Μιγαδική Ανάλυση

26/9/2017

- Πρόοδος: 30%
- Φυλλάδια Ασκήσεων
- Τελικό Διαγώνισμα: 70%
- Σημειώσεις του μαθήματος/Μήτση/Παπαδημητράκη

Μιγαδικοί Αριθμοί ($\mathbb{C}$ complex)

$z\in\mathbb{R}$ $z^2+1=0$, αδύνατη

$z\in\mathbb{R} \Rightarrow z^2\geq 0$

i με ιδιότητα $i^2=-1$.

$(-i)^2=-1$.

$z\in\mathbb{C} \Longleftrightarrow$ (καρτεσιανή αναπαράσταση)

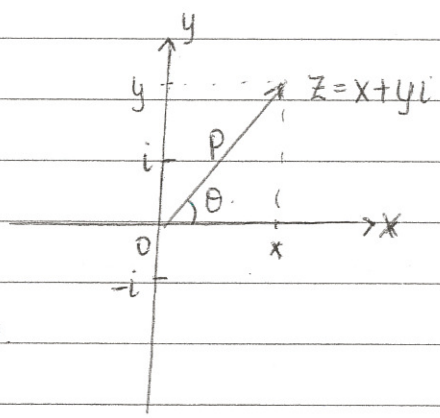
$\exists x,y\in\mathbb{R}: z=x+yi$

- Πότε $z_1=z_2$;

Αν $z_1=a_1+b_1 i$, $a_1,b_1\in\mathbb{R}$

$z_2=a_2+b_2 i$, $a_2,b_2\in\mathbb{R}$

$$z_1=z_2 \Longleftrightarrow \begin{cases} a_1=a_2 \\ b_1=b_2 \end{cases}$$

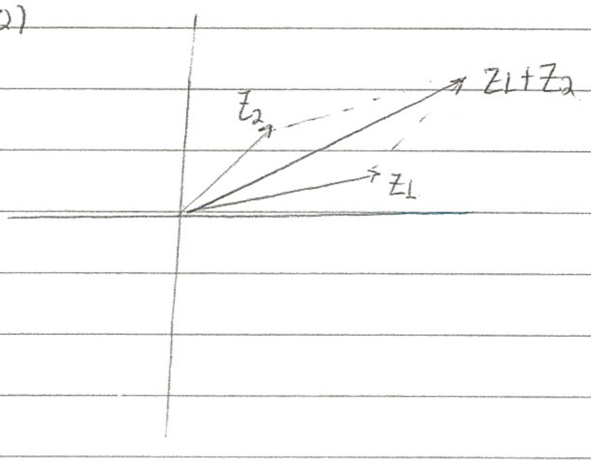


$$z=(x,y) = (x,0)+(0,y) = x(1,0)+y(0,1)$$

$z=x+yi$, $x,y\in\mathbb{R}$, $\mathrm{Re}\,z=x$, $\mathrm{Im}\,z=y$.

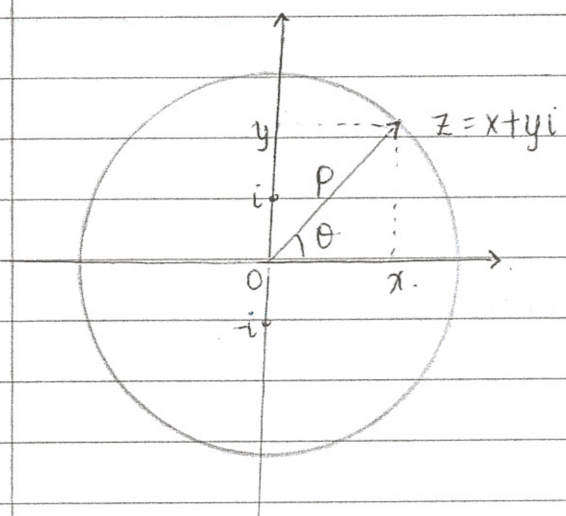
$z_1+z_2=a_1+a_2+(b_1+b_2)i$

$z_1=(a_1,b_1)$, $z_2=(a_2,b_2)$ $\Longrightarrow z_1+z_2=(a_1+a_2, b_1+b_2)$



$$z_1 \cdot z_2 = (a_1+b_1 i)(a_2+b_2 i)$$
$$= a_1(a_2+b_2 i) + b_1 i (a_2+b_2 i)$$
$$= (a_1 a_2 + a_1 b_2 i) + (b_1 a_2 i + b_1 b_2 i^2)$$
$$= a_1 a_2 - b_1 b_2 + (a_1 b_2 + a_2 b_1) i$$

Πολική μορφή (τριγωνομετρική μορφή)



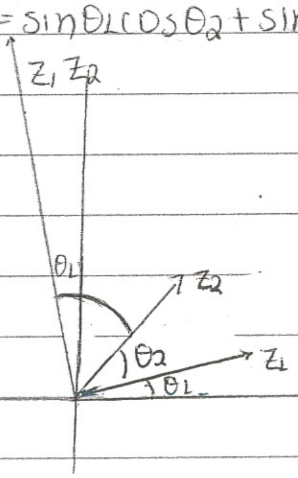
$$z = |z| e^{i\theta}$$
$$p \geq 0$$
$$= |z| (\cos\theta + i\sin\theta)$$

$\theta = \arg z$ (πρωτεύον όρισμα)

$-\pi < \theta \leq \pi$

$\theta + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ Arg z.

$$z_1 = |z_1| e^{-i\theta_1}$$
$$z_2 = |z_2| \cdot e^{-i\theta_2}$$
$$z_1 \cdot z_2 = |z_1| |z_2|\, e^{i\theta_1} \cdot e^{i\theta_2}$$
$$= |z_1 \cdot z_2|\, e^{i(\theta_1+\theta_2)}$$
$$\cos(\theta_1+\theta_2) = \cos\theta_1 \cos\theta_2 - \sin\theta_1 \cdot \sin\theta_2$$
$$\sin(\theta_1+\theta_2) = \sin\theta_1 \cos\theta_2 + \sin\theta_2 \cdot \cos\theta_1$$



Τύπος του Euler

$e^{i\theta},\ \theta \in \mathbb{R}$

$$= \cos\theta + i\sin\theta$$

$e^{z} = e^{x+yi}$, $x, y \in \mathbb{R}$

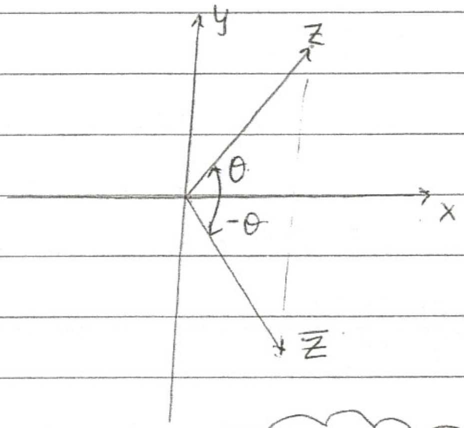
$= e^{x} \cdot e^{yi}$

$= e^{x} \cdot (\cos y + i \sin y)$

$z \longrightarrow \bar{z}$ (συζυγής)

$z = x+yi$ $\quad \bar{z} = x-yi$

$x, y \in \mathbb{R}$



Ιδιότητες

- $\overline{z_1+z_2} = \bar{z_1} + \bar{z_2}$
- $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z_1} \cdot \bar{z_2}$
- $z_n \in \mathbb{C}$ Αν $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ συγκλίνει

$\Rightarrow \overline{\sum_{n=1} z_n} = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{z_n}$

$\sigma_m = \prod_{n=1}^{m} z_n = z_1 \cdots z_m$

$z_n \in \mathbb{C}$ $\quad \sum_{n=1}^{+\infty} z_n = \lim_{m \to +\infty} \sum_{n=1}^{m} z_n$

$S_m = \sum_{n=1}^{m} z_n$

Τριγωνομετρική μορφή

$z = x+yi,\ x, y \in \mathbb{R} \xrightarrow{z \neq 0} -\pi < \theta \leq \pi$. $\quad x = \sqrt{x^2+y^2} \cdot \cos\theta$.

$|z| = \sqrt{x^2+y^2}$ $\quad y = \sqrt{x^2+y^2} \sin\theta$.

$z = \rho \cdot e^{i\theta}$, $\rho > 0$

$= \underbrace{\rho\cos\theta}_{x} + \underbrace{\rho\sin\theta}_{y} i$

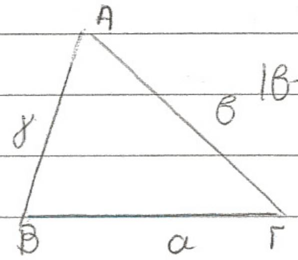
- $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$ $\quad$ (ενώ $x \in \mathbb{R}$ $|x|^2 = x^2$)
- $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. $\frac{1}{z} = \frac{1}{\underbrace{x+yi}_{z}} \frac{\overline{x+yi}}{\underbrace{\overline{x+yi}}_{\bar{z}}} = \frac{x-yi}{|z|^2} = \frac{x-yi}{x^2+y^2} = \frac{x}{x^2+y^2} - \frac{y}{x^2+y^2} i$

$z = x+yi$

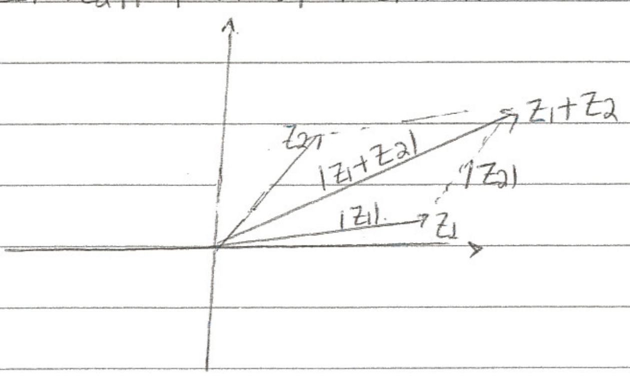
$x, y \in \mathbb{R}$.

- Σύνθετη: (Τριγωνική ανισότητα)

$||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$



$|\beta-\gamma| < \alpha \leq \beta+\gamma$.



Απόδειξη:

$|z_1+z_2| \leq |z_1|+|z_2| \Leftrightarrow |z_1+z_2|^2 \leq (|z_1|+|z_2|)^2$

$\Leftrightarrow (z_1+z_2)\overline{(z_1+z_2)} \leq |z_1|^2+2|z_1|\,|z_2|+|z_2|^2$

$\Leftrightarrow (z_1+z_2)(\overline{z_1}+\overline{z_2}) \leq z_1\overline{z_1}+2|z_1||z_2|+z_2\cdot\overline{z_2}$

$\Leftrightarrow \cancel{z_1\overline{z_1}}+z_1\overline{z_2}+z_2\cdot\overline{z_1}+\cancel{z_2\cdot\overline{z_2}} \leq \cancel{z_1\overline{z_1}}+2|z_1|\,|z_2|+\cancel{z_2\overline{z_2}}$

$\Leftrightarrow \underbrace{z_1\cdot\overline{z_2}}_{\omega}+\underbrace{z_2\cdot\overline{z_1}}_{\overline{\omega}} \leq 2|z_1||z_2|$ ✓

$|z_1\overline{z_2}|=|z_1||\overline{z_2}|=|z_1||z_2|$

$|z_2\overline{z_1}| \leq |z_1|\cdot|z_2|$

$\omega=\alpha+\beta i,\ \alpha,\beta\in\mathbb{R}$

$\omega+\overline{\omega}=2\alpha \leq 2|\omega|=2\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$

Έχουμε $z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2=2\,\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2}) \leq 2|z_1\overline{z_2}|$

$=2|z_1||z_2|$

Για την ισότητα θα πρέπει

$z_1=\lambda\cdot z_2,\ \lambda>0,\ z_1,z_2\neq 0$

Άσκηση: Αν $z_1,\dots,z_n\in\mathbb{C}$

$|z_1+z_2+\dots+z_n| \leq |z_1|+|z_2|+\dots+|z_n|$

Πότε ισχύει η ισότητα;

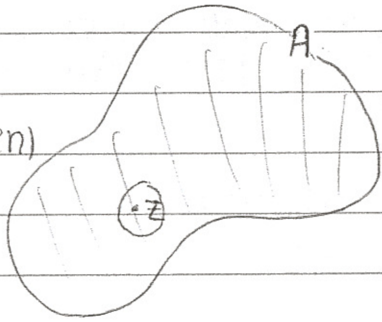
→ Αν $z_1\cdot z_2\cdots z_n\neq 0$ τότε $\exists\,\lambda_1,\dots,\lambda_{n-1}$ ώστε $z_1=\lambda_1 z_n$

$z_2=\lambda_2 z_n$

$\vdots$

$z_{n-1}=\lambda_{n-1}\cdot z_n$

Ανοικτό σύνολο



$\emptyset\neq A\subseteq\mathbb{C}$

A ανοικτό (open)

όταν $\forall z\in A$

$\exists\,\varepsilon>0$ ώστε

$B(z,\varepsilon)\subseteq A$

$B_\varepsilon(z)$ ''

όπου $B(z,\varepsilon)=\{\omega\in\mathbb{C}\mid |\omega-z|<\varepsilon\}$

ανοικτή μπάλα

$z \in \mathbb{C}$ $|w-z|<\varepsilon$

$z=a+\beta i$, $a,\beta,x,y \in \mathbb{R}$

$w=x+yi$

$w-z=x-a+(y-\beta)i$

$|w-z|=\sqrt{(x-a)^2+(y-\beta)^2}$

$|w-z|<\varepsilon \Leftrightarrow (x-a)^2+(y-\beta)^2<\varepsilon^2$

<u>Κλειστό Σύνολο</u>

$\varnothing \neq B \subseteq \mathbb{C}$ κλειστό (closed) όταν $\mathbb{C} \setminus B = B^c$ είναι ανοικτό

Μιγαδική Ανάλυση

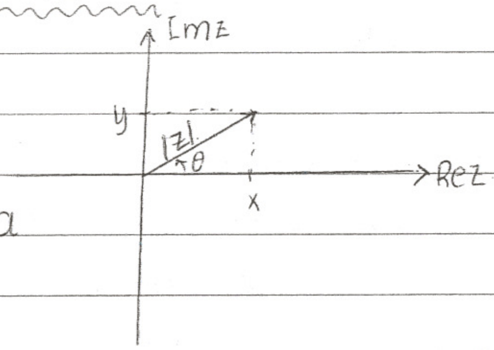
28/9/2017

$z=x+yi$, $x,y\in\mathbb{R}$

$z=|z|e^{i\theta}=|z|(\cos\theta+i\sin\theta)$

$\arg z=\theta$ πρωτεύον όρισμα

$-\pi<\theta\le\pi$



$\operatorname{Arg} z=\{\arg z+2k\pi, k\in\mathbb{Z}\}$

Τριγωνική Ανισότητα:

$|z+w|\le|z|+|w|$

A ανοικτό $\forall a\in A\ \exists\varepsilon>0,\ B(a,\varepsilon)\subset A$.

