



Πέμπτη 21 Απριλίου 2016

Διδάσκοντες: Γ. Κωστάκης, Α. Τερτίκας

ΑΝΑΛΥΣΗ ΙΙ

Φυλλάδιο 11

1). Δίνεται η ακολουθία συναρτήσεων

$$f_n(x) = \frac{\sin \frac{1}{n} \sin \frac{2}{n}}{\sin^2 \frac{1}{n} + x \cos^2 \frac{1}{n}}, \quad x \in [0, +\infty), \quad n = 1, 2, \dots$$

Εξετάστε την κατά σημείο σύγκλιση της παραπάνω ακολουθίας στο $[0, \infty)$. Στη συνέχεια εξετάστε την ομοιόμορφη σύγκλιση στα διαστήματα της μορφής $[a, +\infty)$ για $a \geq 0$.

2). Δείξτε ότι η σειρά

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$$

συγκλίνει για κάθε $x \in \mathbf{R}$ αλλά δεν συγκλίνει ομοιόμορφα σε κανένα διάστημα που περιέχει το 0.

3). Δίνεται μια ακολουθία πραγματικών αριθμών (a_n) ώστε η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ συγκλίνει και ορίζουμε $f_n(x) = a_n x^n$, $n = 0, 1, 2, \dots$. Δείξτε ότι η σειρά συναρτήσεων $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[0, 1]$.

4). Δίνεται $A \subset \mathbf{R}$ μη κενό. Δείξτε ότι η συνάρτηση $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, όπου

$$f(x) = \inf\{|x - y| : y \in A\}$$

είναι ομοιόμορφα συνεχής (στο \mathbf{R}).

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!