



Παρασκευή 2 Οκτωβρίου 2020

Διδάσκοντες: Θ. Μήτσος, Α. Τερτίκας

ΑΝΑΛΥΣΗ Ι

Φυλλάδιο 1

1)[⊗]. Δίδονται τα σύνολα:

$$A = \left\{ \frac{1}{n+1} \mid n \in \mathbf{N} \right\},$$

$$B = \left\{ \frac{1}{1+x} \mid x \in [0, +\infty) \right\}.$$

$$C = \left\{ 2 + \frac{(-1)^n}{n} \mid n \in \mathbf{N} \right\},$$

Δείξτε ότι όλα τα παραπάνω σύνολα είναι άνω και κάτω φραγμένα και βρείτε τα \sup και τα \inf αυτών. Σε ποιές περιπτώσεις ορίζεται το \max και \min των παραπάνω συνόλων;

2)[⊗]. Αποδείξτε ότι κάθε άπειρο υποσύνολο του \mathbf{N} δεν είναι άνω φραγμένο.

3)[⊗]. Αποδείξτε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $n \in \mathbf{N}$ ώστε $\frac{1}{2^n} < \varepsilon$.

4)[⊗] α) Βρείτε $m, n \in \mathbf{N}$ ώστε να ισχύει

$$2020 < \sqrt{3} \frac{m}{n} < 2021$$

β) Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί a, b , $a < b$. Αποδείξτε ότι υπάρχουν $p \in \mathbf{Z}$, $q \in \mathbf{N}$ ώστε να ισχύει

$$a < \sqrt{3} \frac{p}{q} < b.$$

5). Δίνεται το σύνολο

$$A = \{x \in \mathbf{R} \mid 0 < x \text{ και } x^2 + 2000x < 2020\}.$$

Αποδείξτε ότι το σύνολο A είναι μη κενό, άνω και κάτω φραγμένο σύνολο. Αποδείξτε με χρήση του αξιώματος της πληρότητας ότι το $\sup A$ ικανοποιεί την εξίσωση

$$(\sup A)^2 + 2000 \sup A = 2020,$$

και επομένως η εξίσωση

$$x^2 + 2000x = 2020$$

έχει θετική λύση (ρίζα).

6). Δίνονται τα $\emptyset \neq A, B \subset \mathbf{R}$ φραγμένα σύνολα. Αποδείξτε ότι και το σύνολο $A \cup B$ είναι φραγμένο επίσης. Προσδιορίστε με απόδειξη τα $\sup(A \cup B)$, $\inf(A \cup B)$ σαν συνάρτηση των $\sup A$, $\sup B$, $\inf A$, $\inf B$.

7). Αποδείξτε ότι το σύνολο

$$\left\{ \frac{m}{2^n} : m \in \mathbf{Z}, n \in \mathbf{N} \right\}$$

είναι πυκνό στο \mathbf{R} .

8). Αν ο ξ είναι άρρητος, δείξτε ότι το σύνολο

$$\{n\xi - [n\xi] : n \in \mathbf{N}\}$$

είναι άπειρο. Ισχύει το ίδιο αν $\xi \in \mathbf{Q}$;

Οι ασκήσεις για παράδοση σημειώνονται με \otimes

Η παράδοση των ασκήσεων θα γίνεται με αποστολή στο analysis1.tellab@gmail.com
μέχρι τις 14:00 της Παρασκευής 9 Οκτωβρίου 2020.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!