2 t}.$$
Επομένως, οι λύσεις που βρίσκουμε είναι η $X_0(x) = 1$, η οποία αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda = 0$ και:
$$u_{k,1}(x,t) = \cos(kx)e^{-k^t} \text{ και } u_{k,2}(x,t) = \sin(kx)e^{-k^t}.$$
Η γενική λύση λοιπόν, στο ομογενές πρόβλημά μας είναι η:
$$u(x,t) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \big(\alpha_k \cos(kx) + \beta_k \sin(kx)\big)e^{-k^2 t},$$

όπου $x \in [0, 2\pi]$, $t \geq 0$ και α_i, β_j, οι συντελεστές Fourier. Από την αρχική μας συνθήκη έχουμε:

$$f(x) = u(x,0) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \big(\alpha_k \cos(kx) + \beta_k \sin(kx)\big).$$

Τότε:

$$\alpha_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx$$

$$\alpha_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos(kx) dx$$

$$\beta_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin(kx) dx.$$

Ο συντελεστής των ολοκληρωμάτων παραπάνω, αλλά και σε κάθε υπολογισμό των συντελεστών Fourier, είναι ουσιαστικά το αντίστροφο του μισού μήκους του χωρίου μας. Εδώ, αφού $0 \leq x \leq 2\pi$, τότε το μισό μήκος του διαστήματος είναι ίσο με π άρα το αντίστροφο του είναι $\frac{1}{\pi}$. Στην περίπτωση, όπου $0 < x < \pi$ και $t > 0$, βάσει των όσων ειπώθηκαν η γενική λύση είναι της μορφής:

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \beta_k e^{-k^2 t} \sin(kx),$$

όπου:

$$\beta_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin(kx) dx.$$

Ακόμα, με τον ίδιο ακριβώς τρόπο, προκύπτει ότι, αν είχαμε το πρόβλημα:

$$u_t(x,t) = u_{xx}(x,t) \ , \ 0 < x < l, t > 0$$

$$u(0,t) = u(l,t) = 0$$

$$u(x,0) = f(x),$$

τότε η γενική λύση θα ήταν:

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \beta_k e^{-(k\frac{\pi}{l})^2 t} \sin(k\frac{\pi}{l}x),$$

όπου:

$$\beta_k = \frac{2}{l\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin(k\frac{\pi}{l}x) dx.$$

Περνάμε, τώρα, στην κυματική εξίσωση. Θεωρούμε το Π.Α.Σ.Τ.:

$$u_{tt}(x,t) = u_{xx}(x,t) \ , \ 0 < x < \pi, t > 0$$

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0, \quad t > 0$$

$$u(x,0) = f(x)$$

$$u_t(x,0) = g(x).$$

Ψάχνουμε λύσεις της μορφής:

$$u(x,t) = X(x)T(t).$$

Τότε:

$$u_{tt}(x,t) = u_{xx}(x,t) \Leftrightarrow X''(x)T(t) = X(x)T''(t) \Leftrightarrow \frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda \Rightarrow \begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \\ T''(t) + \lambda T(t) = 0 \end{cases} .$$

Ακόμα:

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \Leftrightarrow X(0) = X(\pi) = 0.$$

Λύνουμε, λοιπόν, το πρόβλημα:

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0$$
$$X(0) = X(\pi) = 0.$$

Τότε εφαρμόζοντας την ίδια διαδικασία όπως και για την εξίσωση της θερμότητας, τότε βρίσκουμε ότι οι ιδιοτιμές μας είναι οι $\lambda_k = k^2$, όπου $k \in \mathbb{N}$, και οι αντίστοιχες ιδιοσυναρτήσεις είναι οι:

$$X_k(x) = \sin(kx).$$

Ακόμα, από τη σχέση:

$$T''(t) + \lambda T(t) = 0,$$

έπεται ότι:

$$T(t) = c_2 \cos(kt) + c_2 \sin(kt).$$

Η γενική λύση, λοιπόν, είναι η:

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \big(\alpha_k \cos(kx) + \beta_k \sin(kx)\big) \sin(kx).$$

Τότε:

$$f(x) = u(x,0) = \sum_{k=1}^{+\infty} \alpha_k \sin(kx)$$

και:

$$g(x) = u_t(x,0) = \sum_{k=1}^{+\infty} k\beta_k \sin(kx).$$

Οι συντελεστές Fourier είναι:

$$\alpha_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin(kx) dx$$
$$\beta_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} g(x) \sin(kx) dx.$$

Περνάμε, τώρα, στη βασική μορφή της ελλειπτικής εξίσωσης:

$$u_{xx}(x,y) + u_{yy}(x,y) = 0.$$

Οι λύσεις της είναι οι αρμονικές συναρτήσεις. Εδώ, δεν έχουμε χρονική μεταβλητή. Ουσιαστικά η εξίσωση αυτή, φανερώνει τη συμπεριφορά της εξίσωσης της θερμότητας για μεγάλους χρόνους. Θεωρούμε, ακόμα, τα συνοριακά δεδομένα:

$$u(x,0) = f(x) \ , \ 0 \leq x \leq l$$

$$u(0,y) = 0 = u(l,y)$$
$$u(x,\pi) = 0.$$

Και πάλι, ψάχνουμε λύσεις στη μορφή Fourier, δηλαδή στη μορφή:

$$u(x,y) = X(x)Y(y).$$

Τότε:

$$u(0,y) = 0 = u(l,y) \Leftrightarrow X(0) = X(l) = 0$$

και:

$$u(x,\pi) = 0 \Leftrightarrow Y(\pi) = 0.$$

Ακόμα η διαφορική εξίσωση μας δίνει τις δύο συνήθεις διαφορικές εξισώσεις:

