



Παρασκευή 6 Νοεμβρίου 2020

Διδάσκοντες: Θ. Μήτσος, Α. Τερτίκας

ΑΝΑΛΥΣΗ Ι
Φυλλάδιο 6

1)[⊗]. Αποδείξτε τη σύγκλιση της σειράς

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}.$$

Αποδείξτε ότι η σειρά δεν συγκλίνει απολύτως.

2)[⊗]. Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση τη σειρά

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}.$$

3)[⊗]. Έστω $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ μια συγκλίνουσα σειρά (όρων με αυθαίρετα πρόσημα). Έστω $k_1 < k_2 < k_3 < \dots$ φυσικοί αριθμοί. Εξετάστε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς:

1. Η σειρά

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_{k_n}$$

συγκλίνει.

2. Αν s_n είναι η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων της $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$, τότε η s_{k_n} συγκλίνει.

4)[⊗]. Αναδιατάξτε τους όρους της σειράς

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$$

ώστε να προκύψει αποκλίνουσα σειρά.

5). Αν η $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ συγκλίνει απόλυτα, δείξτε ότι οι

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_{2n}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} a_{2n-1}$$

συγκλίνουν απόλυτα και

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum_{n=1}^{+\infty} a_{2n} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_{2n-1}.$$

6). Αν η a_n είναι φθίνουσα και μηδενική, τότε

$$\left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k a_k \right| \leq a_n.$$

7). Έστω η ακολουθία $a_n > 0$, $n \in \mathbf{N}$ ώστε η σειρά $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ να συγκλίνει. Αποδείξτε τότε τη σύγκλιση της σειράς

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \sqrt{a_k a_{k+1}}.$$

Αποδείξτε ότι το αντίστροφο δεν ισχύει. Όμως αν η ακολουθία a_n είναι φθίνουσα και τέτοια ώστε η σειρά $\sum_{k=1}^{+\infty} \sqrt{a_k a_{k+1}}$ να συγκλίνει, τότε θα συγκλίνει και η σειρά

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k.$$

8). Έστω a_n φθίνουσα ακολουθία θετικών όρων. Αποδείξτε ότι η σειρά

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$$

συγκλίνει αν και μόνο αν μια από τις ακόλουθες σειρές

$$a) \sum_{k=1}^{+\infty} 3^k a_{3^k} \quad b) \sum_{k=1}^{+\infty} k a_{k^2}$$

συγκλίνουν.

Οι ασκήσεις για παράδοση σημειώνονται με \otimes

Η παράδοση των ασκήσεων θα γίνεται με αποστολή στο analysis1.tellab@gmail.com μέχρι τις 14:00 της Παρασκευής 13 Νοεμβρίου 2020.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!