ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Πέμπτη 7 Απριλίου 2016

Διδάσκοντες: Γ. Κωστάκης, Α. Τερτίκας

ΑΝΑΛΥΣΗ ΙΙ

Φυλλάδιο 9

1). Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη που επιπρόσθετα υπάρχει $M > 0$, ώστε να ικανοποιεί

$$|f''(x)| \leq M, \quad x \in \mathbf{R}.$$

Για $n \in \mathbf{N}$ κατασκευάζουμε την ακολουθία $f_n : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ με τύπο

$$f_n(x) = n\left(f(x + \frac{1}{n}) - f(x)\right), \quad x \in \mathbf{R}.$$

Αποδείξτε ότι υπάρχει το όριο

$$g(x) := \lim_{n \to +\infty} f_n(x), \quad x \in \mathbf{R},$$

και να προσδιορίστε την $g(x), \quad x \in \mathbf{R}$.

Στη συνέχεια αποδείξτε ότι η σύγκλιση

$$\lim_{n \to +\infty} f_n(x) = g(x)$$

είναι ομοιόμορφη.

2). α) Έστω $f : [0,1] \to \mathbf{R}$ συνεχής συνάρτηση. Αποδείξτε ότι υπάρχει ακολουθία πολυωνύμων $p_n, \quad n = 1, 2, \cdots$ ώστε

$$\lim_{n \to +\infty} p_n^2(x) = f^2(x), \quad \text{ομοιόμορφα},$$

β) Έστω $g : [0,1] \to \mathbf{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση . Αποδείξτε ότι υπάρχει ακολουθία πολυωνύμων $p_n, \quad n = 1, 2, \cdots$ ώστε

$$\lim_{n \to +\infty} p_n(x) = g(x), \quad \text{ομοιόμορφα},$$

$$\lim_{n \to +\infty} p_n'(x) = g'(x), \quad \text{ομοιόμορφα}.$$

γ) Έστω $h : [0,1] \to \mathbf{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση . Αποδείξτε ότι υπάρχει ακολουθία πολυωνύμων $Q_n, \quad n = 1, 2, \cdots$ ώστε

$$\lim_{n \to +\infty} Q_n(x) = h(x), \quad \text{ομοιόμορφα},$$

$$\lim_{n\to+\infty} Q_n'(x) = h'(x), \quad \text{ομοιόμορφα},$$
$$\lim_{n\to+\infty} Q_n''(x) = h''(x), \quad \text{ομοιόμορφα}.$$

3). Έστω η συνεχής συνάρτηση $f : [0,1] \to \mathbf{R}$ για την οποία επιπρόσθετα ισχύει

$$\int_0^1 x^{k+2}\, f(x)\, dx = \int_0^1 x^k\, f(x)\, dx, \quad k = 1, 2, \cdots$$

Αποδείξτε ότι

$$f \equiv 0.$$

4). Έστω $f : [0,1] \to \mathbf{R}$ φραγμένη και Riemann ολοκληρώσιμη συνάρτηση για την οποία ισχύει

$$\int_0^1 f(x)\phi'(x)\, dx = \int_0^1 (\phi^2(x) + (\phi'(x))^2)\, dx, \quad \forall \phi \in \mathbf{C}^\infty[0,1].$$

Εάν $\psi : [0,1] \to \mathbf{R}$ είναι συνεχώς παραγωγίσιμη (δηλ. η ψ' είναι συνεχής συνάρτηση), αποδείξτε ότι θα ισχύει επίσης

$$\int_0^1 f(x)\psi'(x)\, dx = \int_0^1 (\psi^2(x) + (\psi'(x))^2)\, dx.$$

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!