



Παρασκευή 20 Νοεμβρίου 2020

Διδάσκοντες: Θ. Μήτσος, Α. Τερτίκας

ΑΝΑΛΥΣΗ Ι

Φυλλάδιο 8

1)[⊗]. Έστω $f : (-1, 1) - \{0\} \rightarrow (0, +\infty)$ συνάρτηση που είναι τέτοια ώστε

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(f(x) + \frac{1}{f(x)} \right) = 2.$$

Αποδείξτε ότι

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1.$$

2)[⊗]. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής τέτοια ώστε το $\{f(x) : x \in \mathbb{R}\}$ (το σύνολο τιμών της f) δεν έχει σημεία συσσώρευσης. Δείξτε ότι η f είναι σταθερή.

3)[⊗]. Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ με τύπο

$$f(x) = x^5 + x, \quad x \in \mathbf{R}.$$

Αποδείξτε ότι:

α)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty,$$

β) η f είναι 1-1 και επί,

γ) η $f^{-1} : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ είναι συνεχής συνάρτηση.

δ) Έστω $g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ είναι τέτοια ώστε να υπάρχει το όριο

$$\lim_{x \rightarrow 0} (g^5(x) + g(x)) = l \in \mathbf{R}.$$

Αποδείξτε την ύπαρξη του ορίου

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x).$$

4)[⊗]. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής ώστε

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty.$$

Δείξτε ότι η f παίρνει ελάχιστη τιμή.

5). Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbf{R}$ που είναι τέτοια ώστε

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1.$$

α) Αποδείξτε ότι η f είναι φραγμένη.

β) Βρείτε συνάρτηση f που να ικανοποιεί τις ανωτέρω ιδιότητες και να μην παίρνει μέγιστη τιμή.

γ) Υπάρχει συνάρτηση f που να ικανοποιεί τις ανωτέρω ιδιότητες και να μην παίρνει μέγιστη τιμή και να μην παίρνει ελάχιστη τιμή ταυτόχρονα;

6). Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbf{R}$ που είναι τέτοια ώστε

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1.$$

Θέτουμε

$$A = f([0, +\infty)) = \{f(x), \forall x \in [0, +\infty).\}$$

Αποδείξτε αρχικά ότι το A είναι φραγμένο σύνολο. Εάν επισπρόσθετα ισχύει

$$\inf A < 1 < \sup A,$$

αποδείξτε τότε ότι η f παίρνει μέγιστη και ελάχιστη τιμή.

7). Έστω $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ αύξουσα. Δείξτε ότι για κάθε $a \in \mathbf{R}$, τα

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$$

υπάρχουν (δείξτε ότι μόνο το ένα υπάρχει, αφού η απόδειξη για το άλλο είναι ανάλογη). $x \rightarrow a^+$ σημαίνει $x \rightarrow a$ και $x > a$, ενώ $x \rightarrow a^-$ σημαίνει $x \rightarrow a$ και $x < a$.

8). Δείξτε ότι δεν υπάρχει συνεχής $f : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ η οποία να παίρνει κάθε τιμή της ακριβώς δύο φορές.

Οι ασκήσεις για παράδοση σημειώνονται με \otimes

Η παράδοση των ασκήσεων θα γίνεται με αποστολή στο analysis1.tellab@gmail.com
μέχρι τις 14:00 της Παρασκευής 27 Νοεμβρίου 2020.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!