ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Πέμπτη 24 Μαρτίου 2016

Γ. Κωστάκης, Α. Τερτίκας

ΑΝΑΛΥΣΗ ΙΙ

Φυλλάδιο 7

1). Δίνεται η ακολουθία συναρτήσεων $f_n : [-1,1] \to \mathbf{R}$, με τύπο

$$f_n(x) \;=\; x^n(1-x^2), \quad x \in [-1,1], \;\; n \in \mathbf{N}.$$

Εξετάστε αν η ακολουθία συναρτήσεων f_n συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[-1,1]$.

2). Δίνεται η ακολουθία συναρτήσεων $f_n : [0,1] \to \mathbf{R}$, με τύπο

$$f_n(x) \;=\; \frac{2nx}{1+n^2x^2}, \quad x \in [0,1], \;\; n \in \mathbf{N}.$$

α) Εξετάστε αν η ακολουθία συναρτήσεων f_n συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[0,1]$.

β) Αποδείξτε ότι

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(x)\, dx \;=\; 0.$$

Ποιά είναι η αξία της συγκεκριμένης ακολουθίας f_n?

3). Δίνεται η ακολουθία συνεχών συναρτήσεων $f_n : [0,1] \to \mathbf{R}$, που είναι τέτοια ώστε

$$\forall x \in [0,1], \quad \lim_{n\to+\infty} f_n(x) \;=\; f(x).$$

α) Εαν

$$f(x) \;=\begin{cases} 1, & x \in [0,1), \\ 0, & x = 1, \end{cases}$$

μπορεί η σύγκλιση

$$\lim_{n\to+\infty} f_n \;=\; f,$$

να είναι ομοιόμορφη;

β) Εάν η f είναι φραγμένη και Riemann ολοκληρώσιμη και επιπρόσθετα ισχύει

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(x)\, dx \;=\; \int_0^1 f(x)\, dx.$$

Είναι απαραίτητα η σύγκλιση
$$\lim_{n\to+\infty} f_n \;=\; f,$$
ομοιόμορφη;

Τεκμηριώστε πλήρως την απάντησή σας.

4). Εστω η συνάρτηση $g : [0,1] \to \mathbf{R}$ είναι φραγμένη και Riemann ολοκληρώσιμη. Επιπρόσθετα υποθέτουμε ότι η g είναι συνεχής στο $x = 1$ με $g(1) \;=\; 0$. Στη συνέχεια ορίζουμε την ακολουθία συναρτήσεων $f_n : [0,1] \to \mathbf{R}$, με τύπο
$$f_n(x) \;=\; x^n g(x), \quad x \in [0,1], \;\; n \in \mathbf{N}.$$
Αποδείξτε ότι το όριο
$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(x)\, dx$$
υπάρχει. Μπορείτε να το προσδιορίστε;

Αποδείξτε το ίδιο αποτέλεσμα αν απλά η $g : [0,1] \to \mathbf{R}$ είναι φραγμένη και Riemann ολοκληρώσιμη χωρίς να είναι συνεχής στο $x = 1$. Ποιά ε΄ίναι η διαφορά με την προηγούμενη περίπτωση;

<u>ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!</u>