Πέμπτη 18 Φεβρουαρίου 2016

Γ. Κωστάκης, Α. Τερτίκας

ΑΝΑΛΥΣΗ ΙΙ

Φυλλάδιο 2

1). Να εξετάσετε κατά πόσο οι ακόλουθες συναρτήσεις f, g, h, είναι ομοιόμορφα συνεχείς ή όχι (με απόδειξη):

$$i) \quad f : (0,1) \to \mathbf{R}, \quad f(x) = \sin\frac{1}{x}, \ \ \forall x \in (0,1).$$

$$ii) \quad g : (1,+\infty) \to \mathbf{R}, \quad g(x) = \frac{x^2+x}{x+2}, \ \ \forall x > 1.$$

$$iii) \quad h : (1,+\infty) \to \mathbf{R}, \quad h(x) = \frac{x^3}{x+2}, \ \ \forall x > 1.$$

2). Έστω $f : (0,+\infty) \to \mathbf{R}$, παραγωγίσιμη συνάρτηση για την οποία επιπρόσθετα ισχύει:

$$|f'(x)| \leq 2016, \quad \forall x > 0.$$

Αποδείξτε ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής.

3). Έστω $\emptyset \neq A \subseteq \mathbf{R}$ και $f : A \to [2016,+\infty)$ είναι ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση. Αποδείξτε ότι και η συνάρτηση

$$\frac{1}{f} : A \to \mathbf{R},$$

είναι ομοιόμορφα συνεχής επίσης.

4). Έστω $f : (1,+\infty) \to \mathbf{R}$ συνεχής συνάρτηση. Εάν επιπρόσθετα ο περιορισμός $f|(1,2]$ της f στο $(1,2]$ είναι ομοιόμορφα συνεχής (στο $(1,2]$), αποδείξτε ότι η f έχει συνεχή επέκταση στο $\mathbf{R}$.

Υπόδειξη: Αποδείξτε αρχικά ότι το όριο $\lim_{x\to 1^+} f(x)$ υπάρχει.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!