ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Παρασκευή 11 Δεκεμβρίου 2020

Διδάσκοντες: Θ. Μήτσης, Α. Τερτίκας

ΑΝΑΛΥΣΗ Ι

Φυλλάδιο 11

1)$^{\otimes}$. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμη σε κάποιο x_0 με $f(x_0)>0$. Υπολογίστε το όριο τής ακολουθίας

$$y_n=\left[\frac{f(x_0+\frac{1}{n})}{f(x_0)}\right]^n .$$

2)$^{\otimes}$. Έστω $x_1,\dots,x_n\in(0,\pi)$. Δείξτε ότι

$$(\sin x_1)\cdots(\sin x_n)\le\left[\sin\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}\right]^n .$$

3)$^{\otimes}$. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ κυρτή και φραγμένη. Δείξτε ότι η f είναι σταθερή.

4) $^{\otimes}$. Η συνάρτηση f είναι 3 φορές παραγωγίσιμη στο $[-1,1]$ και τέτοια ώστε

$$f(-1)=f(0)=f'(0)=0,\qquad f(1)=1 .$$

Δείξτε οτι υπάρχει σημείο $\xi\in(-1,1)$ τέτοιο ώστε $f^{(3)}(\xi)\ge 3$.

Υπόδειξη: Χρησιμοποιώντας Θ. Taylor στο $(0,1)$ και στο $(-1,0)$ δείξτε οτι υπάρχουν $s\in(0,1)$ και $t\in(-1,0)$ τέτοια ώστε:

$$f^{(3)}(s)+f^{(3)}(t)=6 .$$

5). Έστω $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ μια κυρτή συνάρτηση ώστε $\lim_{x\to 0}f(x)=0$. Θεωρούμε την

$$g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}\quad\text{με}\quad g(x)=\frac{f(x)}{x}.$$

Δείξτε ότι η g είναι αύξουσα.

6). Έστω ότι $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μια κυρτή συνάρτηση. Δείξτε ότι η δεξιά (και η αριστερή) παράγωγος τής f υπάρχει σε κάθε σημείο, και είναι αύξουσα.

7). Έστω $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ κυρτή συνάρτηση. Τότε ένα από τα ακόλουθα είναι σωστό:

α) Η f είναι αύξουσα στο (a, b).

β) Η f είναι φθίνουσα στο (a, b).

γ) Υπάρχει $x_0 \in (a, b)$ ώστε η f είναι φθίνουσα στο $(a, x_0]$ και αύξουσα στο $[x_0, b)$.

Υπόδειξη: Μπορείτε να θεωρήστε και να διακρίνετε περιπτώσεις για το σύνολο

$$A = \{x \in (a, b) \mid \forall t,\ a < t < x \quad \text{ισχύει} \quad \frac{f(t) - f(x)}{t - x} \leq 0.\}$$

8). α) Δώστε παράδειγμα κυρτής συνάρτησης $f : (0, 1) \to \mathbf{R}$ που να μην είναι ομοιόμορφα συνεχής.

β) Έστω $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ κυρτή συνάρτηση. Αποδείξτε ότι η g είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $(0, 1)$.

γ) Δώστε παράδειγμα κυρτής συνάρτησης $g : [0, 1] \to \mathbf{R}$ που να μην είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[0, 1]$.

Οι ασκήσεις για παράδοση σημειώνονται με $\otimes$

Η παράδοση των ασκήσεων θα γίνεται με αποστολή στο analysis1.tellab@gmail.com
μέχρι τις 14:00 της Παρασκευής 18 Δεκεμβρίου 2020.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!