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0 \text{ και } Y''(y) - \lambda Y(y) = 0.$$

έχουμε λοιπόν, να λύσουμε τα συστήματα:

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0$$
$$X(0) = X(l) = 0$$

και:

$$Y''(y) - \lambda Y(y) = 0$$
$$Y(\pi) = 0.$$

Εξετάζουμε, το πρώτο σύστημα. Μετά από διερεύνηση, βρίσκουμε ότι οι ιδιοτιμές μας είναι οι:

$$\lambda_k = \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2$$

και οι αντίστοιχες ιδιοσυναρτήσεις είναι οι:

$$X_k(x) = \sin\left(\frac{k\pi}{l}x\right).$$

έπειτα, υπολογίζουμε:

$$Y''(y) - \lambda Y(y) = 0 \Leftrightarrow Y(y) = c_3 e^{\frac{k\pi}{l}y} + c_4 e^{-\frac{k\pi}{l}y}.$$

Τότε:

$$Y(\pi) = 0 \Leftrightarrow c_4 = -c_3 e^{\frac{2k\pi}{l}},$$

επομένως, οι ιδιουναρτήσεις που βρίσκουμε είναι οι:

$$Y_k(y) = c_k\big(e^{\frac{k\pi}{l}y} - e^{\frac{2k\pi}{l} - \frac{k\pi}{l}y}\big)\ ,\ 0 < y < \pi.$$

Συνεπώς:

$$u_k(x,y) = \sin(k\frac{\pi}{l}x)\big(e^{\frac{k\pi}{l}y} - e^{\frac{2k\pi}{l} - \frac{k\pi}{l}y}\big)$$

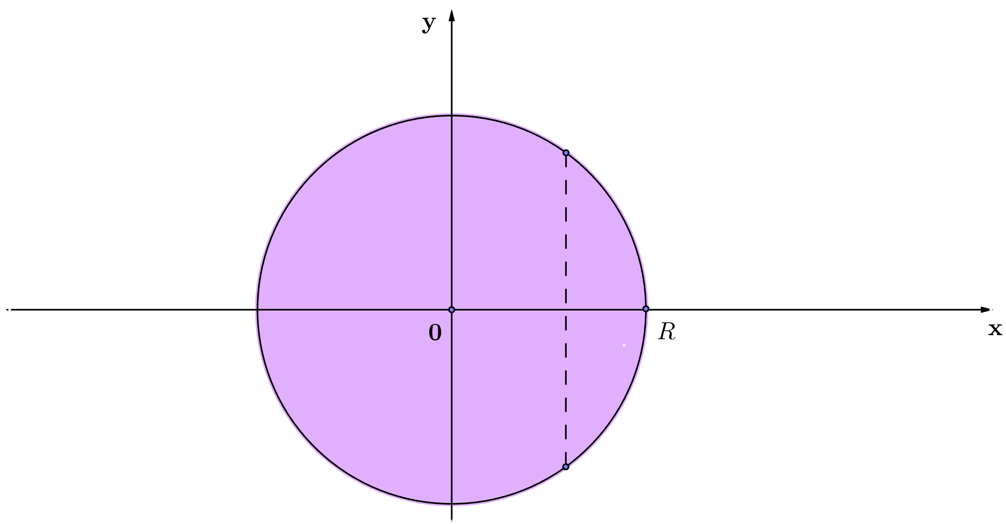
Η γενική, λοιπόν, λύση στο πρόβλημά μας, είναι η:

$$u(x,y) = \sum_{k\in\mathbb{N}} c_k u_k(x,y).$$

Από το δεδομένο $f(x) = u(x,0)$, προκύπτει ότι:

$$f(x) = \sum_{k\in\mathbb{N}} c_k(1-e^{\frac{2k\pi^2}{l}})\sin{(\frac{k\pi}{l}x)} \Rightarrow c_k = \frac{2}{l(1-e^{\frac{2k\pi^2}{l}})}\int_0^l f(x)\sin{(\frac{k\pi}{l}x)}dx.$$

Μέχρι τώρα, τα χωρία στα οποία δουλέυαμε έχουν σχήμα παραλληλογραμμου, φραγμένου ή άφραχτου, και σε αυτό παρατηρούσαμε τις συμμετρίες και βγάζαμε αποτελέσματα. Τί γίνεται, όμως, στην περίπτωση, όπου το χωρίο μας είναι ένας δίσκος, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα·