B κλειστό $\Leftrightarrow$ B^c ανοικτό

K συμπαγές $\subseteq\mathbb{C}$

$\forall A_i$ ανοικτό κάλυμμα $K\subseteq\bigcup A_i \Rightarrow \exists$ πεπερασμένη υποκάλυψη

$\exists i_1,\dots,i_m: K\subseteq\bigcup_{k=1}^{m} A_{i_k}$

K συμπαγές $\Rightarrow$ K κλειστό
φραγμένο

$K\subseteq\mathbb{C}$ $\Leftrightarrow$ K κλειστό και φραγμένο

$K\subseteq\bigcup_{n=1}^{\infty} B(0,n)=\mathbb{C}$

συμπαγές $\exists n_k$ $k=1,\dots,m$.

$K\subseteq\bigcup_{k=1}^{m} B(0,n_k)=B(0,n_m)$

• Πότε το A είναι φραγμένο;

Αν $\exists M>0: \forall a\in A, |a|\le M$

Αν $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία $\subseteq\mathbb{C}$

φραγμένη αν $\exists M>0: |z_n|\le M\ \forall n\in\mathbb{N}$

$z_n=a_n+b_n i$, $a_n,b_n\in\mathbb{R}$

$\sqrt{a_n^2+b_n^2}\le M \Rightarrow \sqrt{a_n^2}\le\sqrt{a_n^2+b_n^2}\le M$

$|a_n|\le M$ $\forall n\in\mathbb{N}$, αντίστοιχα $|b_n|\le M$

Αν $|a_n| \leq M$ και $|b_n| \leq M$ $\forall n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow |z_n| \leq \sqrt{2} M$

· Πότε $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει?

1ος τρόπος: $\exists z_0 \in \mathbb{C}$, $\forall \varepsilon > 0$ $\exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} : |z_n - z_0| < \varepsilon$ $\forall n \geq n_0$

$z_n = a_n + b_n i$, $a_n, b_n \in \mathbb{R}$

$z_0 = a_0 + b_0 i$, $a_0, b_0 \in \mathbb{R}$

Τότε $\lim_{n\to+\infty} z_n = z_0$ $(z_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} z_0 \Leftrightarrow \underset{\overset{\|}{a_n}}{\mathrm{Re}\, z_n} \to \underset{\overset{\|}{a_0}}{\mathrm{Re}\, z_0}$

$\underset{\overset{\|}{b_n}}{\mathrm{Im}\, z_n} \to \underset{\overset{\|}{b_0}}{\mathrm{Im}\, z_0}$

Απόδειξη:

"$\Rightarrow$" (υποθέτουμε ότι $\lim z_n = z_0$)

$\forall \varepsilon > 0$ $\exists n_0 \in \mathbb{N} : |z_n - z_0| < \varepsilon$ $\forall n \geq n_0$

Αν $z_n = a_n + b_n i$, $a_n, b_n \in \mathbb{R}$

$z_0 = a_0 + b_0 i$, $a_0, b_0 \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \sqrt{(a_n - a_0)^2 + (b_n - b_0)^2} < \varepsilon$ $\forall n \geq n_0$

οπότε $|a_n - a_0| \leq |z_n - z_0| < \varepsilon$ $\forall n \geq n_0$

$|b_n - b_0| \leq |z_n - z_0| < \varepsilon$ $\forall n \geq n_0$

"$\Leftarrow$" Υποθέτουμε $\underset{\overset{\|}{a_n}}{\mathrm{Re}\, z_n} \to \underset{\overset{\|}{a_0}}{\mathrm{Re}\, z_0}$

και

$\underset{\overset{\|}{b_n}}{\mathrm{Im}\, z_n} \to \underset{\overset{\|}{b_0}}{\mathrm{Im}\, z_0}$

$\forall \varepsilon > 0$ $\exists n_1 = n_1(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ ώστε $|a_n - a_0| < \varepsilon$, $\forall n \geq n_1$, $\forall n \geq n_0$

$\exists n_2 = n_2(\varepsilon) \in \mathbb{N}$: $|b_n - b_0| < \varepsilon$ $\forall n \geq n_2$, $\forall n \geq n_0$

Τότε $n_0 = \max(n_1, n_2)$

$|a_n - a_0| < \varepsilon$, $\forall n \geq n_0$

$|b_n - b_0| < \varepsilon$ $\forall n \geq n_0$

Όμως $|z_n - z_0| = \sqrt{(a_n - a_0)^2 + (b_n - b_0)^2} < \sqrt{\varepsilon^2 + \varepsilon^2} = \sqrt{2}\,\varepsilon$ $\forall n \geq n_0$

$\Rightarrow \exists \lim_{n\to+\infty} z_n = z_0$

2ος τρόπος: Αν z_n συγκλίνει $\Longleftrightarrow$ z_n ακολουθία Cauchy.

Απόδειξη: $N=\max(N_1,N_2)$

"$\Rightarrow$" $Re z_n$ είναι ακολουθία Cauchy $\Rightarrow \forall \varepsilon>0\ \exists N_1: |Re z_n - Re z_m| < \varepsilon \quad n,m \geq N$

$Im z_n$ είναι ακολουθία Cauchy $\Rightarrow \forall \varepsilon>0\ \exists N_2: |Im z_n - Im z_m| < \varepsilon; \ n,m \geq N$

$\Rightarrow |z_n - z_m| = \sqrt{(Re z_n - Re z_m)^2 + (Im z_n - Im z_m)^2} < \sqrt{2}\,\varepsilon \ , n,m \geq N$

Αν $z_n \to z_0$ $\Longrightarrow$ $z_n + w_n$ συγκλίνει

$w_n \to z_0$ $\quad \lim(z_n + w_n) = \lim z_n + \lim w_n$

$z_n \cdot w_n$ συγκλίνει

$\lim(z_n \cdot w_n) = \lim z_n \cdot \lim w_n$

Αν $w_n \neq 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$ $\Longrightarrow$ $\frac{z_n}{w_n}$ συγκλίνει

$w_0 \neq 0$

$$\lim \frac{z_n}{w_n} = \frac{\lim z_n}{\lim w_n}$$

Bolzano-Weierstrass

$z_n = a_n + b_n i$ φραγμένη.

$a_{n_k} \to a$

$b_{n_{k_\ell}} \to b$

$a_{3n} \to a$

b_{3n}

$b_{3n_k} \to b$

$\Rightarrow a_{3n_k} \to a$

$b_{3n_k} \to b$ Άρα $z_{3n_k} \to a + bi$

Ολική Διάταξη $\mathbb{C}$

z "$\geq$" $w \Longleftrightarrow Re z \geq Re w$

i) Αν z "$\geq$" $w \Rightarrow z + a$ "$\geq$" $w + a \quad \forall a \in \mathbb{C}$

ii) Αν z "$\geq$" w $\Longrightarrow z \cdot a$ "$\geq$" $w a$

a "$>$" 0

$z \neq 0$ $\quad z$ "$\geq$" 0

$-z$ "$\geq$" 0 $\quad (0$ "$\geq$" $z)$

$(-z$ "$\geq$" $\underset{0}{\underbrace{z - z}})$

α) Αν z "$\geq$" 0 $\Longrightarrow$ $z\cdot z$ "$\geq$" 0

z "$\geq$" 0 $\qquad$ z^2 "$\geq$" 0

β) Αν $-z$ "$\geq$" 0 $\Longrightarrow$ $(-z)^2$ "$\geq$" 0

Επειδή $-z$ "$\geq$" 0 $\qquad$ z^2 "$\geq$" 0

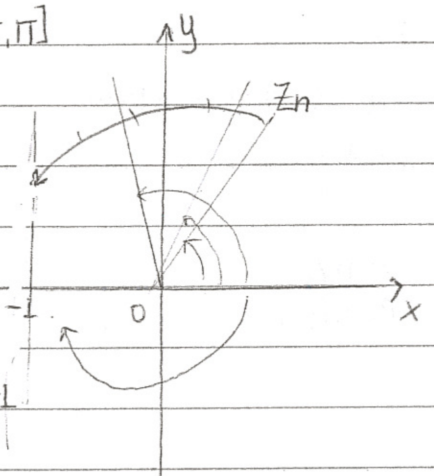
Αν $z\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$ έχουμε z^2 "$\geq$" 0

z^2+1 "$\geq$" 1

Επιλέγω $z=i$ τότε i^2+1 "$\geq$" $1>0$

0 "$\geq$" 1 αδύνατο ↯

$\arg z\in(-\pi,\pi]$



$\mathrm{Im}\, z_n>0$

$\mathrm{Im}\, z_n=-1$

$0<\arg z_n$

$\Longrightarrow$ $\arg z_n\to\pi$

$z_n=-1+\dfrac{i}{n}\Rightarrow \arg z_n\to+\pi$

$w_n=-1-\dfrac{i}{n}\Rightarrow \arg z_n\to-\pi$

$z_n=-1+\dfrac{(-1)^n}{n}i$

$\arg z_{2n}\to\pi$

$\arg z_{2n-1}\to-\pi$

$z=x+yi,\ x,y\in\mathbb{R}$

$e^z=e^x\cdot e^{yi}=e^x(\cos y+i\sin y)$

$\shortparallel$

$\exp(z)$

$e^{z+w}=e^z\cdot e^w$ ✓

Λογαριθμική Συνάρτηση

$x \in \mathbb{R}$. $\log x$. $e^{\log x} = x$.

$z = |z| \cdot e^{i \arg z}$, $z \neq 0$

$\log z = \log|z| + i\arg z \longrightarrow$ πρωτεύον λογάριθμος

$e^{\log z} = e^{\log|z| + i\arg z} = e^{\log|z|} e^{i\arg z} = |z| (\cos\arg z + i\sin\arg z) = z$

$\log_k z = \log|z| + i\arg z + 2k\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$

(δεν ορίζεται μονοσήμαντα ο λογάριθμος στους μιγαδικούς)

$e^{\log_k z} = z$

Μιγαδική Ανάλυση 3/10/2017

Για σύστημα: $\begin{cases} x=\alpha \\ y=\beta \end{cases} \Leftrightarrow \underbrace{x+yi}_{z} = \underbrace{\alpha+\beta i}_{\omega}$
(υπόδειξη)

$\arg z \quad , -\pi<\theta\leq\pi$

$\operatorname{Arg} z=\{\arg z+2k\pi , k\in\mathbb{Z}\}$

$|z|\cdot e^{i\arg z}=z$

$z^2=\omega \quad , \omega\in\mathbb{C}$

2 διακεκριμένες λύσεις.

$=\omega=|\omega|e^{i\arg\omega} \quad , -\pi<\arg\omega\leq\pi.$

Έστω $z=|z|e^{i\theta} , \theta\in\mathbb{R}$

Η εξίσωση $z^2=\omega \Leftrightarrow |z|^2 e^{2i\theta}=|\omega|e^{i\arg\omega}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |z|^2=|\omega| \\ e^{2i\theta}=e^{i\arg\omega} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\theta=\arg\omega+2k\pi \quad , k\in\mathbb{Z} \\ |z|=\sqrt{|\omega|} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \theta=\frac{\arg\omega}{2} \quad , k=0 \\ \theta=\pi+\frac{\arg\omega}{2} \quad , k=1. \end{cases}$$

Επομένως οι λύσεις της εξίσωσης είναι:

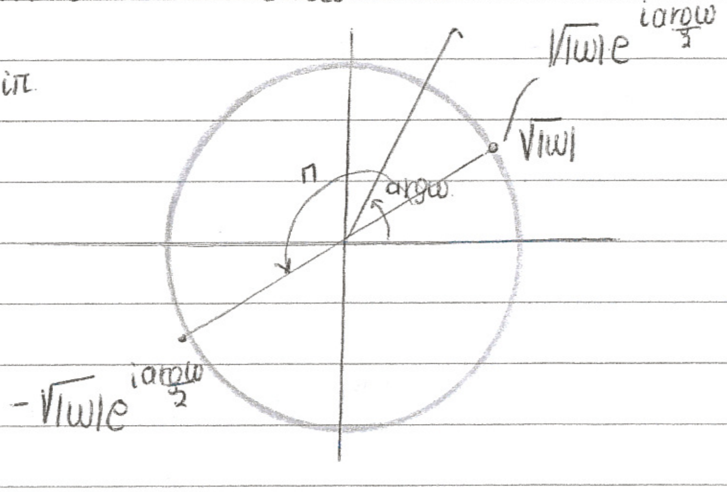
$z=\sqrt{|\omega|}\,e^{i\frac{\arg\omega}{2}}$

και $z=\sqrt{|\omega|}\cdot e^{i\frac{\arg\omega}{2}+i\pi}$

$e^{i\pi}=\cos\pi+i\sin\pi=-1$

$\sqrt{\omega}=\sqrt{|\omega|}\cdot e^{i\frac{\arg\omega}{2}}$

$\sqrt{-1}=\sqrt{1}\cdot e^{i\pi/2}=1\cdot i=i$



Αντίστοιχα, $z^3=\omega$

$=|\omega|e^{i\arg\omega} \Leftrightarrow \begin{cases} |z|^3=|\omega| \\ e^{3i\theta}=e^{i\arg\omega} \end{cases}$

Αν $z=|z|e^{i\theta}$, $\theta\in\mathbb{R}$

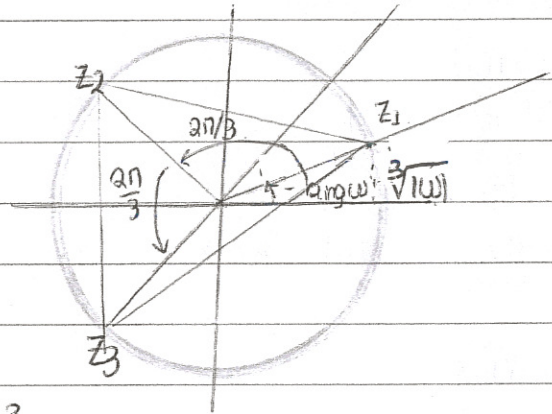
$\Leftrightarrow \begin{cases} |z|=\sqrt[3]{|\omega|} \\ 3\theta=\arg\omega+2\kappa\pi, \kappa\in\mathbb{Z} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} |z|=\sqrt[3]{|\omega|} \\ \theta=\frac{\arg\omega}{3}+\frac{2\kappa\pi}{3}, \kappa\in\mathbb{Z} \end{cases}$

Επομένως $z_1=\sqrt[3]{|\omega|}e^{\frac{i\arg\omega}{3}}$

και $z_2=\sqrt[3]{|\omega|}\cdot e^{\frac{i\arg\omega}{3}+\frac{i2\pi}{3}}$

και $z_3 \cdot \sqrt[3]{|\omega|}\cdot e^{\frac{i\arg\omega}{3}+\frac{i4\pi}{3}}$



$x\in\mathbb{R}$ $x^3=-1 \Leftrightarrow x=-1$.

