ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Παρασκευή 27 Νοεμβρίου 2020

Διδάσκοντες: Θ. Μήτσης, Α. Τερτίκας

ΑΝΑΛΥΣΗ Ι
Φυλλάδιο 9

1)$^{\otimes}$. Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ με τύπους

$$f(x) = \frac{x^3}{1+x^2}, \quad x \in \mathbf{R}, \qquad g(x) = \frac{x^4}{1+x^2}, \quad x \in \mathbf{R}.$$

Αποδείξτε ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής, ενώ η g δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής.

2)$^{\otimes}$. Εξετάστε ως προς την ομοιόμορφη συνέχεια τη συνάρτηση

$$f(x) = x\sin(x), \ x \in \mathbb{R}.$$

3)$^{\otimes}$. Έστω η συνάρτηση $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ είναι τέτοια ώστε η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $(-\infty, 0]$ και η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[0, +\infty)$. Αποδείξτε ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $\mathbf{R}$.

4) $^{\otimes}$. Δείξτε ότι το γινόμενο δυο φραγμένων ομοιόμορφα συνεχών συναρτήσεων είναι ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση.

5). Βρείτε συνάρτηση $f : (0, 2) \to \mathbf{R}$ ώστε να είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $(0, 1)$ και ομοιόμορφα συνεχής στο $[1, 2)$ και να μην είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $(0, 2)$.

6). Έστω $f, g : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ δυο συναρτήσεις ώστε

1. Η f είναι ομοιόμορφα συνεχής.
2. Η g είναι συνεχής.
3. $$\lim_{x\to+\infty} (f(x) - g(x)) = 0.$$

Δείξτε ότι η g είναι ομοιόμορφα συνεχής.

7). Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής αύξουσα και φραγμένη. Δείξτε ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής.

8). Έστω $f : (0,1) \to \mathbf{R}$ είναι τέτοια ώστε $\forall \{x_n\}_{n\in\mathbf{N}} \subset (0,1)$ που είναι ακολουθία Cauchy, τότε και η $\{f(x_n)\}_{n\in\mathbf{N}}$ είναι ακολουθία Cauchy επίσης.
(Η f μεταφέρει ακολουθίες Cauchy σε ακολουθίες Cauchy).

Αποδείξτε ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής.

Οι ασκήσεις για παράδοση σημειώνονται με $\otimes$

Η παράδοση των ασκήσεων θα γίνεται με αποστολή στο analysis1.tellab@gmail.com
μέχρι τις 14:00 της Παρασκευής 4 Δεκεμβρίου 2020.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!