



Παρασκευή 4 Δεκεμβρίου 2020

Διδάσκοντες: Θ. Μήτσης, Α. Τερτίκας

ΑΝΑΛΥΣΗ Ι
Φυλλάδιο 10

1)⊗. Για $x \in \mathbf{R}$ και $y > 0$ αποδείξτε την ανισότητα

$$xy \leq e^x + y(\ln y - 1).$$

2)⊗. Έστω $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ παραγωγίσιμη σε κάποιο x_0 με $f(x_0) > 0$. Υπολογίστε το όριο της ακολουθίας

$$x_n = \left[\frac{f(x_0 + \frac{1}{n})}{f(x_0)} \right]^{\frac{1}{n}}.$$

3)⊗. Έστω $f : (0, 1) \rightarrow \mathbf{R}$ είναι 2 φορές παραγωγίσιμη και επιπρόσθετα ισχύει

$$|f''(x)| \leq 2020, \quad \forall x \in (0, 1).$$

Αποδείξτε ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $(0, 1)$.

4) ⊗. Έστω $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ παραγωγίσιμη ώστε

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) > 0.$$

Δείξτε ότι

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

5). Έστω $f, g : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ συνεχείς συναρτήσεις, παραγωγίσιμες στο $(0, 1)$ που επιπρόσθετα ικανοποιεί $f(0) = f(1) = 0$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $\xi \in (0, 1)$ ώστε να ισχύει

$$g'(\xi)f(\xi) + f'(\xi) = 0.$$

6). Έστω $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbf{R}$ μια παραγωγίσιμη και ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση. Δείξτε ότι υπάρχει ακολουθία θετικών αριθμών ξ_n τέτοια ώστε $\xi_n \rightarrow +\infty$ και η $f'(\xi_n)$ είναι φραγμένη. Συμπεράνετε ότι αν η παράγωγος μιας παραγωγίσιμης συνάρτησης τείνει στο $\pm\infty$ (καθώς $x \rightarrow +\infty$), τότε η συνάρτηση δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής.

7). Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη στο 0, $f(0) = 0$ και $f'(0) \neq 0$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, θέτουμε

$$a_n = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{x}{k}\right).$$

Υπολογίστε το όριο τής a_n .

8). Έστω $f : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ είναι παραγωγίσιμη με $f(0) = f(1) = 0$. Επιπρόσθετα υποθέτουμε ότι η f είναι 2 φορές παραγωγίσιμη στο $(0, 1)$ και ικανοποιεί

$$|f''(x)| \leq M, \quad \forall x \in (0, 1).$$

Αποδείξτε ότι ισχύει

$$|f'(x)| \leq \frac{M}{2}, \quad \forall x \in [0, 1].$$

Οι ασκήσεις για παράδοση σημειώνονται με \otimes

Η παράδοση των ασκήσεων θα γίνεται με αποστολή στο analysis1.tellab@gmail.com μέχρι τις 14:00 της Παρασκευής 11 Δεκεμβρίου 2020.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!