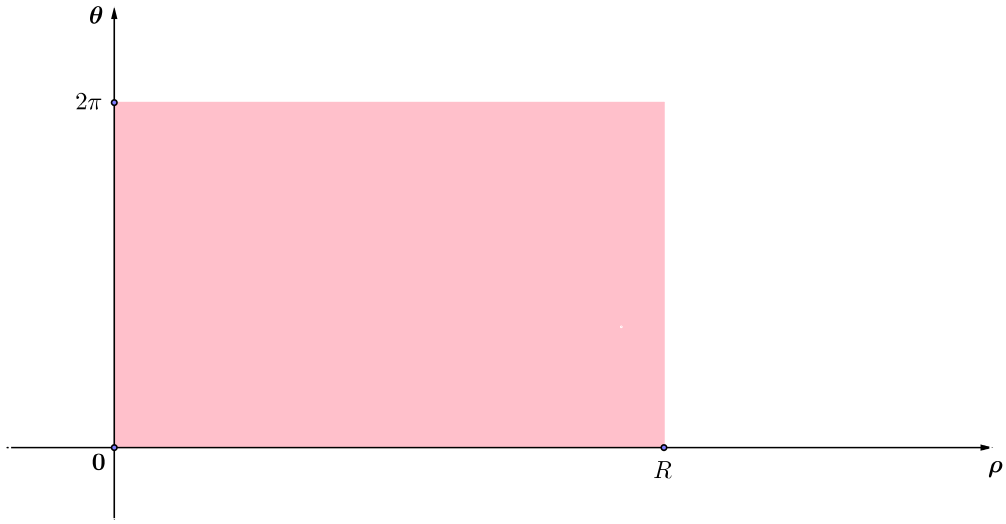


Τότε δεν έχουμε ανεξαρτησία, δηλαδή οι λύσεις μας δεν είναι της μορφής $X(x)Y(y)$. Πάρ' όλ' αυτά μπορούμε να εφαρμόσουμε πολικές συντεταγμένες:

$$x = \rho\cos{(\theta)}$$

$$y = \rho\sin{(\theta)},$$

όπου $0 \leq \rho \leq R$ και $0 \leq \theta < 2\pi$ και τότε το χωρίο μας μετασχηματίζεται στο παρακάτω:



Εστω, λοιπόν, το πρόβλημα:

$$u_{xx}(x,y) + u_{yy}(x,y) = 0 \ , \ x^2 + y^2 < R$$

Εφαρμόζωντας πολικές συντεταγμένες παίρνουμε:

$$u(x,y) = U(\rho,\theta),$$

όπου:

$$x = \rho\cos(\theta)$$
$$y = \rho\sin(\theta),$$

με $0 \leq \rho \leq R$ και $0 \leq \theta < 2\pi$. Θέλουμε να υπολογίσουμε τα $\rho_x, \rho_{xx}, \theta_y$ και θ_{yy}. έχουμε τις σχέσεις:

$$\rho^2 = x^2 + y^2 \text{ και } \tan\theta = \frac{y}{x}.$$

Τότε:

$$\rho^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow 2\rho\rho_x = 2x \Rightarrow \rho_x = \frac{x}{\rho} \Rightarrow \rho_x = \cos\theta.$$

Ομοίως:

$$\rho_y = \sin\theta.$$

Ακόμα, από τη σχέση $\frac{d}{dt}(\tan t) = \frac{1}{(\cos t)^2}$, έπεται ότι:

$$(\tan\theta)_x = \frac{d}{dx}\left(\frac{y}{x}\right) \Rightarrow (\tan^2\theta + 1)\theta_x = -\frac{y}{x^2} \Rightarrow (\frac{y^2}{x^2} + 1)\theta_x = -\frac{y}{x^2} \Rightarrow \theta_x = -\frac{\sin\theta}{\rho}.$$

Ομοίως προκύπτει ότι:

$$\theta_y = \frac{\cos\theta}{\rho}.$$

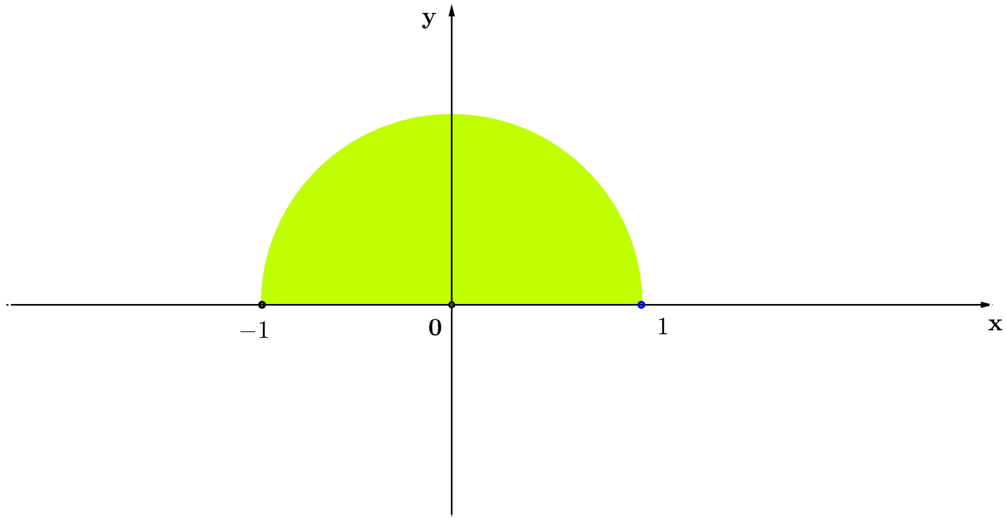
Επιπρόσθετα:

$$\rho_{xx} = (\cos\theta)_x = -\sin\theta \cdot \theta_x = \frac{\sin^2\theta}{\rho}$$

