



Παρασκευή 30 Οκτωβρίου 2020

Διδάσκοντες: Θ. Μήτσος, Α. Τερτίκας

ΑΝΑΛΥΣΗ Ι
Φυλλάδιο 5

1)⊗. Να εξεταστούν ως προς τη σύγκλιση οι σειρές

$$a) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(\ln(n+1))^3}, \quad b) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(\ln(n+1))^\theta}, \quad 0 < \theta < 1.$$

2)⊗. Να εξεταστεί ως προς τη σύγκλιση η σειρά

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{n}{\ln(n!)} \right)^p, \quad p > 0.$$

3)⊗. Δίνεται ότι η σειρά

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2$$

συγκλίνει. Αποδείξτε ότι

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n}|a_n| = 0.$$

4) ⊗. Έστω $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ και $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ δυο συγκλίνουσες σειρές μη αρνητικών όρων. Δείξτε ότι η σειρά

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n + b_n)^K$$

συγκλίνει για κάθε $K \in \mathbb{N}$.

5). Δείξτε ότι αν μια ακολουθία θετικών αριθμών ικανοποιεί την υπόθεση του κριτηρίου λόγου, τότε ικανοποιεί και την υπόθεση του κριτηρίου ρίζας. Βρείτε μια συγκλίνουσα σειρά θετικών όρων για την οποία το κριτήριο ρίζας εφαρμόζεται ενώ το κριτήριο λόγου όχι.

6). Βρείτε παραδείγματα μη αρνητικών συναρτήσεων f στο $[1, +\infty)$ ώστε

$$1. \sum_{n=1}^{+\infty} f(n) < +\infty \text{ και } \int_1^{+\infty} f(x) dx = +\infty.$$

$$2. \sum_{n=1}^{+\infty} f(n) = +\infty \text{ και } \int_1^{+\infty} f(x) dx < +\infty.$$

7). α) Δίνεται η φθίνουσα συνάρτηση $f : [1, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ Αποδείξτε αρχικά ότι ισχύει

$$\sum_{k=1}^n 2^{k-1} f(2^k) \leq \int_1^{2^n} f(x) dx \leq \sum_{k=1}^n 2^{k-1} f(2^{k-1})$$

Συμπεράνατε ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_1^{+\infty} f(x) dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_1^A f(x) dx$ υπάρχει αν και μόνο αν συγκλίνει η σειρά

$$\sum_{k=1}^{+\infty} 2^{k-1} f(2^{k-1}).$$

β) Έστω η ακολουθία $\{a_n\}$ φθίνουσα με μη αρνητικούς όρους και ορίζουμε τη συνάρτηση $f : [1, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ με τύπο

$$f(x) = a_n, \quad n \leq x < n+1, \quad n \in \mathbf{N}.$$

Αποδείξτε ότι ισχύει:

$$\sum_{k=1}^n 2^{k-1} a_{2^k} \leq \int_1^{2^n} f(x) dx \leq \sum_{k=1}^n 2^{k-1} a_{2^{k-1}}$$

Συμπεράνατε (το κριτήριο συμπίκνωσης για τη σειρά της $\{a_n\}$ Δηλ.) η σειρά

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$$

συγκλίνει αν και μόνο αν η σειρά

$$\sum_{k=1}^{+\infty} 2^k a_{2^k}$$

συγκλίνει.

8). Έστω a_n ακολουθία θετικών όρων, που είναι τέτοια ώστε

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n \ln \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} \right) = l, \quad l > 1.$$

Αποδείξτε τη σύγκλιση της σειράς

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n.$$

Οι ασκήσεις για παράδοση σημειώνονται με \otimes

Η παράδοση των ασκήσεων θα γίνεται με αποστολή στο analysis1.tellab@gmail.com μέχρι τις 14:00 της Παρασκευής 6 Νοεμβρίου 2020.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!