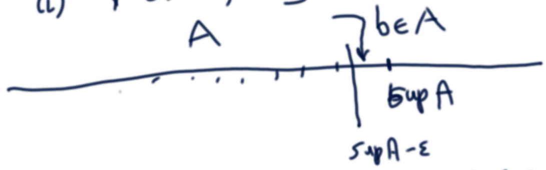
<u>Supremum</u> ενός άνω φραγμένου συνόλου A.

το μικρότερο άνω φράγμα.

$\sup A$

i) $\forall\, a \in A$, $\quad a \leq \sup A$

ii) $\forall\, \varepsilon > 0$, $\quad \exists\, b \in A$: $\sup A - \varepsilon < b \quad (\leq \sup A)$

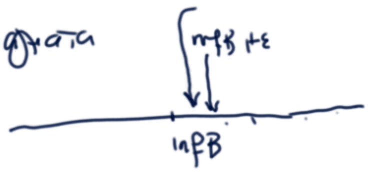


$\inf B$, B κάτω φραγμένο.

" το μεγαλύτερο από τα κάτω φράγματα

i) $\forall\, a \in B$, $\quad \inf B \leq a$

ii) $\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, c \in B$: $c < \inf B + \varepsilon$.



$$\mathbb{N} = \{1, 2, \dots n, \dots\}$$

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$$

<u>Πρόταση</u>: Το $\mathbb{N}$ είναι αφράγιστο σύνολο

Το $\mathbb{Z}$ δεν είναι ούτε άνω φραγμένο ούτε κάτω φραγμένο.

<u>Απόδ</u>: Υποθέτουμε ότι το $\mathbb{N}$ είναι άνω φραγμένο

τότε από το αξίωμα της πληρότητας

$\exists \quad \sup \mathbb{N} = s$

$\Rightarrow \quad \exists\, n \in \mathbb{N}, \quad s - 1 < n$

$\Updownarrow$

$n+1 \in \mathbb{N}. \qquad s < n+1 \qquad$ Αντίφαση

$\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$ άνω φραγμένο.

$\exists \sup A \in \mathbb{R}$

Αν $\underbrace{\sup A}_{} \in A$

τότε μέγιστο στοιχείο του A.

<u>Παράδειγμα</u>: $A = (0, 1)$

$= \{ x \in \mathbb{R}, \quad 0 < x < 1 \}$

$\sup A = 1$.

το 1

i) Άνω φράγμα.

ii) $\forall \varepsilon > 0, \quad \exists x \in (0,1)$

$1 - \varepsilon < x < 1$.

$0 < 1-\varepsilon \iff \underline{0<\varepsilon<1}$ $\qquad \dfrac{1+1-\varepsilon}{2} = 1-\dfrac{\varepsilon}{2}$

$\Longrightarrow \quad \sup A = 1. \quad \square$

Παρ 2 $\quad A=(0,1]. \quad \Rightarrow \quad \sup A = 1$

i) Το 1 είναι άνω φράγμα

$(\,x \in (0,1] \Rightarrow 0 < x \leq 1\,)$

ii) $\forall \varepsilon>0, \ \exists\, b \in A \cdot 1-\varepsilon < b.$

Επιλέγουμε $b=1$ και τελειώσαμε.

$\Rightarrow \quad \inf A = 0.$

ΘΕΩΡΗΜΑ (Αρχιμήδεια ιδιότητα)

$\forall\, \varepsilon > 0, \Rightarrow \exists\, n \in \mathbb{N}$ ώστε

$$0 < \frac{1}{n} < \varepsilon .$$

Αποδ. Επειδή $\varepsilon > 0 \Rightarrow \frac{1}{\varepsilon} > 0$

και η $\mathbb{N}$ είναι αφραγής

άρα $\exists\, n > \frac{1}{\varepsilon}$.

$\Updownarrow$

$\frac{1}{n} < \varepsilon$.

