ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Παρασκευή 18 Δεκεμβρίου 2020

Διδάσκοντες: Θ. Μήτσης, Α. Τερτίκας

ΑΝΑΛΥΣΗ Ι

Φυλλάδιο 12 (ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΟ)

1). α) Δοθέντος $\epsilon > 0$ βρείτε φυσικό αριθμό $n_0 = n_0(\epsilon)$ τέτοιο ώστε

$$\frac{2n+1}{n^2+1} < \epsilon, \qquad n \geq n_0 \ .$$

Επαληθεύστε την ανισότητα για την επιλογή σας.

β) Δίδεται ακολουθία a_n για την οποία ισχύει

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 1.$$

Αποδείξτε ότι υπάρχει $n_0 \in \mathbf{N}$ τέτοιος ώστε

$$a_n > \frac{4}{5}, \qquad n \geq n_0 \ .$$

2). Αν $a_n \to a$ και $b_n \to b$, δείξτε ότι $\max\{a_n, b_n\} \to \{a, b\}$.

3). Δίδεται η συναρτήση

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x}, & x \in \mathbf{Q} \setminus \{0\} \\ x^3 \sin\frac{1}{x}, & x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q} \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

(α) Δείξτε οτι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x = 0$. Βρείτε την παράγωγο στο σημείο αυτό.
(β) Δείξτε οτι η f δεν είναι παραγωγίσιμη στούς άρρητους ($x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$).

4). Έστω

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Δείξτε ότι δεν υπάρχει g τέτοια ώστε $g' = f$.

5). Η ακολουθία a_n είναι άνω φραγμένη ενώ η b_n είναι θετική και τέτοια ώστε

$$\lim_{n\to\infty} b_n = b > 0.$$

Δείξτε ότι
$$\overline{\lim_{n\to+\infty}}\ \frac{a_n}{b_n}=\frac{\overline{\lim}_{n\to+\infty}a_n}{\lim_{n\to+\infty}b_n}\ .$$

6). Θεωρήστε δεδομένο ότι $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\to e$, και έστω x_n μια ακολουθία θετικών αριθμών τέτοια ώστε $x_n\to+\infty$. Δείξτε ότι
$$\left(1+\frac{1}{x_n}\right)^{x_n}\to e.$$

7). Να εξεταστούν ως προς την ομοιόμορφη συνέχεια οι συναρτήσεις: $f,g:(0,+\infty)\to\mathbf{R}$ με τύπους
$$f(x)=\ln x,\ \ x>0,\qquad g(x)=x\sin\frac{1}{x},\ \ x>0.$$

8). Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ κυρτή. Δείξτε ότι η f είναι Lipschitz σε κάθε φραγμένο διάστημα.

9). α) Αποδείξτε τις ανισότητες
$$\frac{1}{x}>\ln\left(\frac{1+x}{x}\right)>\frac{1}{x+1},\qquad\qquad x>0\ .$$
β) Αποδείξτε οτι η ακολουθία
$$\gamma_n=\ln n-\left(1+\frac{1}{2}+\dots\frac{1}{n}\right)\ ,$$
συγκλίνει.

10). Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ συνεχής και αύξουσα, και έστω a_n μια φραγμένη ακολουθία. Δείξτε ότι
$$f(\limsup a_n)=\limsup f(a_n)\quad \text{και}\quad f(\liminf a_n)=\liminf f(a_n).$$

11). Έστω $\{a_n\}$ φραγμένη ακολουθία με $a_n\geq 1$. Δείξτε ότι
α)
$$\limsup\frac{1}{a_n}=\frac{1}{\liminf a_n}\ .$$
β) Αν επιπρόσθετα
$$\limsup a_n\cdot\limsup\frac{1}{a_n}=1\ ,$$
αποδείξτε τότε ότι η $\{a_n\}$ συγκλίνει.

12). Έτσω x_n θετική, αύξουσα και φραγμένη. Δείξτε ότι η σειρά
$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(1-\frac{x_n}{x_{n+1}}\right)$$

συγκλίνει.

13). (α) Αν η σειρά θετικών όρων $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει, δείξτε οτι και η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{1+\frac{1}{n}} \ ,$$

συγκλίνει επίσης.
(β) Ελέγξετε ως προς την σύγκλιση την σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}} \ .$$

14). Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση τη σειρά

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{e^{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}}}.$$

15). Δίδεται η συνάρτηση $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ για την οποία ισχύει

$$e^{f(x)} + f(x) - x = 0, \qquad\qquad x \in \mathbf{R} \ .$$

Αποδείξτε ότι
(α) Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση και ικανοποιεί:

$$f''(x) + (f'(x))^2 \geq 0, \qquad\qquad x \in \mathbf{R} \ .$$

(β) Η $f^{-1} : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ είναι καλά ορισμένη συνάρτηση, είναι παραγωγίσιμη και ικανοποιεί

$$(f^{-1})'(y) = 1 + e^y, \qquad\qquad y \in \mathbf{R} \ .$$

16). Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση που στέλνει συγκλίνουσες ακολουθίες σε συγκλίνουσες ακολουθίες. Δείξτε ότι η f είναι συνεχής.

17). Βρείτε ομοιόμορφα συνεχή συνάρτηση $f : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ τέτοια ώστε να μην αληθεύει

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x+\frac{1}{x})}{f(x)} = 1.$$

18). Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση τέτοια ώστε για κάθε $x \in \mathbb{Q}$, το $f(x)$ είναι ακέραιος. Δείξτε ότι η f είναι σταθερή.

19). Η συνάρτηση f είναι μια φορά συνεχώς παραγωγίσιμη στο $[a, b]$, δύο φορές παραγωγίσιμη στο (a, b) και τέτοια ώστε

$$f(a) = f(b), \ \ f'(a) = f'(b) = 0.$$

Δείξτε οτι υπάρχουν δύο διαφορετικά σημεία $\xi, \eta \in (a, b)$ τέτοια ώστε $f''(\xi) = f''(\eta)$.

20). Έστω $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση με φραγμένη n-οστή παράγωγο για κάποιο n. Δείξτε ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής.

Το Επαναληπτικό φυλλάδιο δεν είναι για παράδοση

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!