ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Πέμπτη 31 Μαρτίου 2016

Διδάσκοντες: Γ. Κωστάκης, Α. Τερτίκας

ΑΝΑΛΥΣΗ ΙΙ

Φυλλάδιο 8

1). Δίνεται η ακολουθία συναρτήσεων $f_n : [0, +\infty) \to \mathbf{R}$, με τύπο

$$f_n(x) \;=\; \sin(\frac{x}{n}), \quad x \in [0, +\infty), \;\; n \in \mathbf{N}.$$

Εξετάστε αν :

α) Η ακολουθία συναρτήσεων f_n συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[0, 2016]$.

β) Αν υπάρχει το όριο

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{2016} f_n(x)\, dx.$$

Σε περίπτωση θετικής απάντησης να προσδιοριστεί το ανωτέρω όριο.

γ) Η ακολουθία συναρτήσεων f_n συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[0, +\infty)$?

2). Δίνεται η ακολουθία των συναρτήσεων $g_n : [0, 1] \to \mathbf{R}$, με τύπο

$$g_n(x) = nx(1-x)^n \;, \;\; x \in [0,1], \;\; n \in \mathbf{N}.$$

α) Βρείτε αρχικά το κατά σημείο όριο g της ακολουθίας g_n και στη συνέχεια αποδείξτε ότι η σύγκλιση

$$g_n \to g, \;\; n \to +\infty,$$

δεν είναι ομοιόμορφη.

β) Αποδείξτε επίσης ότι:

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 g_n(x)\, dx \;=\; \int_0^1 g(x)\, dx.$$

Γιατί είναι ενδιαφέρουσα η άσκηση αυτή;

3). Δίνεται η ακολουθία των συνεχών συναρτήσεων $f_n : [0, 1] \to \mathbf{R}$, και $f : [0,1] \to \mathbf{R}$ ώστε η σύγκλιση

$$f_n \to f, \;\; n \to +\infty,$$

είναι ομοιόμορφη.

Κατασκευάζουμε την ακολουθία συναρτήσεων $g_n : [0,1] \to \mathbf{R}$, με τύπο

$$g_n(x) = \int_0^1 (x + t^2)^{4/3} f_n(t)\, dt\ ,\ \ x \in [0,1],\ \ n \in \mathbf{N}.$$

Αποδείξτε
(α) Η ακολουθία g_n συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[0,1]$ καθώς $n \to +\infty$.
(β) Η ακολουθία g_n είναι ακολουθία παραγωγισίμων συναρτήσεων και μάλιστα η g_n' συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[0,1]$ καθώς $n \to +\infty$.

4). Δίνεται η συνάρτηση $f : [0,1] \to \mathbf{R}$ συνεχής. Αποδείξτε ότι υπάρχει το όριο

$$\lim_{n \to +\infty} (n+1) \int_0^1 x^n f(x)\, dx\ ,$$

το οποίο και να προσδιορίστε.
Υπόδειξη: Ποιά είναι η απάντηση αν η f είναι παραγωγίσιμη με f' συνεχή;

<u>ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!</u>