$\sqrt[3]{-1}=-1$

$\sqrt[3]{-1}=\sqrt[3]{1}\cdot e^{\frac{i\pi}{3}}=e^{\frac{i\pi}{3}}=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$

Η εξίσωση $z^n=\omega$, $n\in\mathbb{N}$, $\omega\neq0$

έχει n διακεκριμένες λύσεις

$\omega=|\omega|e^{i\arg\omega}$

$z_1=\sqrt[n]{|\omega|}\cdot e^{\frac{i\arg\omega}{n}}$

$z_2=\sqrt[n]{|\omega|}\cdot e^{\frac{i\arg\omega}{n}+\frac{2\pi}{n}i}$

$\vdots$

$z_k=\sqrt[n]{|\omega|}\cdot e^{\frac{i\arg\omega}{n}+\frac{2(k-1)\pi}{n}i}$ $\quad k=1,2,\ldots,n$

$\sqrt[n]{\omega}=\sqrt[n]{|\omega|}\cdot e^{\frac{i\arg\omega}{n}}$ (πρωτεύουσα ή κύρια τιμή της n-οστής ρίζας του ω)

Αντίστοιχα, $\log z = \log|z| + i\arg z$ κύριος κλάδος λογαρίθμου

$z = |z| e^{i\arg z}$ $(-\pi < \arg z \leq \pi)$

$\log_k z = \log|z| + i\arg z + 2k\pi i$

Ομοιόμορφη συνέχεια.

$\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{C}$

$f: A \to \mathbb{C}$ ομοιόμορφα συνεχής όταν $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ τέτοιο ώστε

$|f(z) - f(\omega)| < \varepsilon$ $\forall z, \omega \in A$

$|z - \omega| < \delta$

Ισοδύναμα: $\forall \{z_n\}, \{\omega_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq A$

$|z_n - \omega_n| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \Rightarrow |f(z_n) - f(\omega_n)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$z, \omega \in \mathbb{C}$ $z^{\omega} := e^{\omega \log z}$, $z \neq 0$ στην $\log z$ κύριος κλάδος λογαρίθμου

Εφαρμογή: Υπολογίστε i^i

$i^i = e^{i \log i} = e^{i[0 + i\pi/2]} = e^{i^2 \frac{\pi}{2}} = e^{-\pi/2}$

$\log i = \log 1 + i\frac{\pi}{2}$

$i = e^{i\pi/2}$

$e^{i(\log_k i)} = e^{i(i\frac{\pi}{2} + 2k\pi i)}$, $k \in \mathbb{Z}$

$= e^{-\pi/2} e^{-2k\pi}$, $k \in \mathbb{Z}$

- $f_n: A \to \mathbb{C}$

Πότε $f_n \to f$ ομοιόμορφα;

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists N_0 = N_0(\varepsilon)$: $|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$ $\forall n \geq N_0$

$\forall z \in A$

Οικογένεια συναρτήσεων με ιδιότητες

I $\Rightarrow$ όριο έχει την ίδια ιδιότητα

$f_n: [a,b] \to \mathbb{R}$, φραγμένες, Riemann ολοκληρώσιμες $\Rightarrow$ f φραγμένη, f Riemann ολοκληρώσιμη

και $\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n\,dx = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx$

Ερώτημα: f_n παραγωγίσιμες, $f_n:(a,b)\to\mathbb{R}$

1) $f_n' \to g$ ομοιόμορφα

2) Έστω $f_n(x_0)$ συγκλίνει, $x_0\in(a,b)$ σημείο

$\Rightarrow \forall x\in(a,b)\ \exists \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) := f(x)$

Μάλιστα $\forall [c,d]\subseteq(a,b)$

$\lim f_n(x) = f(x)$ η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη στο $[c,d]$

Η f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο του ανοικτού (a,b)

και μάλιστα $f'(x)=g(x)\ \forall x\in(a,b)$

$= \lim\limits_{n\to\infty} f_n'(x)$

$f_n(x)-f_n(x_0) = \int_{x_0}^{x} f_n'(s)\,ds.$

• $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$

Κριτήριο Weierstrass

Αν $M_n\geq 0$ $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ συγκλίνει και $|f_n(x)|\leq M_n$ $\forall x\in\mathcal{D}$

τότε $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ συγκλίνει ομοιόμορφα.

*Αν $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ συνεχής και $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ συγκλίνει ομοιόμορφα

τότε $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ συνεχής

*Αν f_n: παραγωγίσιμες, $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$ συγκλίνει και $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n'(x)=g(x)$ συγκλίνει

ομοιόμορφα τότε $f(x)=\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ και η f είναι παραγωγίσιμη

και μάλιστα $\frac{d}{dx}\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$

Μιγαδική Ανάλυση

5/10/2017

Η σειρά $\sum_{n=0}^{+\infty} z^n$ συγκλίνει αν $|z|<1$ και $\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$

$$S_m(z) = \sum_{n=0}^{m} z^n = \begin{cases} m+1, & z=1 \\ \frac{1-z^{m+1}}{1-z}, & 1-z \neq 0 \end{cases}$$

• Πότε η z^{m+1} συγκλίνει;

$|z|<1$

Η a_n είναι μηδενική $\Leftrightarrow$ $|a_n|$ είναι μηδενική ακολουθία

$\forall \varepsilon>0, \exists n_0=n_0(\varepsilon): |a_n - 0|<\varepsilon, n \geq n_0$

$\Rightarrow |z^{m+1}| = |z|^{m+1}$, αν $|z|>1$

Τότε $\lim_{m\to+\infty} |z|^{m+1} = +\infty$ (είναι γνήσια αύξουσα και αν ήταν φραγμένη)

$|z|^{m+1} = |z|^m |z| \Rightarrow \exists \lim_{m\to+\infty} |z|^{m+1} = A$

$\downarrow \quad \downarrow$

$A \quad A$

Θα έπρεπε $A = A|z| \Leftrightarrow A(1-|z|)=0 \Leftrightarrow A=0$

Θα έπρεπε $A \geq |z| > 1$

• Αν $|z|=1, z\neq 1$ Τι συμβαίνει με την z^m;

Αν $\arg z = \frac{m}{n}\pi \Rightarrow z^m$ είναι περιοδική

ενώ αν $\arg z =$ άρρητο π τότε δεν είναι περιοδική

• Αν $|z|<1$, $\lim_{m\to+\infty} S_m(z) = \lim_{m\to+\infty} \frac{1-z^{m+1}}{1-z} = \lim_{m\to+\infty}\left(\frac{1}{1-z} - \frac{z^{m+1}}{1-z}\right) = \frac{1}{1-z}$

Αν A συμπαγές υποσύνολο της μοναδιαίας μπάλας

δηλαδή A συμπαγές $\subseteq B(0,1)$ η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη

$\overline{B(0,r)}$, $r<1$

$$\frac{d}{dz}\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{d}{dz}\frac{1}{1-z}, \quad |z|<1$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d}{dz} z^n = \frac{1}{(1-z)^2}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n z^{n-1} = \frac{1}{(1-z)^2} \quad |z|<1$$

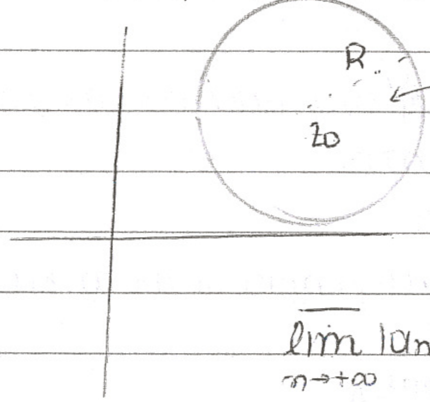
Δυναμοσειρές $(a_n)_{n=0}^{+\infty} \subseteq \mathbb{C}$, z_0

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n \text{ συγκλίνει;}$$

Ακτίνα σύγκλισης R

→ Αν $|z-z_0|<R$ η σειρά συγκλίνει απολύτως (άρα και συγκλίνει)

→ Αν $|z-z_0|>R$ η σειρά αποκλίνει (δεν συγκλίνει)



μέσα συγκλίνει
έξω αποκλίνει

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}} |a_n|^{1/n} = \frac{1}{R}$$

$$R = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} |a_n|^{1/n}} \qquad |z-z_0| < \frac{1}{\overline{\lim} |a_n|^{1/n}}$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n||z-z_0|^n \qquad |z-z_0| \leq \frac{1}{\overline{\lim} |a_n|^{1/n}} - \delta$$

Αν $\varepsilon>0$ $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ $|a_n|^{1/n} \leq \frac{1}{R}+\varepsilon$, $n \geq n_0$

$$\Rightarrow |a_n|^{1/n} \leq \frac{1}{R}+\varepsilon, \; n \geq n_0$$

$$|a_n| \leq \left(\frac{1}{R}+\varepsilon\right)^n$$

$$|a_n||z-z_0|^n \leq \Big(\underbrace{\left(\frac{1}{R}+\varepsilon\right)|z-z_0|}_{a}\Big)^n \quad n \geq n_0$$

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} a^n \text{ συγκλίνει αν } a<1$$

$$\sum_{n=0}^{n_0-1} a^n$$

Είναι $\left(\frac{1}{R}+\varepsilon\right)|z-z_0|\leq 1 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow |z-z_0| < \frac{1}{\frac{1}{R}+\varepsilon} = \frac{R}{1+\varepsilon R}.$$

οπότε

$\forall \varepsilon>0 \quad \frac{R}{1+\varepsilon R} < R.$

• Αν $|z-z_0|>R$ τί συμβαίνει στη σειρά $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n|z-z_0|^n$;

Αν συγκλίνει $\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} a_n(z-z_0)^n=0$

$$\Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} |a_n||z-z_0|^n=0$$

και επειδή $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} |a_n|^{\frac{1}{n}}=\frac{1}{R}$

$$|a_{n_k}|^{\frac{1}{n_k}} \to \frac{1}{R}.$$

$$\left(R^{n_k}|a_{n_k}|\right)^{\frac{1}{n_k}} \to 1$$

$\lim\limits_{n\to+\infty} |a_{n_k}||z-z_0|^{n_k}=0$ Αντίφαση

<u>Θεώρημα:</u> Έστω $(a_n)_{n=0}^{+\infty}\subseteq\mathbb{C}$ και θεωρούμε τη δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n = (f(z))$

Τότε $\forall\, |z-z_0|<R := \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}}|a_n|^{1/n}}$, συγκλίνει απολύτως.

