i) $\sup A$ ανω φραγμα

$\forall a \in A, \quad a \leq \sup A$

ii) $\forall \varepsilon > 0, \exists \beta \in A : \quad \sup A - \varepsilon < \beta$

$\inf A$ κατω φραγμα

i) $\inf A \leq a \quad \forall a \in A$

ii) $\forall \varepsilon > 0, \; \exists \beta \in A : \quad \beta < \inf A + \varepsilon$

$$[x+n] = [x] + n, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \; n \in \mathbb{N}.$$

$$[x] = \sup\{m \in \mathbb{Z} \mid m \leq x\}.$$

ΘΕΩΡΗΜΑ Εαν $a < \beta$, τότε $\exists\ q \in \mathbb{Q}$

$$a < q < \beta$$

ΘΕΩΡΗΜΑ i) $x > 0$, $\exists\ y > 0$ ώστε

$$y^2 = x$$

ii) $n \in \mathbb{N}$, $x > 0$, $\exists\ y > 0$: $y^{2n} = x$

iii) $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$, $\exists\ y \in \mathbb{R}$: $y^{2n-1} = x$.

$$\exists\ x > 0, \quad x^2 = 2.$$

$$A = \{x \mid 0 < x,\ x^2 < 2\}$$

Είδαμε $1 \in A \Rightarrow \emptyset \neq A$.

A άνω φραγμένο από 2.

Αξ. πληρότητας $\exists \sup A = \xi$.

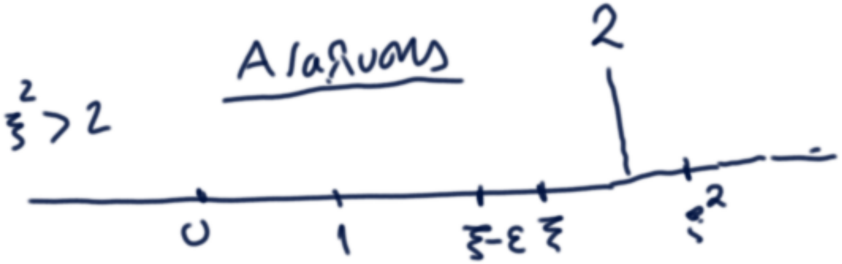
Στόχος να αποδείξουμε ότι $\xi^2 = 2$.

Θα αποκλείσουμε i) $\underline{\xi^2 < 2}$

ii) $\xi^2 > 2$

<u>Διαίσθηση</u>

$\xi^2 > 2$



$\xi + \varepsilon$

$\xi^2 > 2$

$\exists\ \varepsilon > 0$?

$$(\xi - \varepsilon)^2 > 2$$

$$\Updownarrow$$

$$\underbrace{\xi^2 - 2\xi\varepsilon}_{} + \varepsilon^2 > 2$$

Αρκεί

$$\xi^2 - 2\xi\varepsilon > 2$$

$$\Updownarrow$$

$$\xi^2 - 2 > 2\xi\varepsilon$$

$$\Updownarrow$$

$$\varepsilon < \frac{\xi^2 - 2}{2\xi}.$$

Σχήμα:

Απόδειξη: ii) Εάν $\xi^2 < 2$.

Επιλέγουμε $0 < \varepsilon < 1$

$$\varepsilon < \frac{2-\xi^2}{2\xi+1}.$$

$$\Rightarrow (\xi+\varepsilon)^2 < 2$$

$$\xi+\varepsilon < \xi + \frac{2-\xi^2}{2\xi+1} = \frac{2\xi^2+\xi+2-\xi^2}{2\xi+1} = \frac{\xi^2+\xi+2}{2\xi+1}$$

$$\exists\ \underline{x \in A:}\ (\varepsilon < \xi)$$

$$\xi - \varepsilon < x$$

$$\Downarrow$$

$$2 < (\xi-\varepsilon)^2 < x^2.$$

ΑΔΥΝΑΤΟ

$$(\xi+\varepsilon)^2 = \xi^2 + 2\xi\varepsilon + \varepsilon^2 \leq \xi^2 + 2\xi\varepsilon + \varepsilon < \xi^2 + \overbrace{\varepsilon(2\xi+1)}^{2-\xi^2} < 2. \Rightarrow \xi+\varepsilon \in A$$

