Πέμπτη 10 Μαρτίου 2016

Γ. Κωστάκης, Α. Τερτίκας

ΑΝΑΛΥΣΗ ΙΙ

Φυλλάδιο 5

1). α) Έστω η συνάρτηση $f : [0,1] \to [0,+\infty)$ είναι συνεχής και επιπρόσθετα ικανοποιεί

$$\int_0^1 f(x)\,dx = 0.$$

Αποδείξτε ότι $f \equiv 0$.

β) Έστω η συνάρτηση $g : [0,1] \to [0,+\infty)$ είναι φθίνουσα και επιπρόσθετα ικανοποιεί

$$\int_0^1 g(x)\,dx = 0.$$

Να βρείτε με απόδειξη όλες τις συναρτήσεις g με τις ανωτέρω ιδιότητες.

2). Δίνεται η συνάρτηση $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ φραγμένη που είναι τέτοια ώστε η συνάρτηση

$$e^{2f} + f^3$$

είναι Riemann ολοκληρώσιμη. Αποδείξτε ότι η συνάρτηση f είναι Riemann ολοκληρώσιμη επίσης.

3). Δίνεται ότι η συνάρτηση $g : [-1,1] \to \mathbf{R}$ είναι φραγμένη και Riemann ολοκληρώσιμη και θεωρούμε τη συνάρτηση $f : [-1,1] \to \mathbf{R}$ η οποία ορίζεται από

$$f(x) \ = \ 2 + \int_0^x \sqrt{g^2(t)+1}\,dt\ , \ \ x \in [-1,1].$$

Να εξεταστεί κατά πόσο η συνάρτηση f είναι
(α) Ομοιόμορφα συνεχής.
(β) Lipschitz συνεχής.
(γ) Παραγωγίσιμη συνάρτηση.
Να αιτιολογήστε πλήρως τις απαντήσεις σας.

4). Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ που είναι φραγμένη και Riemann ολοκληρώσιμη σε όλα τα φραγμένα διαστήματα της μορφής $[a,b]$. Εαν επιπρόσθετα η f ικανοποιεί

$$f(x) = x^{2016} + e^{x^3} + 2\int_0^x f^2(x)\,dx, \quad \forall x \in \mathbf{R},$$

αποδείξτε ότι:
(α) Η f είναι συνεχής.
(β) Η f είναι παραγωγίσιμη.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!