Πέμπτη 11 Φεβρουαρίου 2016

Γ. Κωστάκης, Α. Τερτίκας

ΑΝΑΛΥΣΗ ΙΙ

(Επαναληπτικό Ανάλυσης Ι)

Φυλλάδιο 1

1). Δίδονται τα σύνολα:

$$A = \{x \in (0, +\infty), \;\; | \quad x^3 < 3\},$$
$$B = \{x \in \mathbf{Q}, \;\; | \quad x^3 < 3\} \; .$$

Αποείξτε οτι τα σύνολα A, B είναι μη κενά και άνω φραγμένα. Στη συνέχεια αποδείξτε ότι ικανοποιούν:

$$(\sup A)^3 = 3, \quad (\sup B)^3 = 3.$$

2). Έστω $0 < \varepsilon < 1$. Βρείτε $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, ώστε να ισχύει:

$$\forall x \in \mathbf{R} : |x| < \delta \Rightarrow |\frac{1+2x}{x^2+1} - 1| < \varepsilon.$$

3). Αποδείξτε ότι η ακολουθία

$$a_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{3n}, \quad n \in \mathbf{N},$$

είναι συγκλίνουσα ακολουθία.

4). α) Βρείτε θετική σταθερά c ανεξάρτητη του $n \in \mathbf{N}$ τέποια ώστε να ικανοποιεί

$$\frac{1}{n^2} \leq c \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right), \quad \forall n \in \mathbf{N}.$$

β) Αποδείξτε ότι η ακολουθία

$$a_n = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}, \quad n \in \mathbf{N},$$

είναι συγκλίνουσα ακολουθία.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!