Πέμπτη 17 Μαρτίου 2016

Γ. Κωστάκης, Α. Τερτίκας

ΑΝΑΛΥΣΗ ΙΙ

Φυλλάδιο 6 (Θέματα της Προόδου)

1). Δίνεται η συνάρτηση $f : (0, +\infty) \to \mathbf{R}$, με τύπο

$$f(x) \;=\; \frac{\sin x}{x}, \quad x > 0.$$

Εξετάστε αν η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $(0, +\infty)$.

2). Έστω η συνάρτηση $f : [0, 1] \to \mathbf{R}$ με τύπο

$$f(x) \;= \begin{cases} 0, & x = \frac{1}{n}, \ \ n = 2, 3, 4, \\ 1, & x \in [0, 1] \setminus \{\frac{1}{n}, \ \ n = 2, 3, 4\}. \end{cases}$$

Αποδείξτε ότι η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη και στη συνέχεια βρείτε το ολοκλήρωμα

$$\int_0^1 f(x)\, dx.$$

3). Δίνεται η συνάρτηση $g : [0, +\infty) \to \mathbf{R}$ με τύπο

$$g(x) \;= \begin{cases} 1, & x \in [0, 1), \\ 1 + x, & x \geq 1, \end{cases}$$

και ορίζουμε την $f : [0, +\infty) \to \mathbf{R}$ με τύπο

$$f(x) = \int_0^x g(t)\, dt, \quad x \geq 0.$$

Αποδείξτε ότι:
α) Η g είναι Riemann ολοκληρώσιμη στο $[0, x]$, $x > 1$ και βρείτε τον τύπο της f.
β) Η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x = 1$.
γ) Η f είναι Lipschitz συνεχής στο $[0, 2016)$ και δεν είναι Lipschitz συνεχής στο $[0, +\infty)$.
δ) Η f δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[0, +\infty)$.

4). Δίνεται η συνάρτηση $g : [0, 2] \to \mathbf{R}$ με τύπο

$$g(x) \;= \begin{cases} -1, & x \in [0, 1], \\ \ \ 1, & 1 < x \leq 2, \end{cases}$$

και η $f : [0, 2] \to \mathbf{R}$ η οποία είναι φραγμένη και Riemann ολοκληρώσιμη. Εαν η f επιπρόσθετα ικανοποιεί

$$f(x) \;=\; g(x) + \int_0^x \sqrt{f^2(t) + 1}\, dt\ , \ \ x \in [0, 2],$$

αποδείξτε ότι η f δεν είναι συνεχής στο $x = 1$ και μάλιστα ισχύει

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) - \lim_{x \to 1^-} f(x) = 2.$$

<u>ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!</u>