και όμοια:
$$\rho_{yy} = \frac{\cos^2\theta}{\rho}$$
και μετά από πράξεις προκύπτει ότι:
$$\theta_{xx} = \frac{2\cos\theta\sin\theta}{\rho^2}.$$
Τέλος μετά από υπολογισμούς:
$$\theta_{yy} = -\frac{2\cos\theta\sin\theta}{\rho^2}.$$
Ανακεφαλαιώνουμε τις σχέσεις που μέχρι τώρα έχουμε:
$$\rho_x = \cos\theta$$
$$\rho_y = \sin\theta$$
$$\theta_x = -\frac{\sin\theta}{\rho}$$
$$\theta_y = \frac{\cos\theta}{\rho}$$
$$\rho_{xx} = \frac{\sin^2\theta}{\rho}$$
$$\rho_{yy} = \frac{\cos^2\theta}{\rho}$$
$$\theta_{xx} = \frac{2\cos\theta\sin\theta}{\rho^2}$$
$$\theta_{yy} = -\frac{2\cos\theta\sin\theta}{\rho^2}.$$
Τότε, έχουμε:
$$u_x = U_\rho \cdot \rho_x + U_\theta \cdot \theta_x \Rightarrow u_{xx} = (\rho_x)^2 U_{\rho\rho} + 2\rho_x\theta_x U_{\rho\theta} + (\theta_x)^2 U_{\theta\theta} + U_\rho\rho_{xx} + U_\theta\theta_{xx}.$$
Ομοίως:
$$u_{yy} = (\rho_y)^2 U_{\rho\rho} + 2\rho_y\theta_y U_{\rho\theta} + (\theta_y)^2 U_{\theta\theta} + U_\rho\rho_{yy} + U_\theta\theta_{yy}.$$
Επομένως (, μετά από εξαντλητικές πράξεις!), προκύπτει ότι:
$$\boxed{u_{xx}(x,y) + u_{yy}(x,y) = 0 \Leftrightarrow U_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho}U_\theta + \frac{1}{\rho^2}U_{\theta\theta} = 0.}$$

Πρόβλημα 12. Να λυθεί το πρόβλημα:
$$u_{xx}(x,y) + u_{yy}(x,y) = 0$$
$$u(x,0) = 0$$
$$u(1,\theta) = \sin\theta \ , \ 0 < \theta < \pi$$

Λύση.
Το χωρίο στο οποίο δουλεύουμε είναι το:

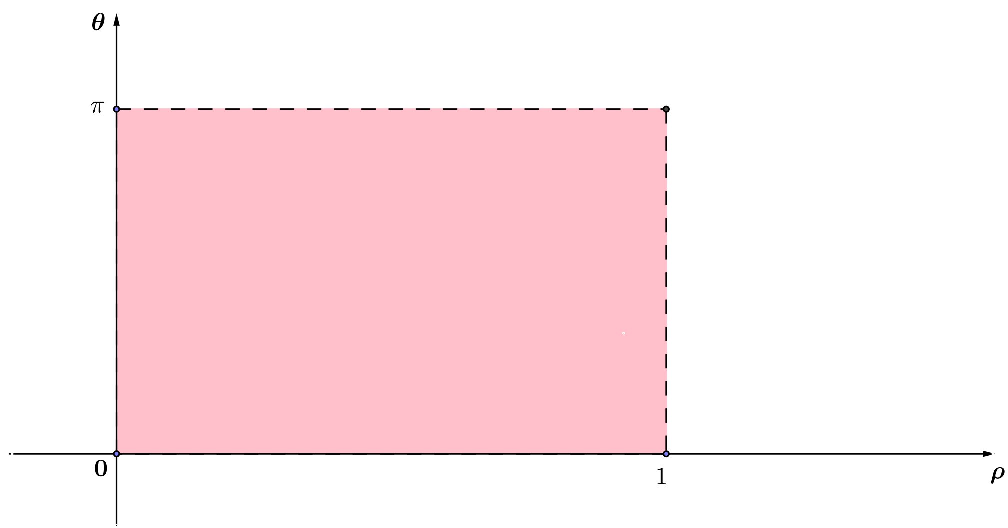


Μετα το μετασχηματισμό:

$$x = \rho \cos(\theta)$$

$$y = \rho \sin(\theta),$$

όπου $0 < \rho < 1$ και $0 < \theta < \pi$, το χωρίο μας μετασχηματίζεται στο:



Τώρα, μπορούμε να εφαρμόσουμε τη μέθοδο Fourier.

31.3.2015

Υπενθυμίζουμε κάποια στοιχεία από την προηγούμενη διάλεξη. Εάν έχουμε το πρόβλημα:

$$u_{xx}(x,y) + u_{yy}(x,y) = 0 \ , \ x^2 + y^2 < 1$$

$$u(x,y) = f(\theta) \ , \ x^2 + y^2 = 1,$$

τότε εφαρμόζοντας το μετασχηματισμό:

$$x = \rho\cos\theta \ , \ y = \rho\sin\theta,$$

δηλαδή παίρνοντας πολικές συντεταγμένες, έχουμε ότι:

$$u(x,y) = U(\rho,\theta)$$

και προκύπτει το σύστημα:

$$U_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho}U_\theta + \frac{1}{\rho^2}U_{\theta\theta} = 0 \ , \ 0 < \rho < 1, 0 \leq \theta < 2\pi.$$