$\square$

Σκέψεις που οδηγούν στην απόδειξη:

Έστω ότι το βρήκαμε, δηλ. $\exists\, n \in \mathbb{N}$

$\frac{1}{n} < \varepsilon \Leftrightarrow$

$1 < n\varepsilon \Leftrightarrow$

$\frac{1}{\varepsilon} < n$

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} \;\middle|\; m \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N} \right\}$$

$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} = \mathbb{I}$ άρρητοι αριθμοί.

<u>Πυκνότητα των ρητών.</u>

<u>Ερώτηση</u>: Έστω $a < b$. $\exists\, q \in \mathbb{Q}$ ώστε $a < q < b$?

Ακέραιο μέρος του x, $[x]$

$[5,3] = 5$

$[-7,1] = -8$

$\cancel{\{x \in \mathbb{R}\ |}$

$x \in \mathbb{R}$.

$\{p \in \mathbb{Z},\ p \leqslant x\}$

Ορισμός $[x] = \sup\{p \in \mathbb{Z} \mid p \leq x\}$.

Πλησιέστερος ακέραιος στον x :

$\min\left([x] , [x+1] \right)$

$x - [x]$

$[x]+1-x$

$[x] \leqslant x$

$[x+1] \leqslant x+1$

$[x+1] = [x]+1$

Βασική σχέση $[x] \leqslant x < [x]+1$.

Αν $$x - [x] \leqslant [x] + 1 - x$$

$$\Updownarrow$$

$$2x \leqslant 2[x] + 1$$

$$\Leftrightarrow 2(x - [x]) \leqslant 1$$

$$x - [x] \leqslant \frac{1}{2}$$

$$\Downarrow$$

πλησιέστερη ακέραιη στο x
είναι ο $[x]$.

ΘΕΩΡΗΜΑ (Πυκνότητα των ρητών αριθμών).

Έστω $a < b$, τότε $\exists\, q \in \mathbb{Q}$ ώστε

$$a < q < b.$$

Σκέψη: (Ανάλυση του προβλήματος).

$q \in \mathbb{Q}$, $\quad q = \dfrac{m}{n}$

$m \in \mathbb{Z}$, $\quad n \in \mathbb{N}$

$$a < \frac{m}{n} < b \iff$$

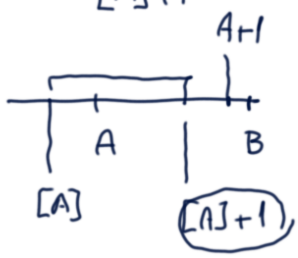
$$na < m < nb$$

Αν $A < B$?

$\exists\, m \in \mathbb{Z} : A < m < B$

Βρίσκουμε πάντα ακέραιο αν $B-A \geq 1$.

$[A]+1$



$[A] \leq A < [A]+1$

$[A+1] = [A]+1$

Existence n :

na $\qquad$ nb

wste $nb - na \geq 1$

$$\Updownarrow$$

$$n(b-a) \geq 1$$

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{n \geq \frac{1}{b-a}}$$

Απόδειξη Θεωρήματος:

Επιλέγω $n \in \mathbb{N}$ ώστε

$$n \geqslant \frac{1}{b-a} \qquad \left(\pi\alpha\rho.\ n = \left[\frac{1}{b-a}\right]+1\right)$$

