Πέμπτη 25 Φεβρουαρίου 2016

Γ. Κωστάκης, Α. Τερτίκας

# ΑΝΑΛΥΣΗ ΙΙ

Φυλλάδιο 3

**1**). Να εξετάσετε κατά πόσο οι ακόλουθες συναρτήσεις $f, g, h$, είναι ομοιόμορφα συνεχείς ή όχι (με απόδειξη):

$$i) \quad f : (0, +\infty) \to \mathbf{R}, \quad f(x) = \sin x, \ \ x \in (0, +\infty).$$

$$ii) \quad g : (0, +\infty) \to \mathbf{R}, \quad g(x) = \sin x^2, \ \ \forall x > 0.$$

$$iii) \quad h : [0, +\infty) \to \mathbf{R}, \quad h(x) = \sqrt{x}, \ \ \forall x > 0.$$

**2**). Έστω $f : [0, +\infty) \to \mathbf{R}$, συνεχής συνάρτηση για την οποία επιπρόσθετα ισχύει:

$$\lim_{x \to +\infty} (f(x) - 2x - 1) = 0.$$

Αποδείξτε ότι η $f$ είναι ομοιόμορφα συνεχής.

**3**). α) Έστω $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, συνάρτηση για την οποία επιπρόσθετα ο περιορισμός της $f$ είναι ομοιόμορφα συνεχής στα διαστήματα $(-\infty, 0]$ και $[0, +\infty)$. Αποδείξτε ότι η $f$ είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $\mathbf{R}$. Συνεχίζει να ισχύει το αποτέλεσμα αν η $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, είναι ομοιόμορφα συνεχής στα υποδιαστήματα $(-\infty, 0]$ και $(0, +\infty)$ ?

β) Έστω $g : \mathbf{R} \to [0, +\infty)$, συνάρτηση ώστε η $g^2$ να είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $\mathbf{R}$. Αποδείξτε ότι η $g$ είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $\mathbf{R}$. Είναι η $g$ ομοιόμορφα συνεχής στο $\mathbf{R}$ εαν γνωρίζουμε ότι η $g^{\frac{1}{2}}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $\mathbf{R}$ ?

**4**).(Υπολογισμός εμβαδού μοναδιαίου κύκλου) Στον μοναδιαίο κύκλο εγγράφουμε κανονικό $n$-πολύγωνο και περιγράφουμε κανονικό $n$-πολύγωνο. Εαν $\mathcal{E}$ είναι το εμβαδό του μοναδιαίου κύκλου, αποδείξτε αρχικά την ανισότητα

$$\frac{n}{2} \sin \frac{2\pi}{n} \quad \leq \quad \mathcal{E} \quad \leq \quad n \tan \frac{\pi}{n}, \quad n \geq 3,$$

και στη συνέχεια αποδείξτε ότι

$$\mathcal{E} = \pi.$$

**ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!**