Η $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ παραγωγίζεται στο $w\in\mathbb{C}$ όταν $\lim\limits_{z\to w}\frac{f(z)-f(w)}{z-w} := f'(w)$

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0\ (\delta=\delta(\varepsilon,w))$ τέτοιο ώστε

$$\left|\frac{f(z)-f(w)}{z-w}-f'(w)\right|<\varepsilon,\quad 0<|z-w|<\delta$$

(κατ' αντιστοιχία με την πραγματική ευθεία)

Η σειρά $g(z)=\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n (z-z_0)^{n-1}$ έχει ακτίνα σύγκλισης επίσης R.
Μάλιστα,
$(n|a_n|)^{\frac{1}{n-1}}$
$\overline{\lim_{n\to+\infty}} (n|a_n|)^{\frac{1}{n-1}}$
$n^{\frac{1}{n-1}} |a_n|^{\frac{1}{n-1}} = n^{\frac{1}{n-1}} \cdot |a_n|^{\frac{1}{n}\cdot\frac{n}{n-1}}$
συγκλίνει στο 1
$a_n, b_n > 0$
$\lim_{n\to+\infty} b_n = b > 0$ τότε $\overline{\lim_{n\to+\infty}} (a_n b_n) = \lim_{n\to+\infty} b_n \overline{\lim_{n\to+\infty}} a_n$

Μάλιστα η g είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση $\forall |z-z_0|<R$ με
$$\frac{d}{dz}\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n (z-z_0)^{n-1}$$

Απόδειξη:
Θα αποδείξουμε ότι αν $|z-z_0|<R$ η σειρά $f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n$ είναι παραγωγίσιμη με $f'(z)=g(x)$
$S_n(z)=\sum_{n=0}^{N} a_n (z-z_0)^n$

$\frac{f(z)-f(w)}{z-w} - g(w) =$

$\forall \varepsilon>0,\ \exists \delta>0$

$\left|\frac{f(z)-f(w)}{z-w} - g(w)\right| < \varepsilon$, $\frac{S_N(z)-S_N(w)}{z-w} + \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{a_n[(z-z_0)^n-(w-z_0)^n]}{z-w} - S_N'(w) - \sum_{n=N+1}^{+\infty} n a_n (w-z_0)^{n-1}$

$|z-w|<\delta$

Επιλέγω $|z-z_0|<R$, $|w-z_0|<R$, $\overline{B(w,\delta_1)} \subset B(z_0,R)$

$S_N'(z)=\sum_{n=1}^{N} n a_n (z-z_0)^{n-1}$ $\qquad \overline{B(z_0, |w-z_0|+\delta_1)} \subseteq B(z_0,R)$

$$\frac{f(z)-f(w)}{z-w} - g(z) = \frac{S_N(z)-S_N(w)}{z-w} - S_N'(w) + \sum_{n=N+1}^{+\infty} a_n \frac{((z-z_0)^n-(w-z_0)^n)}{z-w} - \sum_{n=N+1}^{+\infty} n a_n (w-z_0)^{n-1}$$

Έστω $\varepsilon>0$ επιλέγω αρχικό N_1 ώστε $\sum_{n=N+1}^{+\infty} n|a_n||w-z_0|^{n-1} < \frac{\varepsilon}{3}$, $N \geq N_1$
ανεξάρτητα του w

$$\frac{(z-z_0)^n-(w-z_0)^n}{z-w} = \frac{\cancel{(z-w)}\left((z-z_0)^{n-1}+(z-z_0)^{n-2}(w-z_0)+\dots+(z-z_0)(w-z_0)^{n-2}+(w-z_0)^{n-1}\right)}{\cancel{z-w}}$$

$$\left|\frac{(z-z_0)^n-(w-z_0)^n}{z-w}\right| \leq |z-z_0|^{n-1}+|z-z_0|^{n-2}|w-z_0|+\ldots+|w-z_0|^{n-1}$$
$$\leq n\cdot r^{n-1}$$

Επιλέγω N_2

$$\Rightarrow \left|\sum_{n=N+1}^{+\infty} a_n \frac{[(z-z_0)^n-(w-z_0)^n]}{z-w}\right| \leq \sum_{n=N+1}^{+\infty} n|a_n|r^{n-1} < \frac{\varepsilon}{3} \quad N\geq N_2$$

Επιλέγω $\tilde{N}=\max(N_1,N_2)$, οπότε κάνω τη διάσπαση

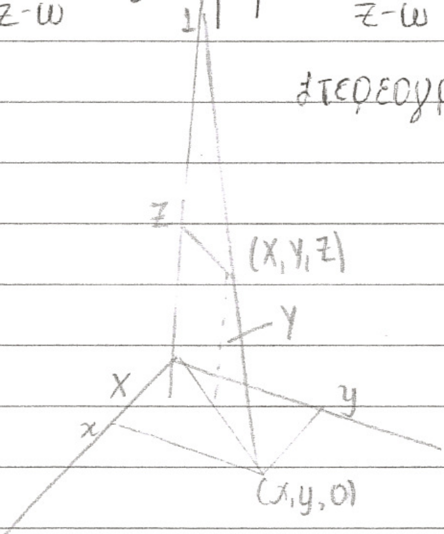
$$\frac{f(z)-f(w)}{z-w}-g(w)=\frac{S_{\tilde{N}}(z)-S_{\tilde{N}}(w)}{z-w}-S_{\tilde{N}}'(w)+\underbrace{\sum_{n=\tilde{N}+1}^{+\infty}\frac{((z-z_0)^n-(w-z_0)^n)}{z-w}}_{\mathrm{I}}-\underbrace{\sum_{n=\tilde{N}+1}^{+\infty} n a_n (w-z_0)^{n-1}}_{\mathrm{II}}$$

Επειδή η $S_{\tilde{N}}(z)$ είναι παραγωγίσιμη στο w υπάρχει $\delta (\leq \delta_1)$ ώστε

$$\left|\frac{S_{\tilde{N}}(z)-S_{\tilde{N}}(w)}{z-w}-S_{\tilde{N}}'(w)\right|<\frac{\varepsilon}{3} \quad 0<|z-w|<\delta$$

οπότε για $0<|z-w|<\delta$ έχουμε

$$\left|\frac{f(z)-f(w)}{z-w}-g(w)\right|=\left|\frac{S_{\tilde{N}}(z)-S_{\tilde{N}}(w)}{z-w}-S_{\tilde{N}}'(w)+\mathrm{I}+\mathrm{II}\right|\leq\left|\frac{S_{\tilde{N}}(z)-S_{\tilde{N}}(w)}{z-w}-S_{\tilde{N}}'(w)\right|+|\mathrm{I}|+|\mathrm{II}|$$



Στερεογραφική προβολή

Αναλογίες

$$\frac{x}{X}=\frac{y}{Y}=\frac{1}{1-Z}$$

$$\left(0,0,\frac{1}{2}\right) \quad \rho=\frac{1}{2}$$

$$(X-0)^2+(Y-0)^2+\left(Z-\frac{1}{2}\right)^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$x^2(1-Z)^2+y^2(1-Z)^2+\left(Z-1+1-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$$

$$(x^2+y^2)(1-Z)^2+(1-Z)^2+(Z-1)=0$$

$$(x^2+y^2)(1-Z)+(1-Z)-1=0$$

$$(x^2+y^2)(1-Z)=1$$

$$1-Z=\frac{1}{x^2+y^2+1}$$

$$X=\frac{x}{x^2+y^2+1}$$

$$Y=\frac{y}{x^2+y^2+1}$$

$$Z=\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2+1}$$

Μιγαδική Ανάλυση

10/10/2017

A ανοικτό $\Leftrightarrow A^c$ κλειστό

$\forall a \in A, \exists \varepsilon > 0 : B(a,\varepsilon) \subseteq A$.

Υπάρχουν σύνολα που δεν είναι ούτε ανοικτά ούτε κλειστά.

$A \subseteq \mathbb{C}$

$f: A \to \mathbb{C}$ πότε είναι συνεχής στο $z_0 \in A$;

$\to$ Όταν υπάρξει $\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon \;\; \forall |z - z_0| < \delta$$

$f: A \to \mathbb{C}$: f συνεχής σε κάθε σημείο του A.

Πρόταση.

Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(α) f συνεχής στο A

(β) $\forall$ ανοικτό $B \subseteq \mathbb{C}$, $f^{-1}(B)$ ανοικτό σύνολο (στο A)

(γ) $\forall$ κλειστό $K \subseteq \mathbb{C}$, $f^{-1}(K)$ κλειστό στο A.

Απόδειξη

(α) $\Rightarrow$ (β) B ανοικτό

Έστω $z_0 \in f^{-1}(B)$ $(\neq \emptyset)$

$\Leftrightarrow f(z_0) \in B$ και επειδή B ανοικτό $\Rightarrow \exists \varepsilon > 0 : B(f(z_0),\varepsilon) \subset B$.

$f^{-1}(B) = \{z : f(z) \in B\}$

Η f είναι συνεχής στο z_0, $\exists \delta > 0 : |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$, $|z - z_0| < \delta$

$$\Leftrightarrow f(z) \in B(f(z_0), \varepsilon)$$

$$\Rightarrow B(z_0, \delta) \subseteq f^{-1}(B(f(z_0), \varepsilon)) \subseteq f^{-1}(B)$$

Άρα $f^{-1}(B)$ ανοικτό

(β) $\Rightarrow$ (α) Θα αποδείξουμε ότι η f είναι συνεχής

Έστω $z_0 \in A$ $\quad z_0 \to f(z_0) \in R(f)$ (Range, Image f)

Έστω $\varepsilon > 0$, τότε $f^{-1}(B(f(z_0),\varepsilon))$ είναι ανοικτό με $z_0 \in f^{-1}(B(f(z_0),\varepsilon))$

άρα $\exists \delta > 0$: ώστε $B(z_0, \delta) \cap A \subseteq f^{-1}(B(f(z_0), \varepsilon))$

$$\left.\begin{matrix} |z - z_0| < \delta \\ z \in A \end{matrix}\right. \Rightarrow \begin{matrix} f(z) \in B(f(z_0), \varepsilon) \\ |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon \end{matrix}$$

Ασκηση: Έστω $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$, $f\in\overrightarrow{C(\mathbb{C})}$ continuous.

Τότε $f^{-1}\{z\in\mathbb{C} \mid f^2(z)=1\}$

Τι σύνολο είναι;

$f^{-1}\{z\in\mathbb{C} \mid f^2(z)=1\}=f^{-1}\{1,-1\}$, όμως $\{1,-1\}$ κλειστό

Άρα $f^{-1}\{1,-1\}$ είναι κλειστό.

Δεν γνωρίζουμε αν είναι συμπαγές (κλειστό και φραγμένο)

πχ. $f(z)\equiv 1$ σταθερή $\Rightarrow f^{-1}\{1,-1\}=\mathbb{C}$ που δεν είναι φραγμένο άρα ούτε συμπαγές

Έστω $a\in f^{-1}\{z\in\mathbb{C} \mid f^2(z)=1\} \Leftrightarrow f^2(a)=1$.

Συνεκτικότητα:

Το S λέγεται συνεκτικό αν δεν υπάρχουν δύο ανοικτά σύνολα A και B με τις ιδιότητες:
- $S\subseteq A\cup B$
- $S\cap A\neq\emptyset$
- $S\cap B\neq\emptyset$
- $S\cap A\cap B=\emptyset$

Πρόταση:

Έστω $f:S\to\mathbb{C}$ συνεχής. Αν το S είναι συνεκτικό, τότε $f(S)$ είναι συνεκτικό επίσης.

Απόδειξη:

Έστω πως το $f(S)$ δεν είναι συνεκτικό

Τότε θα υπάρχουν A,B ανοικτά με τις ιδιότητες:

$f(S)\subseteq A\cup B$

$f(S)\cap A\neq\emptyset$

$f(S)\cap B\neq\emptyset$

$f(S)\cap A\cap B=\emptyset$

$f^{-1}(A)$ ανοικτό, $f^{-1}(A)\neq\emptyset$

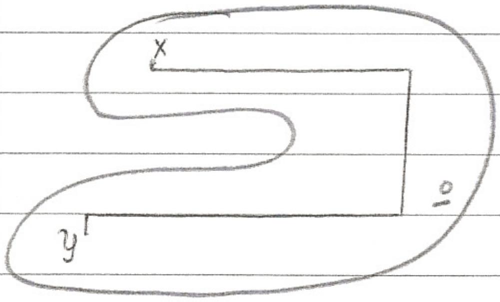
$f^{-1}(B)$ ανοικτό, $f^{-1}(B)\neq\emptyset$

Επειδή $f(S)\subseteq A\cup B \Leftrightarrow f^{-1}(A\cup B)=S$.

$f^{-1}(A)\cup f^{-1}(B)=S$ $\quad (S\subseteq f^{-1}(A)\cup f^{-1}(B))$

Θεώρημα Ω ανοικτό σύνολο

Εάν Ω είναι συνεκτικό, τότε για κάθε δύο σημεία του Ω υπάρχει πολυγωνική γραμμή που ενώνει τα δύο σημεία και βρίσκεται εξ' ολοκλήρου στο Ω. Μάλιστα μπορούμε να πάρουμε την πολυγωνική γραμμή να έχει πλευρές παράλληλες στον άξονα



ανοικτά και } τόπος $\subseteq \mathbb{C}$
συνεκτικά

Απόδειξη: Έστω ότι υπάρχουν δύο σημεία $z, w \in \Omega$ ώστε να μην ενώνονται με πολυγωνική γραμμή μέσα στο Ω τότε ορίζουμε:

$A = \{z_1 \in \Omega \mid$ το z_1 ενώνεται με πολυγωνική γραμμή (παράλληλα στους άξονες) με το $z\}$

$\Gamma = \{w_1 \in \Omega \mid$ που δεν ενώνονται με πολυγωνική γραμμή με το $z\}$

τότε $A \neq \emptyset$ (Προφανώς $z \in A$) το A είναι ανοικτό

Διότι αν $a \in A$ τότε υπάρχει πολυγωνική γραμμή (με πλευρές παράλληλες στους άξονες) που τα ενώνει

Όμως επειδή το Ω είναι ανοικτό $\Rightarrow \exists \delta > 0 : B(a,\delta) \subset \Omega$.

Θα αποδείξουμε ότι $B(a,\delta) \subset A$

Αν $z_1 \in B(a,\delta)$ τότε υπάρχει πολυγωνική γραμμή που ενώνει το z_1 με το a.

Η ένωση των δύο πολυγωνικών γραμμών ενώνει το z με το z_1

$\Rightarrow B(a,\delta) \subset A$

$A \cup \Gamma = \Omega$

Το Γ είναι μη κενό αφού από υπόθεση $w \in \Gamma$

Το Γ είναι ανοικτό διότι: $z_2 \in \Gamma$, $z_2 \in \Omega$ άρα $\exists \delta_1 > 0 : B(z_2,\delta_1) \subseteq \Omega$

Θα αποδείξουμε ότι $B(z_2,\delta_1) \subseteq \Gamma$.

Αν δεν ίσχυε θα υπήρχε $b \notin \Gamma : |z_2 - b| < \delta_1$

Άρα το b ενώνεται με το z.