ΑΤΟΠΟ

ii) $\xi^2 > 2$, επιλέγω $\varepsilon < 1$,

$$0 < \varepsilon < \frac{\xi^2 - 2}{2\xi} \Rightarrow 2\xi\varepsilon < \xi^2 - 2 \Leftrightarrow$$

$$2 < \xi^2 - 2\xi\varepsilon$$

$\exists x \in A : \boxed{\xi - \varepsilon < x}$

τότε $(\xi - \varepsilon)^2 = \xi^2 - 2\xi\varepsilon + \varepsilon^2 > \varepsilon^2 + 2 > 2$.

$$x^2 > (\xi - \varepsilon)^2 > 2$$

καταλήξαμε: $\exists x \in A : x^2 > 2$ ΑΔΥΝΑΤΟ

$$\Rightarrow \boxed{\xi^2 = 2}$$ ✓

ΘΕΩΡΗΜΑ

Οι άρρητοι είναι πυκνοί στους πραγματικούς αριθμούς. Δηλ.

$\forall\ \alpha < \beta\ ,\ \exists\ x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

$$\alpha < x < \beta .$$

$x^2 = 2$:

$\sqrt{2}$

Πρόταση. Ο $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Αποδ. Απαγωγή σε άτοπο.

Έστω $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$.

$$\sqrt{2} = \frac{m}{n} \quad , \quad m, n \in \mathbb{N}.$$

Υποθέτουμε επίσης $(m,n) = 1$.

Οπότε

$$\sqrt{2} = \frac{m}{n}$$

$$\Downarrow$$

$$2 = (\sqrt{2})^2 = \left(\frac{m}{n}\right)^2 = \frac{m^2}{n^2}$$

$$\Downarrow$$

$$2n^2 = m^2$$

· Ο m είναι άρτιος (αλλιώς αν ήταν περιττός $k \in \mathbb{N}$

$m = 2k-1 \Rightarrow m^2 = (2k-1)^2$

$= 4k^2 - 4k + 1$

$= 2\underbrace{(2k^2-2k)}+1$ περιττός)

$\Rightarrow m = 2m_1 \quad m_1 \in \mathbb{N}.$

$$2n^2 = (2m_1)^2 \iff n^2 = 2m_1^2$$

$\Rightarrow$ n άρτιος

$\Rightarrow$ $\underline{n = 2n_1,}$ $n_1 \in \mathbb{N}$

$m = 2m_1,$ $m_1 \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow$ $2 / n, m$ $\underline{\text{ΑΝΤΙΦΑΣΗ}}$

$\boxed{\cdot}$

ΘΕΩΡΗΜΑ (Πυκνότητα των Αρρήτων)

Έστω $a < \beta$. Τότε $\exists\ \xi \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ώστε

$$a < \xi < \beta.$$

Αποδ. Θα αποδείξουμε μάλιστα ότι $\exists\ m \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N}$

ώστε

$$a < \underbrace{\frac{m}{n}\sqrt{2}}_{m \in \mathbb{Z},\, n \in \mathbb{N}} < \beta.$$

Γιατί ο $\frac{m}{n}\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$?

Αν ήταν ρητός $\frac{m}{n}\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$ $\Leftrightarrow \sqrt{2} = \frac{np}{mq}$ άτοπο.

Αποδ. Επειδή $a < \beta$

$\Downarrow$

$\frac{1}{\sqrt{2}} > 0$

$$\frac{a}{\sqrt{2}} < \frac{\beta}{\sqrt{2}}$$

από το Θ πυκνότητας των ρητών $\exists$ $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$

ώστε

$$\frac{a}{\sqrt{2}} < \frac{m}{n} < \frac{\beta}{\sqrt{2}}$$

και τότε $\Updownarrow$

$$a < \frac{m}{n}\sqrt{2} < \beta.$$

$\square$

Αναγωγή (Ανάλυση)

$$a < \frac{m}{n}\sqrt{2} < \beta$$

$\Updownarrow$

$$\frac{\alpha}{\sqrt{2}} < \frac{m}{n} < \frac{\beta}{\sqrt{2}}$$

A B ✓

Επίλυση: θα βρούμε R $m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$

$$\frac{\alpha}{\sqrt{2}} < \frac{m}{n} < \frac{\beta}{\sqrt{2}}$$

$$\Updownarrow$$

$$n\frac{a}{\sqrt{2}} < m < \frac{\beta}{\sqrt{2}}n$$

Απαιτούμε $\quad n\left(\frac{\beta}{\sqrt{2}} - \frac{a}{\sqrt{2}}\right) > 1.$

$$\Updownarrow$$

π.χ. $\quad n > \dfrac{1}{\frac{\beta}{\sqrt{2}} - \frac{\alpha}{\sqrt{2}}}$. $\quad$ π.χ. $n = \left[\dfrac{1}{\frac{\beta}{\sqrt{2}} - \frac{\alpha}{\sqrt{2}}}\right] + 1.$