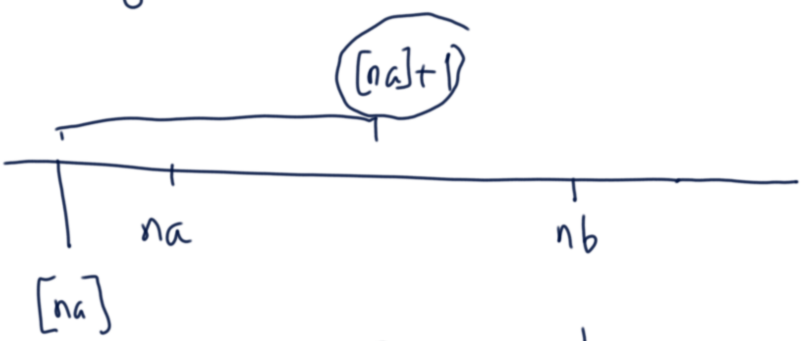
$$\Updownarrow$$

$$n(b-a) \geqslant 1$$

$$\Updownarrow$$

$$nb - na \geqslant 1.$$

Επιλέγω $m = [na]+1$, τότε



$$\underline{[na]+1 \le nb}$$

Διότι

$$[na] \le na < [na]+1$$

και $na \le nb+1 \Rightarrow [na] \le [nb]+1$

Τότε $m \in \mathbb{Z}$

$$na < m < nb$$

$$\Updownarrow$$

$$a < \frac{m}{n} < b$$

$\Rightarrow$ βρίσκουμε ρητό μεταξύ των α, β.

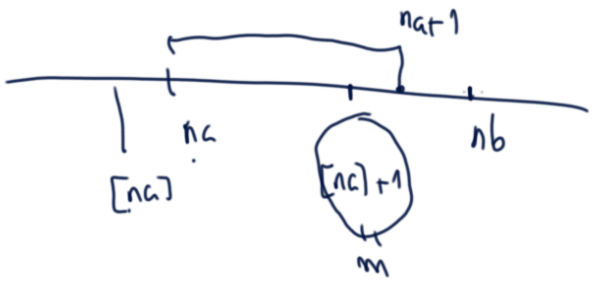
$$\left(m = [na]+1, \quad n \geq \left[\frac{1}{b-a}\right]+1 \right).$$

$\square$

$$nb \geq na + 1$$

$$[na] \leq na < [na] + 1$$

$$[na] + 1 \leq na + 1$$



✓

$\square$

Υπαρχουν αρρητοι αριθμοι ?

ΘΕΩΡΗΜΑ

α) Εστω $x > 0$, τοτε υπαρχει θετικος $y > 0$
ωστε $y^2 = x$

β) Εστω $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, τοτε $\exists$ $y \in \mathbb{R}$
ωστε $y^{2n-1} = x$

γ) Εστω $x > 0$, $n \in \mathbb{N}$, $\exists$ $y \in \mathbb{R}$
$y^{2n} = x$.

Συνέχεια: Θέλουμε να βρούμε $y > 0$

$$y^2 = x.$$

Έστω $$A = \{ y > 0 \mid y^2 < x \}$$

Παρατήρηση απλούστερα: να βρεθεί

$$y^2 = 2$$

$$A = \{ y > 0 \mid y^2 < 2 \} \subseteq \mathbb{R}$$

Είναι $1 \in A$ είναι άνω φραγμένο

το 2 είναι άνω φράγμα?

$y \in A \Longrightarrow y \leq 2$. Απαγωγή σε άτοπο

Έστω ότι $\exists\, y \in A$, $y > 2 \Longrightarrow y^2 > 4$

αδύνατο.

$\Longrightarrow$ Αξ. πληρότητας $\exists \sup A = \xi$

Στοιχ $\xi^2 = 2$.

I Αν $\underline{\xi^2 < 2}$

II Αν $\underline{\xi^2 > 2}$

$\xi \geq 1$

$\Downarrow$

$\xi^2 \geq \xi$

Θα βρω $1 > \varepsilon > 0$ μικρό κατάλληλο ώστε

$\xi+\varepsilon \in A$

Πρ $(\xi+\varepsilon)^2 < 2 \Leftrightarrow \xi^2+2\xi\varepsilon+\varepsilon^2 < 2.$

[illegible]

$$\boxed{\xi^2 + 2\xi\varepsilon + \varepsilon < 2}$$

$$\Downarrow$$

$$\xi^2 + 2\xi\varepsilon + \varepsilon^2 < 2$$

$$\varepsilon(1+2\xi) < 2 - \xi^2$$

$$0 < \varepsilon < \frac{2-\xi^2}{1+2\xi}$$