Όμως το b ενώνεται με το z_2 και άρα και το z_2 θα έπρεπε να ενώνεται με το z. Άτοπο. Επομένως το Γ είναι ανοικτό $\Rightarrow \Omega = A \cup \Gamma$, $A \cap \Gamma = \emptyset$

Η έννοια της παραγώγου

Πότε η f παραγωγίζεται στο σημείο z_0;

→ Όταν υπάρχει το $\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = f'(z_0)$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0 : \left|\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} - f'(z_0)\right| < \varepsilon$$

$$0<|z-z_0|<\delta.$$

$$|f(z)-f(z_0)-f'(z_0)(z-z_0)| < \varepsilon |z-z_0|$$

Παραγωγισιμότητα $\Rightarrow$ συνέχεια

Ερώτημα: Είναι η συνάρτηση $f(z)=\bar{z}$ παραγωγίσιμη;

$$\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = \frac{\bar{z}-\bar{z_0}}{z-z_0} = \frac{(\bar{z}-\bar{z_0})^2}{|z-z_0|^2} = \frac{(x-yi-(x_0-y_0 i))^2}{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} = \frac{(x-x_0-(y-y_0)i)^2}{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$$

Έστω $z=x+yi$, $x,y\in\mathbb{R}$
$z_0=x_0+y_0 i$, $x_0,y_0\in\mathbb{R}$.

$$= \frac{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2 i^2 - 2(x-x_0)(y-y_0)i}{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$$

$$= \frac{(x-x_0)^2-(y-y_0)^2}{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} - \frac{2(x-x_0)(y-y_0)}{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} i$$

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{(x-x_0)^2-(y-y_0)^2}{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$$

Για $y=y_0$

$$\lim_{x\to x_0} \frac{(x-x_0)^2}{(x-x_0)^2} = 1$$

Για $x=x_0$

$$\lim_{y\to y_0} \frac{-(y-y_0)^2}{(y-y_0)^2} = -1$$

οπότε το όριο $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{(x-x_0)^2-(y-y_0)^2}{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$ δεν υπάρχει.

Άρα δεν είναι παραγωγίσιμη.

Ορισμός: Ω ανοικτό, $f:\Omega\to\mathbb{C}$ παραγωγίσιμη $\forall z\in\Omega$ λέγεται ολόμορφη συνάρτηση

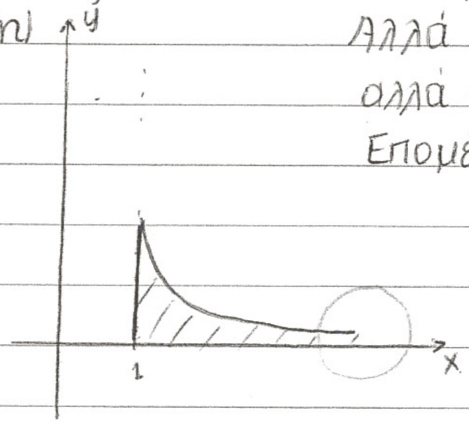
Μιγαδική Ανάλυση

12/10/2017

Φυλλάδιο Ασκήσεων 2

Άσκηση 4β) $g(z) = z^2 - \bar{z}^2$

(Υπόδειξη)



Η συνάρτηση είναι συνεχής
Αλλά δεν είναι συμπαγές (είναι κλειστό αλλά όχι φραγμένο)
Επομένως δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής

Ομοιόμορφη συνέχεια: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : |x-y| < \delta$
για την f $\Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$

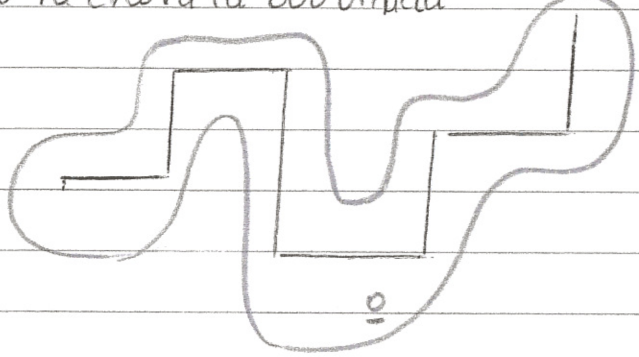
$\Leftrightarrow \forall \{z_n\}, \{w_n\} : z_n - w_n \to 0 \Rightarrow f(z_n) - f(w_n) \to 0$

Επανάληψη:

- S συνεκτικό αν $\nexists$ A, B ανοικτά ώστε: $S \subseteq A \cup B$
  $S \cap A \neq \emptyset$
  $S \cap B \neq \emptyset$
  $S \cap A \cap B = \emptyset$.

Θεώρημα:

Αν Ω ανοικτό και συνεκτικό τότε $\forall z, w \in \Omega$ $\exists$ πολυγωνική γραμμή $\subseteq \Omega$ που να ενώνει τα δύο σημεία



- Παραγωγισιμότητα: $\lim\limits_{z \to z_0} \dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} := f'(z_0)$

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \left| \dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0) \right| < \varepsilon$

$\forall\ 0 < |z - z_0| < \delta, \ z \in A$.

Άλγεβρα των παραγωγισίμων συναρτήσεων

Πρόταση: Η f είναι παραγωγίσιμη στο z_0 αν και μόνον αν υπάρχει μια συνεχής στο z_0 συνάρτηση φ ώστε: $f(z)-f(z_0)=\varphi(z)\cdot(z-z_0)$

Μάλιστα $\varphi(z_0)=f'(z_0)$.

Απόδειξη:

($\Rightarrow$) Ορίζω

$$\varphi(z)=\begin{cases}\dfrac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}, & z\neq z_0, \; z\in\Omega\\ f'(z_0), & z=z_0\end{cases}$$

$$\lim_{z\to z_0}\varphi(z)=\varphi(z_0)$$

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}=f'(z_0)$$

($\Leftarrow$) Αν υπάρχει φ συνεχής ώστε $f(z)-f(z_0)=\varphi(z)(z-z_0)$ για $z\neq z_0$

$$\Rightarrow \varphi(z)=\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$$

$$\xrightarrow[\text{στο } z_0]{\varphi \text{ συνεχής}} \lim_{z\to z_0}\varphi(z)=\varphi(z_0) \Longleftrightarrow \lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}=\varphi(z_0)=f'(z_0)$$

Ιδιότητες:

Έστω $f,g:\Omega\to\mathbb{C}$ με Ω ανοικτό και $z_0\in\Omega$ τότε:

(1) Αν f,g παραγωγίσιμες στο z_0 τότε $f+g$ είναι παραγωγίσιμη στο z_0 και μάλιστα $(f+g)'(z_0)=f'(z_0)+g'(z_0)$

(2). Αν f,g παραγωγίσιμες στο z_0 τότε $f\cdot g$ είναι παραγωγίσιμη στο z_0 και μάλιστα $(f\cdot g)'(z_0)=f'(z_0)g(z_0)+f(z_0)\cdot g'(z_0)$

(3) Έστω $g(z_0)\neq 0$ και g παραγωγίσιμη στο z_0

α. Η $\dfrac{1}{g(z)}$ ορίζεται στο $\Omega\setminus\{z\,|\,g(z)=0\}$ ανοικτό και $z_0\in\Omega\setminus\{z\,|\,g(z)=0\}$

$\{z\in\Omega\,|\,g(z)=0\}=g^{-1}\{0\}$ κλειστό γιατί g συνεχής

$\Rightarrow \dfrac{1}{g}$ παραγωγίζεται στο z_0 και μάλιστα $\left(\dfrac{1}{g}\right)'(z_0)=-\dfrac{g'(z_0)}{g^2(z_0)}$

β. Αν επιπρόσθετα f παραγωγίσιμη στο z_0 τότε και η $\dfrac{f}{g}$ παραγωγίζεται στο z_0 και $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(z_0)=\dfrac{f'(z_0)\cdot g(z_0)-f(z_0)\cdot g'(z_0)}{g^2(z_0)}$

(4) Έστω $g:\Omega\to V$ και $f:V\to\mathbb{C}$, όπου Ω, V ανοικτά
τότε ορίζεται η $f\circ g:\Omega\to\mathbb{C}$
Αν $z_0\in\Omega$ και g παραγωγίζεται στο z_0, η f είναι παραγωγίσιμη στο $g(z_0)$
τότε η $f\circ g$ είναι παραγωγίσιμη στο z_0 και μάλιστα
$(f\circ g)'(z_0)=f'(g(z_0))g'(z_0)$

Απόδειξη:

(4) Αφού η f παραγωγίσιμη στο $\overbrace{g(z_0)}^{\omega_0}$ $\exists\,\varphi$ συνεχής στο $g(z_0)$

$(*)\ f(\omega)-f(g(z_0))=\varphi(\omega)(\omega-g(z_0))$, $\omega\in V$

Η g παραγωγίζεται στο z_0 άρα υπάρχει ψ συνεχής στο z_0

$g(z)-g(z_0)=\psi(z)(z-z_0)$ $z\in\Omega$

Επιλέγω $\omega=g(z)\in V \xrightarrow{(*)} f(g(z))-f(g(z_0))=\varphi(g(z))(g(z)-g(z_0))$

$=\varphi(g(z))\cdot\psi(z)(z-z_0)$

$\Rightarrow f\circ g$ παραγωγίσιμη στο z_0 με $(f\circ g)'(z_0)=\varphi(g(z_0))\cdot\psi(z_0)$

$=f'(g(z_0))\cdot g'(z_0)$

Ασκήσεις:

Φυλλάδιο 1:

1) Αν $z_1, z_2, \dots, z_n\in\mathbb{C}$ αποδείξτε ότι ισχύει $|z_1+z_2+\dots+z_n|\le|z_1|+|z_2|+\dots+|z_n|$
Αν $z_1\cdot z_2\cdots z_n\neq 0$ πότε ισχύει $|z_1+z_2+\dots+z_n|=|z_1|+|z_2|+\dots+|z_n|$?

Επαγωγικά: • Αποδεικνύουμε το αντίστοιχο για $n=2$ δηλαδή $|z_1+z_2|\le|z_1|+|z_2|$
(που ισχύει από θεωρία)
• Υποθέτουμε ότι ισχύει για $n=k$
$|z_1+\dots+z_n|\le|z_1|+\dots+|z_k|$
• Θα αποδείξουμε ότι ισχύει για $n=k+1$
Δηλαδή $|z_1+\dots+z_{k+1}|\le|z_1|+\dots+|z_{k+1}|$

Πράγματι έχουμε $|z_1+\dots+z_{k+1}|=|(z_1+\dots+z_k)+z_{k+1}|\le(|z_1|+\dots+|z_k|)+|z_{k+1}|$

→ Ισχύει το "ανάλογο" για αριθμήσιμο πλήθος μιγαδικών?
$\{z_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ ώστε $\sum_{n=1}^{\infty}|z_n|$ συγκλίνει τότε $\sum_{n=1}^{\infty}z_n$ συγκλίνει και μάλιστα

ισχύει και $\left|\sum_{k=1}^{+\infty}z_k\right|\le\sum_{k=1}^{+\infty}|z_k|$

Αν $|z_1 + \dots + z_n| = |z_1| + \dots + |z_n|$, $z_1 \dots z_n \neq 0$

$\Rightarrow \exists\ \lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \dots, \lambda_{n-1} > 0$ ώστε $z_1 = \lambda_1 z_n$

(Αποδεικνύεται με επαγωγή)

$z_2 = \lambda_2 z_n$

$\vdots$

$z_{n-1} = \lambda_{n-1} z_n$

2) α) Βρείτε (με δύο τρόπους) όλους τους μιγαδικούς $z \in \mathbb{C}$ που ικανοποιούν $z^2 = -i$

α' τρόπος: Καρτεσιανή αναπαράσταση μιγαδικού

Έστω $z = x + yi$, $x, y \in \mathbb{R}$ τότε

$$(x+yi)^2 = -i \Leftrightarrow x^2 - y^2 + 2xyi = -i$$

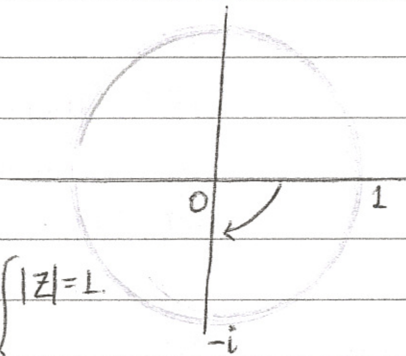
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 0 \\ 2xy = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-y)(x+y) = 0 \\ xy = -1/2 \end{cases} \to \begin{cases} x - y = 0, \ xy = -1/2 \\ x + y = 0, \ xy = -1/2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = x, \quad x^2 = -1/2 \text{ αδύνατο για } x \in \mathbb{R} \\ y = -x, \quad x^2 = 1/2 \end{cases}$$

$y = -x$, $x^2 = 1/2$: $x = \frac{\sqrt{2}}{2}, y = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ ή $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}, y = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Επομένως $z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} i$

$$z_2 = -z_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i$$



β' τρόπος: Τριγωνομετρική μορφή

Θέτουμε $z = |z| \cdot e^{i\theta}$ με $-\pi < \theta \leq \pi$

$$\Rightarrow z^2 = -i \Leftrightarrow |z|^2 e^{2i\theta} = 1 \cdot e^{-i\frac{\pi}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |z|^2 = 1 \\ 2\theta = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |z| = 1 \\ \theta = -\frac{\pi}{4} + k\pi, \ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$z_3 = 1 \cdot e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)} = z_1$$

$$z_4 = 1 \cdot e^{i\frac{3\pi}{4}} = z_2$$

β) $\sqrt{-i} = ?$ $\quad -i = 1 e^{-i\pi/2}$

$$\sqrt{-i} = \sqrt{1}\, e^{-i\pi/4} = e^{-i\pi/4} = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

5) Για $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ να λυθούν τα συστήματα

$$\begin{bmatrix} e^x \cos y = \alpha \\ e^x \sin y = \beta \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} e^{x^2-y^2}\cos 2xy = \alpha \\ e^{x^2-y^2}\sin 2xy = \beta \end{bmatrix}$$

• $e^x \cos y = \alpha$ $\iff e^x(\cos y + i\sin y) = \alpha + \beta i = w$
$e^x \sin y = \beta$

$$\iff e^{x+yi} = \alpha + \beta i$$
$$= \sqrt{\alpha^2+\beta^2}\left(\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} + i\frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\right)$$

$-\pi < \arg w \leq \pi$. $\quad = \sqrt{\alpha^2+\beta^2}\, e^{i\arg(w)}$.

