ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Πέμπτη 24 Μαρτίου 2016

Διδάσκων: Α. Τερτίκας

ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

Φυλλάδιο 6 (Θέματα Προόδου)

1). Δίνονται οι ευθείες

$$(\varepsilon_1): \quad (x,y,z) = t(1,-1,2), \quad t \in \mathbf{R},$$
$$(\varepsilon_2): \quad (x,y,z) = (1,0,-1) + t(-1,1,1), \quad t \in \mathbf{R}.$$

α) Δείξτε ότι οι δύο ευθείες είναι ασύμβατες (δηλ. δεν τέμνονται και δεν είναι παράλληλες).

β) Βρείτε την εξίσωση ευθείας (ε) η οποία τέμνει κάθετα τις (ε_1) και (ε_2).

γ) Βρείτε την ελάχιστη απόσταση των (ε_1) και (ε_2).

δ) Βρείτε την εξίσωση του επιπέδου που ορίζουν οι ευθείες (ε_1) και (ε).

2). Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ABC, $AB = AC$ και τα σημεία D, E, ώστε να ισχύουν

$$\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}, \quad \overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB},$$

καθώς επίσης και τα σημεία F, K, που ικανοποιούν

$$\overrightarrow{BD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BF}, \quad \overrightarrow{CE} = \frac{3}{4}\overrightarrow{CK}.$$

Να αποδείξτε ότι τα σημεία A, F, K ειναι συνευθειακά.

3). Δίνονται ο κύκλος

$$(C_1): \quad x^2 + y^2 + 2x - 2y \ = \ 0,$$

και οι ευθείες

$$(\varepsilon_1): \quad x + y \ = \ 0,$$
$$(\varepsilon_2): \quad x - y \ = \ 0.$$

α) Αποδείξτε ότι ο κύκλος (C_1) και η ευθεία (ε_1) τέμνονται σε δύο σημεία A, B.

β) Αν (C) κύκλος που διέρχεται από τα σημεία A, B αποδείξτε ότι υπάρχει $\lambda \in \mathbf{R}$ ώστε

$$x^2 + y^2 + 2\lambda x - 2(2-\lambda)y \ = \ 0.$$

γ) Αν (C) κύκλος που εφάπτεται των ευθειών (ε_1), (ε_2) αποδείξτε ότι υπάρχει $\lambda \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ ώστε είτε

$$(C): \quad x^2 + y^2 - 2\sqrt{2}\lambda x + \lambda^2 \;=\; 0,$$

είτε

$$(C): \quad x^2 + y^2 - 2\sqrt{2}\lambda y + \lambda^2 \;=\; 0.$$

4). Δίνεται παραλληλόγραμμο $ABCD$, και τα σημεία E, F ώστε να ισχύουν

$$\overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}, \quad \overrightarrow{DF} = \frac{2}{3}\overrightarrow{DC}.$$

Οι ευθείες AF, DE τέμνονται στο M.
α) Βρείτε $x, y \in \mathbf{R}$ ώστε να ισχύουν

$$\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AF}, \quad \overrightarrow{DM} = y\overrightarrow{DE}.$$

β) Αποδείξτε ότι το εμβαδό του τριγώνου MEF είναι το $\frac{1}{7}$ του εμβαδού του παραλληλογράμμου $ABCD$.

<u>ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!</u>