ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Παρασκευή 23 Οκτωβρίου2020

Διδάσκοντες: Θ. Μήτσης, Α. Τερτίκας

ΑΝΑΛΥΣΗ Ι

Φυλλάδιο 4

1)$^{\otimes}$. Να υπολογίστε τα $\underline{\lim}$, $\overline{\lim}$ των ακολουθιών

$$a_n = \frac{n-1}{n+1}\,\cos\frac{n\pi}{3}, \quad b_n = \frac{2n}{3} - \left[\frac{2n}{3}\right], \quad c_n = \frac{n^2}{5} - \left[\frac{n^2}{5}\right], \quad n \in \mathbf{N}.$$

2)$^{\otimes}$. Έστω x_n μια φραγμένη ακολουθία μη αρνητικών όρων τέτοια ώστε $\limsup x_n \le \varepsilon$ για κάθε $\varepsilon > 0$. Δείξτε ότι $x_n \to 0$. Ισχύει το ίδιο χωρίς την υπόθεση $x_n \ge 0$;

3)$^{\otimes}$. Έστω x_n μια φραγμένη ακολουθία ώστε $\liminf x_n < a$ για κάποιο a. Δείξτε ότι άπειροι όροι τής ακολουθίας είναι μικρότεροι από a. Είναι αλήθεια ότι τελικά (από κάποιο δείκτη και μετά), όλοι οι όροι τής x_n είναι μικρότεροι από a;

4) $^{\otimes}$. α) Δίνεται η ακολουθία $\{a_n\}$ τέτοια ώστε

$$\underline{\lim}_{n\to+\infty}\ a_n \ = \ a.$$

Αποδείξτε ότι

$$\forall \epsilon > 0, \ \ \exists n_0 \in \mathbf{N}, \ \ \text{ώστε} \ \ a_n \ge a - \epsilon, \ \ \forall n \ge n_0.$$

β) Δίνεται η ακολουθία $\{x_n\}$ τέτοια ώστε $x_n > 0$ και

$$\underline{\lim}_{n\to+\infty}\ \frac{x_{n+1}}{x_n} \ = \ l > 1.$$

Αποδείξτε ότι

$$\lim_{n\to+\infty} x_n \ = \ +\infty\ .$$

5). Να εξεταστούν ως προς την σύγκλιση οι σειρές

$$a)\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2+n}{n^4+1}, \quad b)\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2-n}{n^3+1}, \quad c)\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n\ \sin\frac{1}{n}}{n^2+1}.$$

Μπορείτε να θεωρήσετε γνωστό ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ αποκλίνει, ενώ η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ συγκλίνει.

6). Δίνεται η ακολουθία $\{a_n\} \subset \mathbf{R}^+$, και ότι η σειρά

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{1+a_n}$$

συγκλίνει. Αποδείξτε τότε τη σύγκλιση της σειράς

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n^2}{1+a_n^2}.$$

7). Έστω x_n μια ακολουθία θετικών αριθμών ώστε $x_n \to 0$. Δείξτε ότι υπάρχει υπακολουθία x_{k_n} ώστε η σειρά

$$\sum_{n=1}^{+\infty} x_{k_n}$$

συγκλίνει.

8). Έτσω x_n μια ακολουθία θετικών αριθμών ώστε

$$\sum_{n=1}^{+\infty} x_n = +\infty.$$

Θέτουμε

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} x_k.$$

Δείξτε χρησιμοποιώντας το κριτήριο Cauchy ότι

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x_n}{s_n} = +\infty.$$

Οι ασκήσεις για παράδοση σημειώνονται με $\otimes$

Η παράδοση των ασκήσεων θα γίνεται με αποστολή στο analysis1.tellab@gmail.com μέχρι τις 14:00 της Παρασκευής 30 Οκτωβρίου 2020.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!