$$\iff \begin{matrix} e^x = \sqrt{\alpha^2+\beta^2} \\ y = \arg w + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \end{matrix}$$

$$\iff \begin{cases} x = \log \sqrt{\alpha^2+\beta^2} \\ y = \arg w + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

• Για $\alpha = \beta = 0 \Rightarrow$ ΑΔΥΝΑΤΟ

• $e^{x^2-y^2}\cos 2xy = \alpha$ $\quad$ Υπόδειξη: $z = (x+yi)^2$
$e^{x^2-y^2}\sin 2xy = \beta$.

$$z^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$$
$$Re(z^2) = x^2 + y^2.$$
$$Im(z^2) = 2xy.$$

Μιγαδική Ανάλυση

17/10/2017

Ω, V ανοικτά, μη κενά

$g: \Omega \to V$, $z_0 \in \Omega$. Η g παραγωγίζεται στο z_0

$f: V \to \mathbb{C}$ Η f παραγωγίζεται στο $g(z_0)$

$\Rightarrow f\circ g: \Omega \to \mathbb{C}$ είναι παραγωγίσιμη στο z_0 και μάλιστα ισχύει ο κανόνας της αλυσίδας $(f\circ g)'(z_0) = f'(g(z_0))g'(z_0)$

Πρόταση: Έστω $h: [a,b] \to \mathbb{C}$, παραγωγίσιμη

$f: \Omega \to \mathbb{C}$ ώστε $h[a,b] \subseteq \Omega$, με Ω ανοικτό $\subseteq \mathbb{C}$ παραγωγίσιμη

$f\circ h: [a,b] \to \mathbb{C}$, είναι παραγωγίσιμη και μάλιστα

$(f\circ h)'(t) = f'(h(t))h'(t)$

Υπόδειξη για άσκηση 3 (Φυλλάδιο 2)

$g: [a,b] \to \mathbb{C}$, $g'(t) = 0$, $t \in (a,b)$ Δεν υπάρχει το ΘΜΤ όπως στους πραγματικούς

g συνεχής στο $[a,b]$ Θα το εφαρμόσουμε κατά συνιστώσες

$g(t) = f(t) + h(t)i$

$g(t) = g(a)$, $t \in [a,b]$

$f: [a,b] \to \mathbb{R}$

$h: [a,b] \to \mathbb{R}$

*Γενικά δηλαδή ισχύει $f'(z) = 0$ $\forall z \in \Omega$ $\exists c \in \mathbb{C}: f(z) = c$

Συνθήκες Cauchy-Riemann

- Αν $f: \Omega \to \mathbb{C}$, Ω τόπος (ανοικτό συνεκτικό) λέγεται αναλυτική ή ολόμορφη αν $\forall z \in \Omega$ η f είναι παραγωγίσιμη ($\phi \neq \Omega$)

Συμβάσεις: $f(z) = u(z) + i v(z)$, όπου $u(z) = \mathrm{Re} f(z) = u(x,y)$

$u, v: \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $v(z) = \mathrm{Im} f(z) = v(x,y)$

$z = x + yi$, $x, y \in \mathbb{R}$

$z = (x,y) \subseteq \mathbb{R}^2$

Έστω $f: \Omega \to \mathbb{C}$ ολόμορφη και $z = x+yi = (x,y)$ τότε ισχύει, $\exists\, u_x(x,y), u_y(x,y)$
$v_x(x,y), v_y(x,y)$

$f'(z) = u_x(x,y) + i v_x(x,y)$
$\quad = v_y(x,y) - i\, u_y(x,y)$

Ισχύει δηλαδή $\left.\begin{array}{l} u_x(x,y) = v_y(x,y) \\ u_y(x,y) = -v_x(x,y) \end{array}\right\}$ Συνθήκες Cauchy-Riemann

Αντιστρόφως αν υπάρχουν $u_x(x,y), u_y(x,y), v_x(x,y), v_y(x,y)$ $\forall x,y \in \Omega$ και είναι συνεχείς συναρτήσεις, και ικανοποιούν τις συνθήκες Cauchy-Riemann τότε η f είναι ολόμορφη στο Ω.

Απόδειξη:

($\Rightarrow$) Έστω η f παραγωγίζεται στο $z_0 = (x_0, y_0) = x_0 + y_0 i$ τότε

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h} := f'(z_0)$$

- Οπότε αν επιλέξουμε $h \in \mathbb{R}$, τότε έχουμε

$$\frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h} = \frac{u(z_0+h)+iv(z_0+h)-u(z_0)-iv(z_0)}{h}$$

$$= \frac{u(x_0+h, y_0)-u(x_0,y_0)}{h} + i\frac{v(x_0+h, y_0)-v(x_0,y_0)}{h}$$

Οπότε έχουμε: υπάρχει το όριο $\lim\limits_{\substack{h\to 0 \\ h\in\mathbb{R}}} \frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h} = u_x(x_0,y_0) + i v_x(x_0,y_0)$

Επειδή υπάρχουν τα όρια

$$\lim_{\substack{h\to 0 \\ h\in\mathbb{R}}} \frac{u(x_0+h, y_0)-u(x_0,y_0)}{h} := u_x(x_0,y_0)$$

$$\lim_{\substack{h\to 0 \\ h\in\mathbb{R}}} \frac{v(x_0+h, y_0)-v(x_0,y_0)}{h} := v_x(x_0,y_0)$$

- Τώρα επιλέξουμε $h = ti$, $t \in \mathbb{R}$ τότε έχουμε

$$\frac{f(z_0+ti)-f(z_0)}{ti} = \frac{u(z_0+ti)+iv(z_0+ti)-u(z_0)-iv(z_0)}{ti}$$

$$= \frac{u(x_0, y_0+t)-u(x_0,y_0)}{ti} + i\,\frac{v(x_0, y_0+t)-v(x_0,y_0)}{ti}$$

Οπότε υπάρχει $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h} = v_y(x_0,y_0) - i\, u_y(x_0,y_0)$

επειδή $\exists \lim\limits_{\substack{t\to 0 \\ t\in\mathbb{R}}} \frac{u(x_0, y_0+t)-u(x_0,y_0)}{t} := u_y(x_0,y_0)$

$\exists \lim\limits_{\substack{t\to 0 \\ t\in\mathbb{R}}} \frac{v(x_0, y_0+t)-v(x_0,y_0)}{t} := v_y(x_0,y_0)$

$(\Leftarrow)$ $\exists\, u_x, u_y, v_x, v_y : O \to \mathbb{R}$ και είναι συνεχείς

$$\left.\begin{array}{l} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{array}\right\} \Rightarrow \text{Θέλω να δείξω ότι } f \text{ παραγωγίσιμη}$$

$$\frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h} = \frac{u(z_0+h)+iv(z_0+h)-u(z_0)-iv(z_0)}{h}$$

με $h = t+si$, $t,s \in \mathbb{R}$

$h \to 0 \Rightarrow t^2+s^2 \to 0$

$$= \frac{u(x_0+t, y_0+s)-u(x_0,y_0)+i[v(x_0+t,y_0+s)-v(x_0,y_0)]}{t+si}$$

$$u(x_0+t, y_0+s)-u(x_0,y_0) = u(x_0+t,y_0+s)-u(x_0+t,y_0)+u(x_0+t,y_0)-u(x_0,y_0)$$

$$\begin{pmatrix} \exists s_1 : |s_1|<|s| \\ \exists t_1 : |t_1|<|t| \end{pmatrix} \quad = u_y(x_0+t, y_0+s_1)\cdot s + u_x(x_0+t_1,y_0)t$$

$$-u_y(x_0,y_0)\cdot s + u_y(x_0,y_0)\cdot s - u_x(x_0,y_0)t + u_x(x_0,y_0)\cdot t$$

$$= [u_y(x_0+t, y_0+s_1)-u_y(x_0,y_0)]s + [u_x(x_0+t_1,y_0)-u_x(x_0,y_0)]t +$$

$$+ u_y(x_0,y_0)\cdot s + u_x(x_0,y_0)t$$

$$v(x_0+t, y_0+s) - v(x_0,y_0) = v(x_0+t,y_0+s)-v(x_0+t,y_0)+v(x_0+t,y_0)-v(x_0,y_0)$$

$$\begin{pmatrix} \exists s_2 : |s_2|<|s| \\ \exists t_2 : |t_2|<|t| \end{pmatrix} \quad = v_y(x_0+t, y_0+s_2)\cdot s + v_y(x_0+t_2,y_0)\cdot t$$

$$-v_y(x_0,y_0)\cdot s + v_y(x_0,y_0)t - v_x(x_0,y_0) + v_x(x_0,y_0)t$$

$$= [v_y(x_0+t,y_0+s_2)-v_y(x_0,y_0)]s + [v_x(x_0+t_2,y_0)-v_x(x_0,y_0)]t +$$

$$+ v_y(x_0,y_0)\cdot s + v_x(x_0,y_0)\cdot t$$

Επομένως έχουμε $\dfrac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h} = \dfrac{u(z_0+h)+iv(z_0+h)-u(z_0)-iv(z_0)}{h}$

$$= \overbrace{[u_y(x_0+t, y_0+s_1)-u_y(x_0,y_0)]}^{B_1}\frac{s}{t+si} + \overbrace{[u_x(x_0+t_1, y_0)-u_x(x_0,y_0)]}^{B_2}\frac{t}{t+si} +$$

$$+ i\,\overbrace{[v_y(x_0+t, y_0+s_2)-v_y(x_0,y_0)]}^{B_3}\frac{si}{t+si} + \overbrace{[v_x(x_0+t_2, y_0)-v_x(x_0,y_0)]}^{B_4}\frac{ti}{t+si}$$

$$+ \underbrace{\frac{u_y(x_0,y_0)s+u_x(x_0,y_0)t+i[\underset{u_x(x_0,y_0)}{\underset{\|}{v_y(x_0,y_0)}}\cdot s+\underset{-u_y(x_0,y_0)}{\underset{\|}{v_x(x_0,y_0)}}t]}{t+si}}_{A}$$

$$A=\frac{u_y(x_0,y_0)s+u_x(x_0,y_0)t+i[v_y(x_0,y_0)\cdot s+v_x(x_0,y_0)\cdot t]}{t+si}$$

$$=\frac{u_x(x_0,y_0)(t+si)-u_y(x_0,y_0)\,i^2[s-it]}{t+si}$$

$$=u_x(x_0,y_0)+v_x(x_0,y_0)i$$

$$|B_1|\leq |u_y(x_0+t,y_0+si)-u_y(x_0,y_0)|\xrightarrow{t+si\to 0} 0$$

$\left|\frac{s}{t+si}\right|\leq 1$ (φραγμένο)

Ομοίως τα $|B_2|,|B_3|,|B_4|\to 0$

Επομένως το αρχικό όριο είναι ίσο με $u_x(x_0,y_0)+v_x(x_0,y_0)i$

Εφαρμογές του θεωρήματος

Πρόταση 1: Αν f ολόμορφη, $f:\Omega\to\mathbb{C}$ (Ω τόπος) και $f'(z)=0$ τότε υπάρχει $c\in\mathbb{C}: f(z)=c,\ \forall z\in\Omega$

Απόδειξη: Απο τις συνθήκες Cauchy-Riemann

$f(z)=u(z)+iv(z)$ $(u,v:\Omega\to\mathbb{R})$

$$\left.\begin{array}{l} f'(z)=u_x(z)+iv_x(z)=0 \\ \quad = v_y(z)-iu_y(z)=0\end{array}\right\}\Rightarrow \begin{array}{ll} \mathrm{I} & \mathrm{II} \\ u_x(z)=0, & v_x(z)=0 \\ u_y(z)=0 & v_y(z)=0\end{array}$$

$\xRightarrow{\mathrm{I}} \exists c_1\in\mathbb{R}: u(x,y)=c_1$

$\xRightarrow{\mathrm{II}} \exists c_2\in\mathbb{R}: v(x,y)=c_2$

2) Έστω $f:\Omega\to\mathbb{C}$ ολόμορφη (Ω τόπος) και τέτοια ώστε $|f(z)|=c$ $\forall z\in\Omega$

Τότε $\exists\omega\in\mathbb{C}: f(z)=\omega,\ \forall z\in\Omega$

Απόδειξη Έστω $c\neq 0$, $f(z)=u(z)+iv(z)$ $(u,v:\Omega\to\mathbb{R})$

$\Rightarrow |f(z)|=c\Rightarrow |f(z)|^2=c^2$

$\Rightarrow u^2(x,y)+v^2(x,y)=c^2$ — Συνθήκες Cauchy-Riemann

$$\left.\begin{array}{l}\Rightarrow \frac{\partial}{\partial x}\left(u^2(x,y)+v^2(x,y)\right)=\frac{\partial}{\partial x}c^2\Leftrightarrow 2uu_x+2vv_x=0\Leftrightarrow uu_x+vv_x=0 \\ \Rightarrow \frac{\partial}{\partial y}\left(u^2(x,y)+v^2(x,y)\right)=\frac{\partial}{\partial y}c^2\Leftrightarrow 2uu_y+2vv_y=0\Leftrightarrow uu_y+vv_y=0\end{array}\right]\Leftrightarrow \begin{array}{l} uu_x-v\cdot u_y=0 \\ vu_x+u\cdot u_y=0\end{array}$$

$$\begin{pmatrix} u & -v \\ v & u \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\det\begin{pmatrix} u & -v \\ v & u \end{pmatrix}=u^2+v^2=c^2\neq 0$$

Επομένως έχει μοναδική λύση

$u_x=u_y=0 \Rightarrow u(x,y)=c_1=$ σταθερά.

