ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Τρίτη 19 Απριλίου 2016

Διδάσκοντες: Γ. Κωστάκης, Α. Τερτίκας

ΑΝΑΛΥΣΗ ΙΙ

Φυλλάδιο 10

1). Δίνεται η σειρά

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{1+k^2x^2}.$$

Να εξετάστε κατά πόσο η σειρά συγκλίνει ομοιόμορφα
α) στο διάστημα $(0,+\infty)$,

β) στο διάστημα $(\alpha,+\infty)$ όπου $\alpha>0$.

2). Δίνεται η σειρά

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \frac{\cos(\frac{x}{\sqrt{k}})}{\sqrt{k}}.$$

α) Να εξετάστε κατά πόσο η σειρά συγκλίνει ομοιόμορφα στο διάστημα $[-\alpha,\alpha]$ όπου $\alpha>0$.

β) Αποδείξτε ότι η σειρά είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση.

3). Δίνεται η σειρά

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{x^{2k-1}}{2k-1} - \frac{x^k}{2k}\right).$$

α) Αποδείξτε ότι η σειρά συγκλίνει κατά σημείο για $x\in[0,1]$.

β) Αποδείξτε ότι η σειρά δεν συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[0,1]$.

4). Δίνεται η ακολουθία των συναρτήσεων $f_n:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, με τύπο

$$f_n(x) \ = \ \frac{\ln(1+n^2x^2)}{n^\alpha} \ , \ \ x\in\mathbf{R}, \ \alpha>0.$$

(α) Έστω $\alpha>1$. Αποδείξτε ότι οι σειρές

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) \ ,$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n'(x) \ ,$$

συγκλίνουν κατά σημείο για $x \in \mathbf{R}$. Αποδείξτε επίσης ότι η σειρά

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) \ ,$$

συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[-R, R], \ R > 0$, ενώ η σειρά

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n'(x) \ ,$$

συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[a, b] \subseteq (0, +\infty)$.

(β) Έστω ότι $\alpha > 2$. Αποδείξτε ότι η σειρά

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n'(x) \ ,$$

συγκλίνει ομοιόμορφα στο $\mathbf{R}$.

<u>ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!</u>