$$U(1,\theta) = f(\theta) \ , \ 0 \leq \theta < 2\pi.$$

Σε αυτό το πρόβλημα, τώρα, θα εφαρμόσουμε τη μέθοδο Fourier. Ψαχνουμε, λοιπόν, λύσεις της μορφής:

$$U(\rho,\theta) = R(\rho)\Theta(\theta),$$

οι οποίες θα πρέπει να είναι φραγμένες. Λόγω της συνέχειας της U, θα πρέπει να ισχύει:

$$\Theta(0) = \Theta(2\pi).$$

Λόγω της συνέχειας της U_θ θα πρέπει:

$$\Theta'(0) = \Theta'(2\pi).$$

Δηλαδή έχουμε περιοδικές συνοριακές συνθήκες. Τέλος, η διαφορική μας εξίσωση γίνεται:

$$\rho^2\frac{R''(\rho)}{R(\rho)} + \rho\frac{R'(\rho)}{R(\rho)} + \frac{\Theta''(\theta)}{\Theta(\theta)} = 0.$$

έτσι οδηγούμαστε στα συστήματα:

$$\Theta''(\theta) + \lambda\Theta(\theta) = 0 \ , \ 0 < \theta < 2\pi$$

$$\Theta(0) = \Theta(2\pi)$$
$$\Theta'(0) = \Theta'(2\pi)$$

και:

$$\rho^2R''(\rho) + \rho R'(\rho) - \lambda R(\rho) = 0.$$

Ξεκινώντας από το πρόβλημα με την περισσότερη πληροφορία, δηλαδή το πρώτο, υπολογίζουμε ότι οι ιδιοτιμές μας είναι οι $\lambda_0 = 0$ και $\lambda_k = k^2$ με $k \in \mathbb{N}$ και οι αντίστοιχες ιδιοσυναρτήσεις είναι οι $\Theta_0(\theta) = 1$ και $\Theta_{k,1}(\theta) = \cos(k\theta)$ και $\Theta_{k,2}(\theta) = \sin(k\theta)$. Για το δεύτερο πρόβλημα, αν $\lambda = \lambda_0 = 0$ έχουμε:

$$\rho R''(\rho) + \rho R'(\rho) = 0 \ , \ 0 < \rho < 1 \Rightarrow \rho R''(\rho) + R'(\rho) = 0 \Rightarrow \big(\rho R'(\rho)\big)' = 0 \Rightarrow$$

$$R'(\rho) = \frac{c_1}{\rho} \Rightarrow \big(R(\rho) - c_1 \ln \rho\big)' = 0 \Rightarrow R(\rho) = c_1 \ln \rho + c_2 \ , \ \rho > 0$$

Εφόσον επιζητούμε φραγμένες λύσεις, η $R(\rho)$ πρέπει να είναι φραγμένη. Αν $c_1 \neq 0$, τότε παίρνοντας $\rho \to 0^+$ η λύση που βρίσκουμε τείνει στο άπειρο. Κατ΄ ανάγκη, λοιπόν, ισχύει $c_1 = 0$. άρα:

$$R_0(\rho) = 1.$$

Επομένως, στην ιδιοτιμή $\lambda_0 = 0$, αντιστοιχεί η συνάρτηση $U_0(\rho, \theta) = 1$. Είμαστε, τώρα, στην περίπτωση όπου $\lambda_k = k^2$. Τότε, η διαφορική μας εξίσωση είναι η:

$$\rho^2 R''(\rho) + \rho R'(\rho) - k^2 R(\rho) = 0 \ , \ 0 < \rho < 1.$$

Η, εν λόγω, διαφορική εξίσωση είναι διαφορική εξίσωση του Euler και έχει συγκεκριμένες λύσεις. Αυτές είναι της μορφής:

$$R(\rho) = \rho^m.$$

Επομένως:

$$\rho^2 R''(\rho) + \rho R'(\rho) - k^2 R(\rho) = 0 \Leftrightarrow \rho^2 m(m-1)\rho^{m-2} + m\rho^m - k^2 \rho^m = 0 \to m^2 - k^2 = 0 \Rightarrow m = \pm k.$$

Η γενική λύση επομένως είναι η:

$$R(\rho) = c_1 \rho^k + c_2 \rho^{-k} \ , \ k \in \mathbb{N}, 0 < \rho < 1.$$

Ξανά, θέλουμε η λύση μας να είναι φραγμένη για $0 < \rho < 1$ οπότε επιλέγουμε $C_2 = 0$. άρα:

$$R_k(\rho) = \rho^k.$$

Οπότε, στις ιδιοτιμές λ_k αντιστοιχούν οι ιδιοσυναρτήσεις:

$$U_{k,1}(\rho, \theta) = \rho^k \cos(k\theta) \ , \ U_{k,2}(\rho, \theta) = \rho^k \sin(k\theta).$$

Τελικά η μέθοδος Fourier μας δίνει τη γενική λύση για το πρόβλημά μας, η οποία είναι η:

$$U(\rho, \theta) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \rho^k \big(\alpha_k \cos(k\theta) + \beta_k \sin(k\theta)\big).$$

Θέλουμε, τώρα, η γενική λύση που υπολογίσαμε να 'αισθάνεται' τις συνοριακές συνθήκες, άρα:

$$f(\theta) = U(1, \theta) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \big(\alpha_k \cos(k\theta) + \beta_k \sin(k\theta)\big).$$

Επομένως, υπολογίζουμε τους συντελεστές Fourier από τις σχέσεις:

$$\alpha_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \cos(k\theta) d\theta \ , \ k = 0, 1, 2, \ldots$$

$$\alpha_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\sin(k\theta)d\theta \ , \ k=1,2,\ldots.$$

έτσι, συσχετίσαμε την συνάρτηση f με τη σειρά Fourier:

$$\frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty}\big(\alpha_k\cos(k\theta) + \beta_k\sin(k\theta)\big),$$

και είδαμε ότι ισχύει ισότητα μεταξύ των δύο.