Ομοίως: $u v_y - v v_x = 0$

$-u v_x + v v_y = 0$

$$\begin{pmatrix} v & u \\ -u & v \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\det\begin{pmatrix} v & u \\ -u & v \end{pmatrix}=v^2+u^2=c^2\neq 0$$

$v_x=v_y=0$ μοναδική λυση

Άρα $v(x,y)=c_2=$ σταθερό

Επομένως έχουμε $f(z)=\underbrace{c_1+c_2 i}_{\omega\in\mathbb{C}}$

Μιγαδική Ανάλυση

19/10/2017

Cauchy-Riemann

f ολόμορφη και $|f|=1 \Rightarrow \exists c \in \mathbb{C} : f(z)=c$

f συνεχής και $|f(z)|=1 \quad \forall z \in \Omega$ (ανοικτό και συνεκτικό)

↳ μόνο με τη συνέχεια δεν προκύπτει το ίδιο αποτέλεσμα.

Παράδειγμα:

$f(z)=\frac{\bar{z}}{z}, z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$

$h(z)=z$

$g(z)=\bar{z}$: συνεχής αλλά όχι ολόμορφη (πουθενά)

Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$

$h(z)=z$ είναι παραγωγίσιμη στο $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$

$\Rightarrow fh$ πρέπει να είναι παραγωγίσιμη στο $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$

Όμως $(fh)=\frac{\bar{z}}{z} \cdot z = \bar{z} = g(z)$ άτοπο γιατί η $g(z)=\bar{z}$ δεν είναι παραγωγίσιμη.

$$|f(z)|=\left|\frac{\bar{z}}{z}\right|=\frac{|\bar{z}|}{|z|}=1$$

$z=|z|e^{i\arg z} \quad \mathbb{C} \setminus (-\infty,0]$

$\bar{z}=|z|e^{-i\arg z}$

$\frac{\bar{z}}{z}=e^{-2i\arg z}$

Υπενθύμιση Cauchy-Riemann

$f(z)=u(x,y)+iv(x,y), \; u,v:\Omega \to \mathbb{R}$

$\exists u_x, u_y, v_x, v_y \in C(\Omega)$

$u_x=v_y$ και $u_y=-v_x$

$\Rightarrow f$ ολόμορφη και $f'(z)=u_x(x,y)+v_y(x,y)=v_y(x,y)-iu_y(x,y)$

Παραδείγματα:

1) $z=x+yi, \; x,y \in \mathbb{R}$

Η $e^z := e^x(\cos y + i\sin y) = \underbrace{e^x \cos y}_{u(x,y)} + i\underbrace{e^x \sin y}_{v(x,y)}$ είναι ολόμορφη στο $\mathbb{C}$

$u_x(x,y)=e^x\cos y \qquad u_y(x,y)=-e^x\sin y$

$v_y(x,y)=e^x\cos y \qquad v_x(x,y)=e^x\sin y$

Απο το αντίστροφο του θεωρήματος, η e^z είναι ολόμορφη $\forall z\in\mathbb{C}$

$(e^z)'=u_x(x,y)+iv_x(x,y)$

$\quad =e^x\cos y+ie^x\sin y$

$\quad =e^z$

Για $x\in\mathbb{R}$: $e^x:=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}\ \forall x\in\mathbb{R}$

$(e^x)'=e^x$

Και για τους μιγαδικούς ισχύει $e^z:=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{n!}$ (άσκηση)

$\forall z\in\mathbb{C}$

$e^{ix}=\cos x+i\sin x,\ x\in\mathbb{R}$

$\Updownarrow \qquad \sin^2x+\cos^2x=1$

$\cos x=\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} \qquad (\cos x)'=-\sin x$

$\sin x=\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i} \qquad (\sin x)'=\cos x$

$\cosh^2x-\sinh^2x=1$

$\cosh x=\frac{e^x+e^{-x}}{2} \qquad (\cosh x)'=\sinh x$

$\sinh x=\frac{e^x-e^{-x}}{2} \qquad (\sinh x)'=\cosh x$

Αντίστοιχα για τους μιγαδικούς

$\cos z=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$

$\sin z=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$

$\cosh z:=\frac{e^z+e^{-z}}{2}$

$\sinh z:=\frac{e^z-e^{-z}}{2}$

2) Η $\log z$, $z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$

$z = |z| e^{i \arg z}$

$\log z = \log|z| + i \arg z$

↳ δεν είναι παραγωγίσιμο το καθένα απο αυτά

Αλλά το άθροισμά τους δηλαδή η $\log z$ είναι ολόμορφη

$e^{\log z} = e^{\log|z| + i\arg z} = z = |z| e^{i \arg z}$

$f(z) = \log z$, $z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$

$g(z) = e^z$, $z \in \mathbb{C}$

$g(f(z)) = z$ g ολόμορφη

(Άσκηση) Πάρτε ότι η f ολόμορφη

Για να δω αν είναι παραγωγίσιμη $\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = \frac{1}{\frac{z-z_0}{f(z)-f(z_0)}} = \frac{1}{\frac{g(f(z))-g(f(z_0))}{f(z)-f(z_0)}}$

$w = f(z)$

$w \to f(z_0)$ θέλω f συνεχή

$\lim_{w \to w_0} \frac{g(w)-g(w_0)}{w-w_0} = g'(w_0)$

$= \frac{1}{\frac{g(w)-g(f(z_0))}{w-f(z_0)}}$

Φυλλάδιο 1

Άσκηση 5(β)

$a, b \in \mathbb{R}$, $x, y \in \mathbb{R}$, $a^2+b^2 \neq 0$ (για να μην είναι αδύνατο το σύστημα)

$$\left.\begin{aligned} e^{x^2-y^2}\cos(2xy) &= a \\ e^{x^2-y^2}\sin(2xy) &= b \end{aligned}\right] \Rightarrow e^{x^2-y^2}(\cos(2xy)+i\sin(2xy)) = a+bi$$

$e^{x^2-y^2+2xyi} = a+bi$

$e^{(x+yi)^2} = a+bi$

$$\Rightarrow e^{x^2-y^2+2xyi} = \sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} + i\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$$

$$= |a+bi| e^{i\arg(a+bi)}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} e^{x^2-y^2} = \sqrt{a^2+b^2} \Leftrightarrow x^2-y^2 = \underbrace{\log\sqrt{a^2+b^2}}_{A} \\ 2xy = \underbrace{\arg(a+bi)}_{\varphi_0} + 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-y^2 = A \\ xy = \frac{\varphi_0}{2} + k\pi, \ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Ελέγχω αν $\exists k \in \mathbb{Z}$: $\varphi_0 = -2k\pi$, $\varphi_0 \in (-\pi, \pi]$

$\Longrightarrow k=0$.

• Για $k=0 \Rightarrow \varphi_0 = 0 \Rightarrow xy=0$ $\qquad \Leftrightarrow \begin{cases} x=0, y^2=-\log a \Leftrightarrow 0<a<1 \\ y=0, x^2=\log a \Leftrightarrow a\geq 1 \end{cases}$

$a>0, b=0 \qquad x^2-y^2=\log a$

$$\left.\begin{aligned} x^2-y^2&=A \\ xy&=\frac{\varphi_0}{2}+k\pi \end{aligned}\right\} \Longleftrightarrow \begin{cases} x^2-\dfrac{B_0^2}{x^2}=A \\ y=\dfrac{\underbrace{\frac{\varphi_0}{2}+k\pi}_{B_0}}{x} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x^4-Ax^2+B_0^2=0 \\ y=\dfrac{B_0}{x} \end{cases}$$

$x^2=t$, $t^2-At-B_0^2=0$

$$t=\frac{A+\sqrt{A^2+4B_0^2}}{2}$$

$$x_1=\sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2+4B_0^2}}{2}}$$

$$x_2=-\sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2+4B_0^2}}{2}} \qquad \ldots$$

__Άσκηση 4__ (α' τρόπος)

$\theta, \varphi \in \mathbb{R}$, $1-\cos 2x = 2\sin^2 x$

Να δείξετε ότι $|e^{i\varphi}-e^{i\theta}| \leq |\varphi-\theta|$

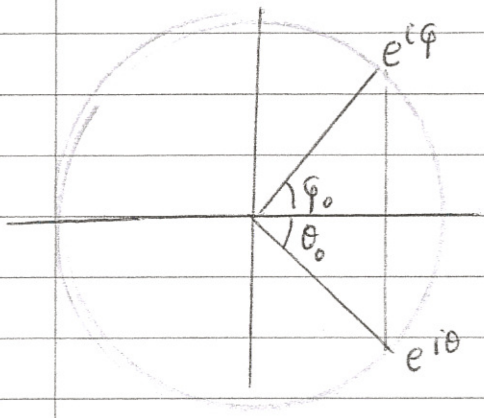
$$\begin{aligned}
&|\cos\varphi-\cos\theta+i(\sin\varphi-\sin\theta)| \\
&=\sqrt{(\cos\varphi-\cos\theta)^2+(\sin\varphi-\sin\theta)^2} \\
&=\sqrt{\cos^2\varphi-2\cos\varphi\cos\theta+\cos^2\theta+\sin^2\varphi-2\sin\varphi\sin\theta+\sin^2\theta} \\
&=\sqrt{2-2(\cos\varphi\cos\theta+\sin\varphi\sin\theta)} \\
&=\sqrt{2-2\cos(\varphi-\theta)} \\
&=\sqrt{4\sin^2\left(\frac{\varphi-\theta}{2}\right)} \\
&=2\left|\sin\left(\frac{\varphi-\theta}{2}\right)\right|
\end{aligned}$$

$|\sin x| \leq |x|$ (Αποδεικνύεται με ΘΜΤ)

$$\leq 2\left|\frac{\varphi-\theta}{2}\right| = |\varphi-\theta|$$

(β' τρόπος)

$|e^{i\varphi}-e^{i\theta}| \leq |\varphi-\theta|$ Γεωμετρική απόδειξη



$\varphi = \varphi_0 + 2k\pi$

$\theta = \theta_0 + 2m\pi$

$\varphi-\theta = \varphi_0-\theta_0+2(k-m)\pi$

$|e^{i\varphi}-e^{i\theta}| \leq |\varphi_0-\theta_0| \leq |\varphi-\theta|$

<u>Φυλλάδιο 2</u>

<u>Άσκηση 1</u>

α) $\lim_{z\to 0} \dfrac{z^2+\bar{z}^2}{|z|} = 0$ βαθμός αριθμητή > βαθμό παρανομαστή

$z = |z| e^{i\theta}$, $\theta_z \in (-\pi, \pi]$

$z^2 = |z|^2 e^{i2\theta_z}$

$\dfrac{z^2}{|z|} = |z| e^{i2\theta_z} \to 0$ ομοίως για το $\dfrac{\bar{z}^2}{|z|} \to 0$

β) $\lim_{z\to 0} \dfrac{z^2+\bar{z}^2}{|z|^2}$ δεν υπάρχει

$z = |z| \cdot e^{i\theta_z}$, $\theta_z \in (-\pi, \pi]$

$\dfrac{z^2+\bar{z}^2}{|z|^2} = \dfrac{|z|^2(e^{2i\theta_z}+e^{-2i\theta_z})}{|z|^2} = \cos 2\theta_z + i\sin 2\theta_z + \cos 2\theta_z - i\sin 2\theta_z$

$= 2\cos(2\theta_z)$

Μιγαδική Ανάλυση

24/10/2017

Επικαμπύλια ολοκληρώματα

$\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ πάντοτε συνεχής

- αν $\gamma(a)=\gamma(b)$: κλειστή
- αν $\gamma(t) \neq \gamma(s)$ $\forall t,s \in (a,b)$, $t \neq s$: απλή

Η γ είναι C^1 αν είναι παραγωγίσιμη στο $[a,b]$ και $\gamma'(t)$ να είναι συνεχής $[a,b]$

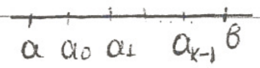
μήκος $\ell(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)|dt = \sum_{i=1}^{k} \int_{a_{i-1}}^{a_i} |\gamma'(t)|dt$

γ κατά τμήματα C^1

$\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$

$a<b$

$a<a_0<a_1< \dots <a_k=b$



$\gamma|_{[a_{i-1},a_i]}$ είναι C^1 $\forall i=1,2,\dots,k$

Θεώρημα Jordan.

Απλή κλειστή καμπύλη $\Rightarrow$ φραγμένο συνεκτικό χωρίο / άφρακτο συνεκτικό χωρίο

$\gamma : [a,b] \to \gamma([a,b]) \subseteq \mathbb{R}$

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ $\quad \int_a^b f(x)dx$

- f φραγμένη
- Κριτήριο Riemann (εξασφαλίζει ολοκληρωσιμότητα της f)

$\forall \varepsilon>0$ $\exists P$ διαμέριση : $U(f,P)-L(f,P)<\varepsilon$

Αντίστοιχα, $f:[a,b] \to \mathbb{C}$

$$f(t)=u(t)+iv(t), \quad u,v : [a,b] \to \mathbb{R}$$

Η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη όταν είναι και το πραγματικό $(u(t))$ και το φανταστικό της μέρος $(v(t))$ Riemann ολοκληρώσιμες συναρτήσεις

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^b u(t)dt + i\int_a^b v(t)dt$$

$$\int_a^b f(t)dt = \left(\int_a^b u(t)dt, \int_a^b v(t)dt\right)$$

Αν $f, g : [a,b] \to \mathbb{C}$ Riemann ολοκληρώσιμες $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$
$\Rightarrow \lambda f + \mu g$ είναι Riemann ολοκληρώσιμη
$\int_a^b (\lambda f(t) + \mu g(t))dt = \lambda \int_a^b f(t)dt + \mu \int_a^b g(t)dt$

$f : [a,b] \to [m,M]$ Riemann ολοκληρώσιμη
$g : [m,M] \to \mathbb{R}$ συνεχής
$g \circ f : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι Riemann ολοκληρώσιμη

1ο Θεμελιώδες Θεώρημα Απειροστικού Λογισμού

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ φραγμένη και Riemann ολοκληρώσιμη
$F(x) := \int_a^x f(t)dt$ $\quad |f| \leq M$ τότε $|F(x) - F(y)| \leq M|x-y|$.
Η F είναι Lispchitz συνεχής (άρα ομοιόμορφα συνεχής)
Αν f συνεχής στο $x_0 \Rightarrow F$ παραγωγίσιμη στο x_0 $\quad F'(x_0) = f(x_0)$