$$n > \frac{1}{\frac{\beta}{\sqrt{2}} - \frac{a}{\sqrt{2}}} \iff$$

$$n\left(\frac{\beta}{\sqrt{2}} - \frac{a}{\sqrt{2}}\right) > 1 .$$

$$m = \left[n \frac{a}{\sqrt{2}}\right] + 1$$

$$\Rightarrow n\frac{\alpha}{\sqrt{2}} < m < n\frac{\beta}{\sqrt{2}} \Rightarrow \ldots$$

Ακεραιο μερη πραγματικων

$x \in \mathbb{R}$ $\quad [x] = \sup\{ m \in \mathbb{Z} \mid m \leq x \}$

$$\Rightarrow \quad [x] \leq x .$$

(i) $\quad [x] \leq x < [x] + 1$

(ii) $\quad x \leq y \Rightarrow [x] \leq [y]$

$$\{ m \in \mathbb{Z} \mid m \leq x \} \subseteq \{ n \in \mathbb{Z} \mid n \leq y \}$$

Ιδιότητα sup:

Αν $\emptyset \neq B \subseteq \mathbb{R}$ άνω φραγμένο

και $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$, τέτοιο ώστε

$$A \subseteq B$$

$\Rightarrow$ A είναι άνω φραγμένο και επιπροσθέτως

$$\sup A \leq \sup B$$

Απ. το $\sup B$ είναι άνω φράγμα για το B

$$\forall\, \beta \in B, \quad \beta \leq \sup B\,.\,.$$

$A \subseteq B$

$\forall a \in A \Rightarrow a \in B \Rightarrow a \leq \sup B$

$\Rightarrow$ $\sup B$ είναι άνω φράγμα του A.

$\Rightarrow$ A άνω φραγμένο.

$\exists \sup A$ (το μικρότερο άνω φράγμα του A)

$\Rightarrow \sup A \leq \sup B$ $\square$

(Συνεχεια ακεραιο μερος)

$[x+y]$ $\qquad$ $[x]$, $[y]$?

iii) $[x]+[y] \leq [x+y]$.

iv) $[x+m] = [x]+m$

$x \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{Z}$.

Δικη σας αποδειξη

$[x+y] = \sup\{p \in \mathbb{Z} \mid p \leq x+y\}$

$\mathbb{Z}$

$\cup$

$[x] \leq x$

$[y] \leq y$

$\Rightarrow [x]+[y] \leq x+y$.

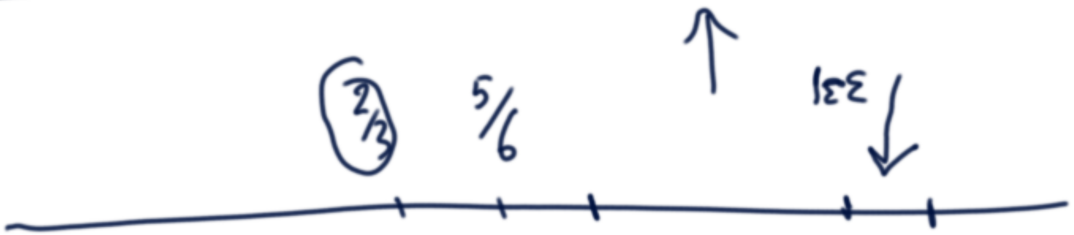
$\Rightarrow [x]+[y] \leq [x+y]$. ✓

Άσκηση:

Έστω το σύνολο

$$A = \left\{ \frac{n^2+1}{n^2+2},\ n \in \mathbb{N} \right\}$$

Αποδείξτε ότι είναι μη κενό φραγμένο και βρείτε με απόδειξη τα $\sup A$, $\inf A$.



$\exists\, n \in \mathbb{N}$:

$$1-\varepsilon < \frac{1+n^2}{2+n^2} < 1 \ \ldots$$