



Παρασκευή 13 Νοεμβρίου 2020

Διδάσκοντες: Θ. Μήτσος, Α. Τερτίκας

**ΑΝΑΛΥΣΗ Ι**

Φυλλάδιο 7

1)<sup>⊗</sup>. Για τα σύνολα

$$A = (0, 1) \cup (1, 2), \quad B = \left\{ \frac{(-1)^n n + 2}{n + 1}, \forall n \in \mathbf{N} \right\}, \quad C = \mathbf{Q} \cap (0, 1),$$

να υπολογίσετε τα σημεία συσσώρευσης και τα μεμονωμένα σημεία (δηλαδή σημεία του συνόλου που δεν είναι σημεία συσσώρευσης).

2)<sup>⊗</sup>. Να υπολογίστε με χρήση του ορισμού  $(\varepsilon, \delta)$  τα όρια

$$a) \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x}, \quad b) \lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt{x} \text{ με } x_0 > 0, \quad c) \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - x + 1}{x - 1}.$$

Σημείωση:  $x \rightarrow a^+$  σημαίνει  $x \rightarrow a$  και  $x > a$ .

3)<sup>⊗</sup>. Για κάθε  $N \in \mathbf{N}$ , βρείτε ένα σύνολο με ακριβώς  $N$  σημεία συσσώρευσης.

4)<sup>⊗</sup>. Δείξτε ότι αν

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = b$$

τότε  $a = b$ .

5). Έστω  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  συνάρτηση ώστε

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1.$$

Αποδείξτε ότι υπάρχει  $\delta > 0$  ώστε

$$\forall x \in (-\delta, \delta) - \{0\}, \quad \frac{3}{4} < f(x) < \frac{7}{6}.$$

6). Έστω η συνάρτηση  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  με τύπο

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in \mathbf{Q} \\ x^3, & x \notin \mathbf{Q}. \end{cases}$$

Βρείτε με απόδειξη σε ποια σημεία  $a \in \mathbf{R}$  υπάρχει το όριο

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

και σε ποιά δεν υπάρχει.

7). Αν  $x_n \rightarrow x$ , βρείτε τα σημεία συσσώρευσης τού συνόλου  $\{x_n : n \in \mathbf{N}\}$ .

8). Έστω  $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  τέτοια ώστε για κάθε φθίνουσα ακολουθία θετικών αριθμών με  $x_n \rightarrow 0$ , έχουμε  $f(x_n) \rightarrow a$ . Δείξτε ότι

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = a.$$

Οι ασκήσεις για παράδοση σημειώνονται με  $\otimes$

Η παράδοση των ασκήσεων θα γίνεται με αποστολή στο [analysis1.tellab@gmail.com](mailto:analysis1.tellab@gmail.com)  
μέχρι τις 14:00 της Παρασκευής 20 Νοεμβρίου 2020.

**ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!**