Εγείρεται συνεπώς, το ερώτημα, εάν ισχύει πάντα η ισότητα:

$$f(\theta) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty}\big(\alpha_k\cos(k\theta) + \beta_k\sin(k\theta)\big).$$

Τι σημαίνει να μην ισχύει η ισότητα· Κάτι τέτοιο θα σήμαινε ότι η σειρά Fourier που προέκυψε, δε συγκλίνει καν! Μέχρι τώρα, ακολουθήσαμε μία υπολογιστική διαδικασία βάσει της οποίας εμφανίστηκε μία σειρά συναρτήσεων. Τίποτα, όμως, δεν μας εξασφάλισε ότι αυτή η σειρά συγκλίνει, έτσι ώστε να αποφανθούμε για τη λύση του προβλήματος. Για να ελέγξουμε τη σύγκλιση της σειράς Fourier, θεωρούμε την ακολουθία των μερικών αθροισμάτων αυτής:

$$\begin{aligned}
S_N(\rho,\theta) &= \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{N}\rho^k\big(\ a_k\cos(k\theta) + \beta_k\sin(k\theta)\big)\\
&= \frac{1}{2\pi} + \sum_{k=1}^{N}\rho^k\left(\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos(kt)dt\cdot\cos(k\theta) + \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin(kt)dt\cdot\sin(k\theta)\right)\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\left(1 + 2\sum_{k=1}^{N}\rho^k\cos\big(k(t-\theta)\big)\right)dt.
\end{aligned}$$

Ονομάζουμε:

$$A_N = 1 + 2\sum_{k=1}^{N}\rho^k\cos\big(k(t-\theta)\big).$$

Θέλουμε να υπολογίσουμε το A_N. Για να το κάνουμε αυτό χρησιμοποιούμε τον τύπο του Euler:

$$e^{ix} = \cos x + i\sin x.$$

έτσι έχουμε:

$$\tilde{A}_N := 1 + 2\sum_{k=1}^{N}\rho^k\big(\cos(k(t-\theta)) + i\sin(k(t-\theta))\big) = 1 + 2\sum_{k=1}^{N}\rho^k e^{ik(t-\theta)} = 1 + 2\sum_{k=1}^{N}\left(\rho e^{i(t-\theta)}\right)^k$$

$$1 + 2\left(\rho e^{i(t-\theta)}\right)\sum_{k=1}^{N}\left(\rho e^{i(t-\theta)}\right)^{k-1} = 1 + 2\rho e^{i(t-\theta)}\cdot\frac{\left(\rho e^{i(t-\theta)}\right)^N - 1}{\rho e^{i(t-\theta)} - 1}.$$

Αν θέσουμε $x = \rho e^{i(t-\theta)}$ με $|x| < 1$, τότε:

$$\tilde{A}_N \to \frac{1+x}{1-x}\ , \ N \to +\infty.$$

Ισοδύναμα:

$$\tilde{A}_N \to \frac{1+\rho e^{i(t-\theta)}}{1-\rho e^{i(t-\theta)}} \ , \ |\rho| < 1.$$

Τότε:

$$A_N = Re(\tilde{A}_N),$$

όπου με $Re(\tilde{A}_N)$ συμβολίζουμε το πραγματικό μέρος του $\tilde{A}_N$. Επομένως, μετά από πράξεις βρίσκουμε ότι:

$$\lim_{N\to+\infty} \tilde{A}_N = \frac{1-\rho^2}{1-2\rho\cos(t-\theta)+\rho^2} + i \cdot \frac{2\rho\sin(t-\theta)}{1-2\rho\cos(t-\theta)+\rho^2}.$$

Και από τη σχέση:

$$\lim_{N\to+\infty} A_N = Re\big(\lim_{N\to+\infty} \tilde{A}_N\big),$$

έπεται ότι:

$$A_N \to \frac{1-\rho^2}{1-2\rho\cos(t-\theta)+\rho^2} \ , \ |\rho| < 1.$$

Η σύγκλιση αυτή είναι κατά σημείο, ενώ είναι ομοιόμορφη όταν $|\rho| \leq a < 1$, για κάθε $a > 0$. Συνεπώς για $|\rho| < 1$, το κατά σημείο όριο $\lim_{N\to+\infty} S_N(\rho,\theta)$ υπάρχει και είναι ίσο μέ:

$$\lim_{N\to+\infty} S_N(\rho,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\frac{1-\rho^2}{1-2\rho\cos(t-\theta)+\rho^2}dt = U(\rho,\theta).$$

Αυτός ονομάζεται τύπος Poisson για εύρεση λύσης με $|\rho| < 1$.

