

Πέμπτη 25 Φεβρουαρίου 2016

Διδάσκων: Α. Τερτίκας

ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

Φυλλάδιο 3

1). Βρείτε όλους τους μιγαδικούς αριθμούς $z \in \mathbf{C}$ που ικανοποιούν:

$$|z| = 1,$$

$$|z^{500} + \bar{z}^{500}| = 1.$$

Πόσοι διαφορετικοί μιγαδικοί υπάρχουν;

2). α) Να υπολογίσετε τον μιγαδικό

$$(1 + i)^{2016}.$$

β) Για $\theta \neq 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$ αποδείξτε ότι

$$\cos \phi + \cos(\phi + \theta) + \dots + \cos(\phi + 2015 \theta) = \frac{\sin(1008 \theta) \cos\left(\phi + \frac{2015 \theta}{2}\right)}{\sin \frac{\theta}{2}}.$$

3). Να βρείτε όλους τους πραγματικούς $\alpha \in \mathbf{R}$ για τους οποίους η εξίσωση

$$z^3 + (3 + i)z^2 - 3z - (\alpha + i) = 0,$$

να έχει μια τουλάχιστον πραγματική ρίζα.

4). (Η άσκηση να γίνει με χρήση μιγαδικών αριθμών) Δίνεται τρίγωνο ABC . Εξωτερικά του τριγώνου ABC κατασκευάζουμε τρίγωνα ABR , ABP , CAQ ώστε:

$$P\hat{B}C = C\hat{A}Q = 45^\circ,$$

$$B\hat{C}P = Q\hat{C}A = 30^\circ,$$

$$A\hat{B}R = R\hat{A}B = 15^\circ.$$

Αποδείξτε ότι το τρίγωνο QRP είναι ορθογώνιο και ισοσκελές ($RQ = RP$).

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!