Αξίωμα της πληρότητας

$\mathbb{R}$ $+$ $\cdot$

$\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$ άνω φραγμένο, όταν $\exists\, M \in \mathbb{R}$

$\forall a \in A, \quad a \leq M$

Αντίστοιχα

$\emptyset \neq B \subseteq \mathbb{R}$ κάτω φραγμένο, όταν $\exists\, m \in \mathbb{R}$

$m \leq \beta, \quad \forall \beta \in B.$

Παρ 1 $[0, 1]$ άνω φραγμένο, το 1 είναι άνω φράγμα, το 0 είναι κάτω φράγμα.

Αξίωμα της πληρότητας

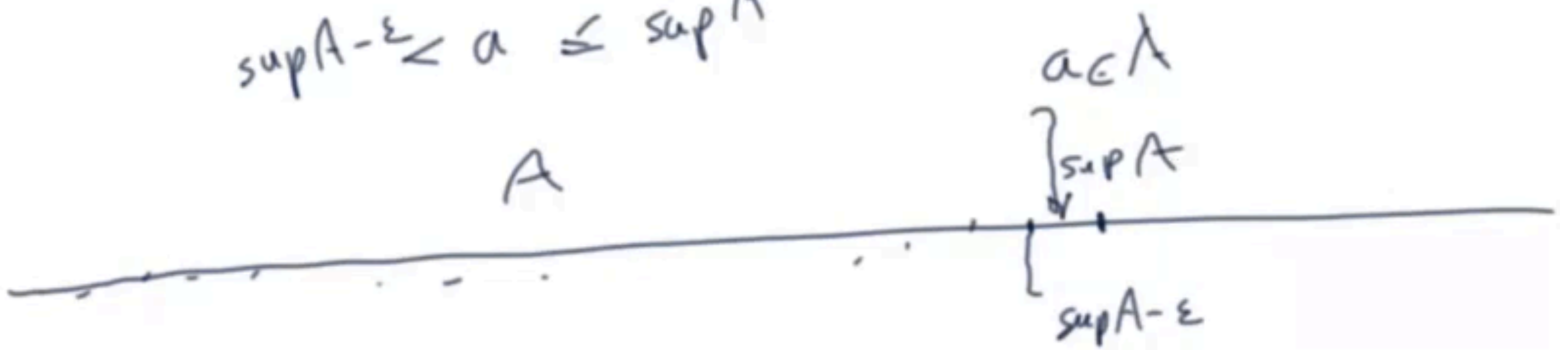
Αν $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$, άνω φραγμένο, τότε υπάρχει ελάχιστο άνω φράγμα

$\sup A$

i) $\forall a \in A$, $a \leq \sup A$ (το $\sup A$ είναι άνω φράγμα)

ii) $\forall \varepsilon > 0$, για το $\sup A - \varepsilon$ $\exists\, a \in A$

$\sup A - \varepsilon < a \leq \sup A$



Add Layer (⌘L)
Layer2
Layer1
Background

$\emptyset \neq B \subseteq \mathbb{R}$, κάτω φραγμένο.

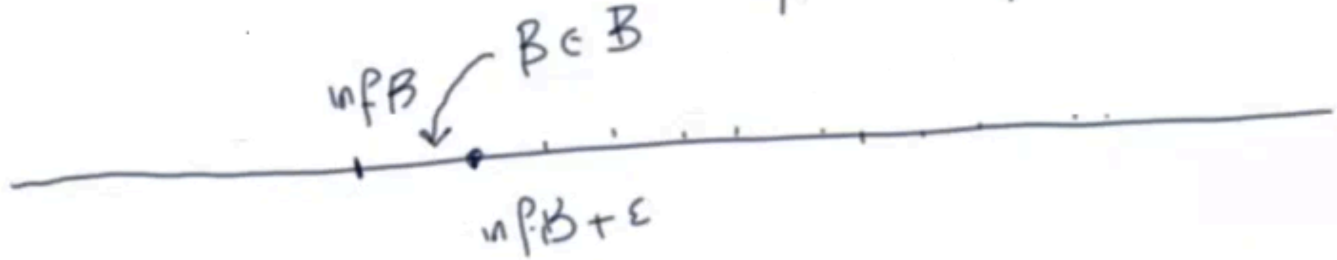
$\inf B$: το μεγαλύτερο των κάτω φραγμάτων του B

i) $\inf B$ (είναι κάτω φράγμα)

$\inf B \leq \beta, \quad \forall \beta \in B.$

ii) $\forall \varepsilon > 0, \ \exists \beta \in B$:

$\inf B \leq \beta < \inf B + \varepsilon.$



Παράδειγμα Το σύνολο $A = \mathbb{Q} \cap (-\infty, 1]$

$$A = \{ a \in \mathbb{Q} \cap (-\infty, 1] \}$$

$$= \left\{ \frac{m}{n}, \ m \in \mathbb{Z}, \ n \in \mathbb{N}, \ \frac{m}{n} \leq 1 \right\}.$$

Αποδείξτε ότι το A έχει supremum και να βρεθεί το $\sup A$.

Απόδ. Θα αποδείξουμε αρχικά ότι το A είναι άνω φραγμένο, μάλιστα το 1 είναι ένα άνω φράγμα του A.

Στο επόμενο βήμα, να δείξουμε ότι $\sup A = 1$.

i) το 1 είναι άνω φράγμα του A

ii) $\forall\, \varepsilon > 0$, θα πρέπει να βρούμε στοιχείο του A ώστε

$$1-\varepsilon < a \leq 1$$

$1 \in A$, οπότε επιλέγουμε $a = 1$. □

Παρ. 2 $B = \mathbb{Q} \cap (-\infty, 1)$, τότε επίσης $\sup B = 1$.

$\exists\, \beta \in B :$

$$1-\varepsilon < \beta < 1$$

$$1-\varepsilon < \frac{m}{n} < 1 \qquad ?$$

ΘΕΩΡΗΜΑ Κάθε μη κενό κάτω φραγμένο $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$, έχει $\inf A$.

Αποδ. Ορίζουμε $B = \{-a,\ \forall a \in A\}$.

Το B είναι άνω φραγμένο.

Το A είναι κάτω φραγμένο, $\exists\, m \in \mathbb{R}$

$$m \leq a \quad , \quad \forall a \in A.$$

$$\Downarrow$$

$$-m \geq -a \quad , \quad \forall a \in A$$

$$\beta \in B$$

Το $-m$ είναι άνω φράγμα για το B

Ώστε από το αξίωμα της πληρότητας

θα υπάρχει το $\sup B$.

i,) $-a \leq \sup B, \quad \forall a \in A$

$$\Updownarrow$$

$$a \geq -\sup B$$

ii) $\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \beta \in B \quad \sup B - \varepsilon < \beta \leq \sup B$

$$\sup B - \varepsilon < -a \leq \sup B$$

$$\Updownarrow$$

$$-\sup B + \varepsilon > a \geq -\sup B$$

$\Rightarrow \exists \inf A$, μάλιστα

$$\underline{\inf A = -\sup B.}$$