Η συνάρτηση

$$K(t,\rho,\theta) = \frac{1}{2\pi}\frac{1-\rho^2}{1-2\rho\cos(t-\theta)+\rho^2}$$

οναμάζεται πυρήνας Poisson.

Σειρές Fourier

Θεωρούμε ακολουθία συνεχών συναρτήσεων $X_i : [\alpha,\beta] \to \mathbf{R}$ με $i = 1, 2, \ldots$. Στις $\mathbf{C}[\alpha,\beta]$ συναρτήσεις ορίζουμε το εσωτερικό γινόμενο ως εξής:

$$\langle f, g\rangle = \int_\alpha^\beta f(t)g(t)dt.$$

Τι σημαίνει γενικά, ότι το $\langle f, g\rangle$ είναι εσωτερικό γινόμενο· Ουσιαστικά πρόκειται για μία απεικόνιση:

$$\langle\cdot,\cdot\rangle : \mathbf{C}[\alpha,\beta] \times \mathbf{C}[\alpha,\beta] \to \mathbf{R} \ , \ (f,g) \longmapsto \int_\alpha^\beta f(t)g(t)dt,$$

η οποία ικανοποιεί της ιδιότητες:

1. $\langle f, f\rangle \geq 0$,
2. $\langle f, f\rangle = 0 \Leftrightarrow f \equiv 0$

3. $\langle f, g\rangle = \langle g, f\rangle$

4. $\langle \lambda f + \mu g, h\rangle = \lambda\langle f, g\rangle + \mu\langle g, h\rangle$ (γραμμικότητα ως προς την πρώτη μεταβλητή)

5. $|\langle f, g\rangle| \leq \langle f, f\rangle^{1/2} \cdot \langle g, g\rangle^{1/2}$ (ανισότητα Cauchy-Schwarz)

Με τη βοήθεια του εσωτερικού γινομένου ορίζουμε τη νόρμα:

$$\|f\| = \sqrt{\langle f, f\rangle}.$$

έτσι οι f και g θα είναι κάθετες ($f \perp g$) εάν, και μόνο εάν:

$$\langle f, g\rangle = 0.$$

Λέμε ότι οι X_i είναι ορθογώνιες συναρτήσεις όταν:

$$\langle X_i, X_j\rangle = 0 \ , \ \forall i \neq j.$$

Η παρατήρηση, εδώ, είναι όι σε διαφορετικές ιδιοτιμές οι ιδιοσυναρτήσεις είναι κάθετες. έστω, τώρα ότι έχουμε μία βάση $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ ενός διανυσματικού χώρου. Τότε το τυχαίο διάνυσμα u θα γράφεται στη μορφή:

$$u = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i.$$

Τότε, όμως:

$$u \cdot u_j = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i u_j = \lambda_j {u_j}^2 \Rightarrow \lambda_j = \frac{u \cdot u_j}{\|u_j\|^2}.$$

Η ακολουθία των X_i, που αναφέραμε παραπάνω, αποτελεί ορθοκανονικό σύστημα τότε, και μόνο τότε, όταν:

$$\langle X_i, X_j\rangle = {\delta_{ij}}^{12} = \begin{cases} 0 & , \text{αν } i \neq j \\ 1 & , \text{αν } i = j \end{cases}.$$

Θεώρημα 2. *έστω $X \in \mathbf{C}[\alpha, \beta]$. Τότε για κάθε n-άδα $c_1, c_2, \ldots, c_n \in \mathbf{R}$ ισχύει η ανισότητα:*

$$\int_{\alpha}^{\beta} |X(t) - c_1 X_1(t) - \cdots - c_n X_n(t)|^2 dt \geq \int_{\alpha}^{\beta} |X(t) - a_1 X_1(t) - \cdots - a_n X_n(t)|^2 dt,$$

όπου:

$$a_i = \frac{\int_{\alpha}^{\beta} X(t) X_i(t) dt}{\int_{\alpha}^{\beta} {X_i}^2(t) dt} \ , \ i = 1, 2, \ldots.$$

[12] Εννοούμε το δ του Kronecker.

02.04.2015

Έχουμε μιλήσει για ορθογώνια συστήματα συναρτήσεων $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, όπου $X_n : [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$. Για τις συναρτήσεις αυτές ισχύει για το εσωτερικό γινόμενο ότι:

$$\langle X_n, X_m\rangle = 0 \ , \ \forall n \neq m.$$

Εν γένει, το εσωτερικό γινόμενο δύο συναρτήσεων f και g είναι:

$$\langle f, g\rangle = \int_\alpha^\beta f(t)g(t)dt.$$

Βλέπουμε, τώρα, ότι αν $X \in [\alpha,\beta]$, τότε η συνάρτηση:

$$A_i = \frac{\langle X, X_i\rangle}{\langle X_i, X_i\rangle},$$

είναι ο i-οστός συντελεστής Φουριερ του αναπτύγματος της X. Δηλαδή, αν η X αναπτύσσεται ως σειρά Fourier τότε:

$$X \sim \sum_{j=1}^{+\infty} A_i X_i.$$

Πράγματι, για τυχαίο $k \in \mathbb{N}$ έχουμε:

$$\langle X, X_k\rangle = \langle \sum_{k=1}^{+\infty} A_i X_i, X_k\rangle = \sum_{j=1}^{+\infty} \langle A_i X_i, X_k\rangle = \sum_{j=1}^{+\infty} A_i\langle X_i, X_k\rangle = A_k\langle X_k, X_k\rangle \Rightarrow A_k = \frac{\langle X, X_k\rangle}{\langle X_k, X_k\rangle}.$$

