Πέμπτη 18 Φεβρουαρίου 2016

Διδάσκων: Α. Τερτίκας

ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

Φυλλάδιο 2

1). Στον χώρο $\mathbf{R}^3$ δίνονται τα μη μηδενικά διανύσματα $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$ που ικανοποιούν:

$$\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OB}, \quad \overrightarrow{OB} \perp \overrightarrow{OC}, \quad \overrightarrow{OC} \perp \overrightarrow{OA}.$$

α) Αποδείξτε ότι τα διανύσματα $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

β) Αποδείξτε ότι το τρίγωνο ABC δεν μπορεί να είναι ορθογώνιο.

Υπόδειξη: Αποδείξτε αρχικά ότι αν ένα τρίγωνο ABC είναι ορθογώνιο στην κορυφή A τότε ισχύει το πυθαγόρειο θεώρημα

$$|\overrightarrow{AB}|^2 + |\overrightarrow{AC}|^2 = |\overrightarrow{BC}|^2.$$

2). Να αποδείξτε τις ταυτότητες

α)

$$|\overrightarrow{x} \times \overrightarrow{y}|^2 = |\overrightarrow{x}|^2 |\overrightarrow{y}|^2 - (\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{y})^2.$$

β)

$$\overrightarrow{a} \cdot (\overrightarrow{b} \times (\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b})) = |\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}|^2.$$

Υπόδειξη:

$$\overrightarrow{a} \times (\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c}) = (\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{c})\overrightarrow{b} - (\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b})\overrightarrow{c}.$$

3). Δίνονται τα μη μηδενικά διανύσματα $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbf{R}^3$.

α) Εάν υπάρχει διάνυσμα $\vec{x} \in \mathbf{R}^3$ ώστε η εξίσωση

$$\vec{a} \times \vec{x} = \vec{b},$$

να έχει λύση, αποδείξτε τότε ότι ισχύει:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0.$$

β) Έστω ότι $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$. Με χρήση των διανυσμάτων $\vec{a}, \vec{b}$, να βρείτε τη μορφή όλων των διανυσμάτων $\vec{x} \in \mathbf{R}^3$ που ικανοποιούν την διανυσματική εξίσωση

$$\vec{a} \times \vec{x} = \vec{b}.$$

Να γίνει η επαλήθευση ότι τα διανύσματα που βρήκατε επαληθεύουν την εξίσωση.

Υπόδειξη: Μια βάση του χώρου είναι τα $\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b}$ (γιατί;)

4). Δίνεται τρίγωνο ABC, και τα σημεία D, E ώστε να ισχύουν

$$\overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}, \quad \overrightarrow{CD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CB}.$$

Οι ευθείες AD, CE τέμνονται στο O.
α) Βρείτε $x, y \in \mathbf{R}$ ώστε να ισχύουν

$$\overrightarrow{AO} = x\overrightarrow{AD}, \quad \overrightarrow{CO} = y\overrightarrow{CE}.$$

β) Αποδείξτε ότι το εμβαδό του τριγώνου OAC είναι το $\frac{1}{4}$ του εμβαδού το αρχικού τριγώνου ABC.

<u>ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!</u>