



Παρασκευή 9 Οκτωβρίου 2020

Διδάσκοντες: Θ. Μήτσος, Α. Τερτίκας

ΑΝΑΛΥΣΗ Ι

Φυλλάδιο 2

Σημείωση: Στα παρακάτω, οι συμβολισμοί $\lim x_n$ και $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$ είναι ισοδύναμοι.

1)[⊗]. α) Εάν ισχύει:

$$x < \epsilon, \quad \forall \epsilon > 0,$$

αποδείξτε ότι

$$x \leq 0.$$

β) Έστω $x > 0$, $y > 0$ για τα οποία ισχύει:

$$x > \epsilon y, \quad \forall 0 < \epsilon < 2,$$

αποδείξτε ότι

$$x \geq 2y.$$

2)[⊗]. Δίνεται η ακολουθία $\{a_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ για την οποία ισχύει:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a,$$

με $a < 0$. Αποδείξτε (με χρήση του ορισμού) ότι υπάρχει $n_0 \in \mathbf{N}$ ώστε να ισχύει

$$\frac{3a}{2} \leq a_n \leq \frac{a}{2}, \quad \forall n \geq n_0.$$

3)[⊗]. Δίνεται η ακολουθία $\{a_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ για την οποία ισχύει:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a.$$

Αποδείξτε με χρήση του ορισμού (και όχι με χρήση θεωρήματος) ότι

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n^2 = a^2.$$

4)[⊗]. Για μια ακολουθία x_n και έναν αριθμό x , εξετάστε αν κάποια από τις κατευθύνσεις τής παρακάτω ισοδυναμίας είναι αληθής:

“ $\lim x_n = x$ αν και μόνο αν για κάθε $\varepsilon > 0$, άπειρο πλήθος όρων της ακολουθίας απέχουν από το x απόσταση μικρότερη από ε .”

5). Έστω $x \in \mathbf{R}$. Αποδείξτε ότι υπάρχουν:

α) φθίνουσα ακολουθία $\{a_n\}_{n \in \mathbf{N}} \subset \mathbf{Q}$ ώστε να ισχύει

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = x,$$

β) αύξουσα ακολουθία $\{b_n\}_{n \in \mathbf{N}} \subset \mathbf{R} - \mathbf{Q}$ ώστε να ισχύει

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = x.$$

6). Έστω μια ακολουθία x_n τέτοια ώστε $x_{n+1} = 1 + x_n$ για κάθε n . Δείξτε χρησιμοποιώντας τον ορισμό τού ορίου ότι η x_n δεν συγκλίνει.

7). Εξετάστε αν οι παρακάτω ισχυρισμοί είναι αληθείς:

1. Αν $\lim x_n^2 = x^2$ τότε $\lim x_n = x$.

2. Αν $\lim \frac{x_n+1}{x_n} = 1$ τότε η x_n συγκλίνει.

8). Έστω x_n μια συγκλίνουσα ακολουθία η οποία παίρνει μόνο δύο τιμές. Δείξτε ότι από κάποιο όρο και μετά η ακολουθία είναι σταθερή.

Οι ασκήσεις για παράδοση σημειώνονται με \otimes

Η παράδοση των ασκήσεων θα γίνεται με αποστολή στο analysis1.tellab@gmail.com μέχρι τις 14:00 της Παρασκευής 16 Οκτωβρίου 2020.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!