Θεώρημα 3. *Έστω $X_k : [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$ ορθογώνιο σύστημα συναρτήσεων και $X : [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$ τυχαία συνάρτηση. Για κάθε n-άδα πραγματικών αριθμών $c_1, c_2, \ldots, c_n$ ισχύει η ανισότητα:*

$$\int_\alpha^\beta |X(x) - \sum_{i=1}^n c_i X_i(x)|^2 dx \geq \int_\alpha^\beta |X(x) - \sum_{i=1}^n A_i X_i(x)| dx,$$

όπου A_i οι συντελεστές Fourier:

$$A_i = \frac{\int_\alpha^\beta X(t)X_i(t)dt}{\int_\alpha^\beta {X_i}^2(t)dt} \ , \ i = 1, 2, \ldots.$$

Απόδειξη. Έχουμε:

$$\|X - \sum_{i=1}^n c_i X_i\|_2 \geq \|X - \sum_{i=1}^n A_i X_i\|_2.$$

Τότε:

$$\int_\alpha^\beta |X(x) - \sum_{i=1}^n c_i X_i(x)|^2 dx = \left(\|X - \sum_{i=1}^n c_i X_i(x)\|_2\right)^2 =$$

$$\int_\alpha^\beta \left(X^2(x) + \sum_{i=1}^n c_i {X_i}^2(x) - 2\sum_{i=1}^n c_i X(x) X_i(x) + 2\sum_{i<j} c_i c_j X_i(x) X_j(x) \right) dx =$$

$$\int_\alpha^\beta X^2(x)dx + \sum_{i=1}^n {c_i}^2 \int_\alpha^\beta {X_i}^2(x) + \sum_{i=1}^m \left({c_i}^2 \int_\alpha^\beta {X_i}^2(x)dx - 2c_i \int_\alpha^\beta X(x)X_i(x)dx \right) =$$

$$\int_\alpha^\beta X^2(x)dx + \sum_{i=1}^n \int_\alpha^\beta \left({c_i}^2 {X_i}^2(x){X_i}^2(x) - 2c_i X(x)X_i(x) + X^2(X) - X^2(X) \right) dx =$$

$$\int_\alpha^\beta X^2(x)dx + \sum_{i=1}^n \int_\alpha^\beta (c_i X_i(x) - X(x))^2 dx - n\int_\alpha^\beta X^2(x)dx = (*).$$

Θέλουμε, λοιπόν, να ελαχιστοποίησουμε τη συνάρτηση:

$$\phi(c_i) = {c_i}^2 \int_\alpha^\beta {X_i}^2(x)dx = 2c_i \int_\alpha^\beta X(x)X_i(x)dx,$$

ως προς c_i. Αυτό το κάνουμε με τη μέθοδο της συμπλήρωσης τετραγώνου, επομένως:

$$(*) = \int_\alpha^\beta \sum_{i=1}^n \left(\int_\alpha^\beta X^2(x) \left(c_i - \frac{\int_\alpha^\beta X(x)X_i(x)dx}{\int_\alpha^\beta {X_i}^2(x)dx} \right)^2 - \frac{\left(\int_\alpha^\beta X(x)X_i(x)dx \right)^2}{\int_\alpha^\beta {X_i}^2(x)dx} \right) =$$

$$\int_\alpha^\beta X^2(x)dx - \sum_{i=1}^m \frac{\left(\int_\alpha^\beta X(x)X_i(x)dx \right)^2}{\int_\alpha^\beta {X_i}^2(x)dx}$$

$$\int_\alpha^\beta X^2(x)dx - \sum_{i=1}^n \left(\int_\alpha^\beta {X_i}^2(x)dx A_i^2 \right) dx.$$

Επιλέγουμε, τώρα, $c_i = A_i$, άρα:

$$\int_\alpha^\beta |X(x) - \sum_{i=1}^n|^2 = \int_\alpha^\beta X^2(x)dx - \sum_{i=1}^n \int_\alpha^\beta {X_i}^2(x){A_i}^2 \geq 0 \Rightarrow$$

$$0 \leq \sum_{i=1}^n \int_\alpha^\beta {X_i}^2(x)dx \cdot {A_i}^2 \leq \int_\alpha^\beta X^2(x)dx.$$

Η ακολουθία:

$$s_n = \sum_{i=1}^n \int_\alpha^\beta {X_i}^2(x)dx$$

είναι φραγμένη για κάθε $n \in \mathbb{N}$, άρα η σειρά συγκλίνει, οπότε:

$$\sum_{i=1}^{+\infty} \int_\alpha^\beta {X_i}^2(x)dx \cdot A_i \leq \int_\alpha^\alpha X^2(x)dx.$$

$\square$

Ορισμός 1. *Η ανισότητα:*

$$\sum_{i=1}^{+\infty} \int_{\alpha}^{\beta} {X_i}^2(x)dx \cdot A_i \leq \int_{\alpha}^{\alpha} X^2(x)dx$$

ονομάζεται ανισότητα Bessel.