2ο Θεμελιώδες Θεώρημα Απειροστικού Λογισμού

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη και f' Riemann ολοκληρώσιμη και φραγμένη
$\int_a^b f'(s)ds = f(b) - f(a)$

Είδαμε ότι $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$. $|z_1 + \dots + z_n| \leq \sum_{i=1}^{n} |z_i|$
$\{z_n\} \subseteq \mathbb{C}$ ώστε $\sum_{i=1}^{\infty} |z_i|$ συγκλίνει
$\Rightarrow \sum z_n$ συγκλίνει
$|\sum_{n=1}^{\infty} z_n| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$

- Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ Riemann ολοκληρώσιμη, φραγμένη
τότε $|\int_a^b f(t)dt| \leq \int_a^b |f(t)|dt$

Πότε ισχύει η ισότητα;

$f(t) = u(t) + i v(t)$, $t \in [a,b]$ $\quad u = Re f$ και $v = Im f$
$\int_a^b f(t)dt = \int_a^b u(t)dt + i\int_a^b v(t)dt$

$|\int_a^b f(t)dt| = \sqrt{(\int_a^b u(t)dt)^2 + (\int_a^b v(t)dt)^2}$

$$\int_a^b |f(t)|dt = \int_a^b \sqrt{u^2(t)+v^2(t)}\,dt$$

Απόδειξη:

Έστω $\int_a^b f(t)dt = w = |w|e^{i\theta} = \int_a^b u(t)dt + i\int_a^b v(t)dt$

$$|w| = e^{-i\theta}\int_a^b f(t)dt = \int_a^b e^{-i\theta} f(t)dt$$

$$\Rightarrow |w| = \left|\int_a^b f(t)dt\right|$$

$$\left|\int_a^b f(t)dt\right| = \int_a^b e^{-i\theta} f(t)dt = \int_a^b A(t)dt + i\underbrace{\int_a^b B(t)dt}_{=0} \leq \int_a^b |e^{-i\theta} f(t)|dt = \int_a^b |f(t)|dt$$

$e^{-i\theta} = A(t) + iB(t)$, $A = Re(e^{-i\theta} f)$

$B = Im(e^{-i\theta} f)$

$A(t) \leq |A(t)| \leq |e^{-i\theta} f(t)|$ $\qquad Re(Q) \leq |Q| = \sqrt{(ReQ)^2 + (ImQ)^2}$

Αν f συνεχής στο $[a,b]$

$$\int_a^b A(t)dt = \int_a^b \sqrt{A^2(t)+B^2(t)}\,dt$$

$A(t) \leq \sqrt{A^2(t)+B^2(t)}$

$A(t) = \sqrt{A^2(t)+B^2(t)}$

$\Rightarrow B^2(t) \equiv 0$

$A(t) = |A(t)|$

Άρα η ισότητα ισχύει όταν $A \geq 0$, $B(t) \equiv 0$

Επομένως $e^{-i\theta} f(t) = A(t)$

$\Rightarrow f(t) = A(t)\cdot e^{i\theta}$

Αν $f : [a,b] \to [0,+\infty)$

$f \geq 0$ συνεχής και $\int_a^b f(t)dt = 0$

$\Rightarrow f \equiv 0$

$\gamma:[\alpha,\beta]\to\mathbb{C}$ κατά τμήματα C^1, $f:\gamma([\alpha,\beta])\to\mathbb{C}$

$\int_\gamma f(z)dz := \int_\alpha^\beta f(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)dt$

Ιδιότητες

i) Αν $f,g:\gamma([\alpha,\beta])\to\mathbb{C}$ συνεχής $\Rightarrow \lambda,\mu\in\mathbb{C}$ $\lambda f+\mu g$ υπάρχει το επικαμπύλιο ολοκλήρωμο στη γ και μάλιστα $\int_\gamma(\lambda f+\mu g)\,dz=\lambda\int_\gamma f(z)dz+\mu\int g(z)dz$

ii) $-\gamma$, γ^-, $\gamma:[\alpha,\beta]\to\mathbb{C}$

$\gamma^-(t)=\gamma(\alpha+\beta-t)$, $\gamma^-:[\alpha,\beta]\to\mathbb{C}$ κατά τμήματα παραγωγίσιμη

$\gamma^-(\alpha)=\gamma(\beta)$

$\gamma^-(\beta)=\gamma(\alpha)$ (επικαμπύλιο ολοκλήρωμα β' είδους)

$\int_{\gamma^-} f(z)dz=-\int_\gamma f(z)dz$

$\int_\alpha^\beta f(\gamma^-(t))\cdot\gamma^{-\prime}(t)dt=\int_\alpha^\beta f(\gamma(\alpha+\beta-t))\cdot\gamma'(\overbrace{\alpha+\beta-t}^{s})dt=-\int_\alpha^\beta f(\gamma(s))\gamma'(s)ds=-\int_\gamma f(z)dz$

Πρόταση

Έστω $\gamma:[\alpha,\beta]\to\mathbb{C}$ κατά τμήματα C^1

και $f:\gamma([\alpha,\beta])\to\mathbb{C}$ συνεχής

Τότε $\left|\int_\gamma f(z)dz\right|\le\max_{t\in[\alpha,\beta]}|f(\gamma(t))|\,\ell(\gamma)$

$\int_\gamma f(z)dz=\int_\alpha^\beta f(\gamma(t))\gamma'(t)dt$

$\left|\int_\gamma f(z)dz\right|\le\int_\alpha^\beta\left|f(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\right|dt$

$M=\max_{t\in[\alpha,\beta]}|f(\gamma(t))|$

Πρόταση: Έστω Ω τόπος (ανοικτό και συνεκτικό), $\Omega \neq \emptyset$
$f_n, f: \Omega \to \mathbb{C}$ συνεχείς, $\gamma: [a,b] \to \mathbb{C}$ κατά τμήματα C^1 ώστε
$f_n \to f$ ομοιόμορφα στο $\gamma([a,b])$

Τότε $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_\gamma f_n(z)dz = \int_\gamma f(z)dz$

Απόδειξη:

Διότι έχουμε $\left|\int_\gamma f_n(z)dz - \int_\gamma f(z)dz\right| = \left|\int_a^b (f_n(z) - f(z))dz\right| \leq \max\limits_{t\in[a,b]} |f_n\gamma(t)) - f(\gamma(t))| \ell(\gamma)$ $\underset{\downarrow}{} 0$

$\ell(\gamma_n - \gamma) \to 0$

$\gamma_n(a) = \gamma(a)$

Παράγουσα μιας συνάρτησης

Έστω $f: \Omega$ (τόπος) $\to \mathbb{C}$ συνεχής

Η f έχει παράγουσα αν $\exists$ ολόμορφη συνάρτηση F, $F: \Omega \to \mathbb{C}$ ώστε
$F'(z) = f(z)$ $\forall z \in \Omega$

Πρόταση

Ω τόπος $\subseteq \mathbb{C}$, $f: \Omega \to \mathbb{C}$, $\gamma: [a,b] \to \Omega$ κατά τμήματα C^1
Εάν η f έχει παράγουσα F τότε $\int_\gamma f(z)dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$

Μιγαδική Ανάλυση

27/10/2017

<u>Πρόταση</u>: Έστω Ω τόπος, $f: \Omega \to \mathbb{C}$ συνεχής που έχει παράγουσα F
($\exists F$ ολόμορφη, $F'(z) = f(z)$ $\forall z \in \Omega$)
και $\gamma: [a,b] \to \Omega$ κατά τμήματα C^1 καμπύλη τότε:
$\int_\gamma f(z)dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$

* $\gamma: [a,b] \to \mathbb{C}$ κατά τμήματα C^1 θα τη λέμε καμπύλη (ή μονοπάτι)

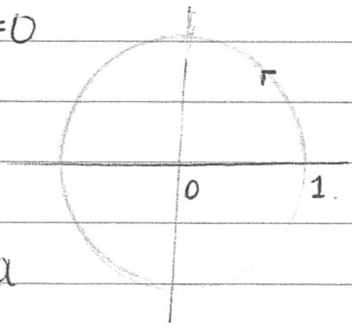
<u>Απόδειξη</u>:
$F'(z) = f(z)$ $\forall z \in \Omega$
Επίσης $\int_\gamma f(z)dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt$ σε καθένα από τα $[a_{i-1}, a_i]$

Όμως $\frac{d}{dt}F(\gamma(t)) = F'(\gamma(t))\gamma'(t) = f(\gamma(t))\gamma'(t)$

$\gamma: [a_{i-1}, a_i]$ είναι C^1, $[a,b]$: $a = a_0 < a_1 < \dots < a_n = b$
$$\int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt = \sum_{i=1}^n \int_{a_{i-1}}^{a_i} f(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt = \sum_{i=1}^n \int_{a_{i-1}}^{a_i} (F(\gamma(t)))'dt$$
$$= \sum_{i=1}^n \left(F(\gamma(a_i)) - F(\gamma(a_{i-1}))\right) = F(\gamma(a_n)) - F(\gamma(a_0))$$
$$= F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$$

<u>Άσκηση</u>: Αποδείξτε ότι $\int_{|z|=1} \frac{1}{z^2}dz = 0$

$|z - z_0| = 1$
$\gamma(t) = z_0 + e^{it}$



$\gamma(t) = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$
Από προηγούμενη πρόταση
η συνάρτηση $\frac{1}{z^2}$ έχει παράγουσα
τη $-\frac{1}{z}$ στο $\mathbb{C} \setminus \{0\}$
Ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις της πρότασης
Οπότε $\int_\gamma \frac{1}{z^2}dz = -\frac{1}{\gamma(2\pi)} - \left(-\frac{1}{\gamma(0)}\right) = -\frac{1}{\gamma(2\pi)} + \frac{1}{\gamma(0)} = -1+1 = 0$

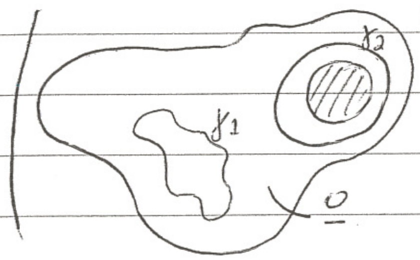
$z = \gamma(b)$
$F(\gamma(b)) = \left(-\frac{1}{z}\right)(\gamma(b)) = -\frac{1}{\gamma(b)}$

$\int_\gamma \frac{1}{z}\,dz = 2\pi$. Δεν υπολογίζεται με την προηγούμενη πρόταση γιατί δεν μπορούμε να βρούμε παράγουσα που να ορίζεται στο $[0,2\pi]$ χρησιμοποιούμε τον ορισμό!

<u>Θεώρημα (Cauchy)</u>

Έστω Ω τόπος, $f:\Omega\to\mathbb{C}$ ολόμορφη, $\gamma:[a,b]\to\Omega$ κλειστή καμπύλη κατά τμήματα C^1, με την επιπρόσθετη ιδιότητα, το εσωτερικό της καμπύλης να ανήκει στο Ω. Τότε $\int_\gamma f(z)\,dz=0$

<u>Απόδειξη 1η)</u> (Αν επιπρόσθετα $f'(z)$ να είναι συνεχής)



Για την γ_1 εφαρμόζεται το θεώρημα γιατί η καμπύλη και το εσωτερικό της ανήκει στο Ω, ενώ για την γ_2 όχι γιατί δεν ανήκει.

Τότε έχουμε $\int_\gamma f(z)\,dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt$

$z=x+yi,\ x,y\in\mathbb{R}$

Έστω $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$

$\gamma(t)=x(t)+iy(t)\ ,\ x,y:[a,b]\to\mathbb{R}$

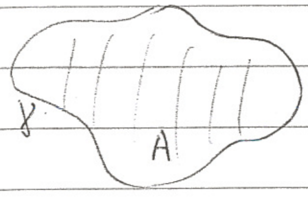
Το ολοκλήρωμα γίνεται: $\int_a^b [u(x(t),y(t))+iv(x(t),y(t))](x'(t)+iy'(t))\,dt$

$$=\int_a^b [u(x(t),y(t))\cdot x'(t)-v(x(t),y(t))\cdot y'(t)]\,dt+i\int_a^b [v(x(t),y(t))\cdot x'(t)+u(x(t),y(t))\cdot y'(t)]\,d$$

$$=\int_a^b (\underset{\substack{\parallel\\ P(x,y)}}{u(x(t),y(t))},\underset{\substack{\parallel\\ Q(x,y)}}{-v(x(t),y(t))})\cdot(x'(t),y'(t))\,dt+i\int_a^b (v(x(t),y(t)),u(x(t),y(t)))\,(x'(t),y'(t))$$

<u>Θεώρημα Green</u>

$\int_\gamma P\,dx+Q\,dy=\iint_A \left[\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right]dx\,dy$ με γ κατά τμήματα C^1 και το χωρίο απλά συνεκτικό



υπάρχουν οι μερικές παράγωγοι και είναι συνεχείς. $(P,Q\in C^1)$

$\partial A=\gamma$.

Εφαρμόζουμε το θεώρημα Green και έχουμε:

$$\iint_A \left[-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} u\right] dx dy + i \iint_A \left[\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right] dx dy = 0$$

Φυλλάδιο Ασκήσεων 2

4) α) $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ $f(z) = z^2 - \bar{z}^2$ Να αποδείξετε ότι δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής

πχ. παίρνουμε τις ακολουθίες $\begin{pmatrix} z_n = n + \frac{i}{n} \\ w_n = n \end{pmatrix}$

$|z_n - w_n| = \left|n + \frac{i}{n} - n\right| \to 0$

$|f(z_n) - f(w_n)| \not\to 0$

$z = x + yi$, $f(z) = 4xyi$

$z_n = x_n + i y_n$, $w_n = x_n' + i y_n'$ $\Big|$ $z_n - w_n \to 0 \Leftrightarrow x_n - x_n' \to 0$, $y_n - y_n' \to 0$

$f(z_n) - f(w_n) = 4(x_n y_n - x_n' y_n') i$

$= 4((x_n - x_n') y_n + x_n' y_n - x_n' y_n')$

$= 4((x_n - x_n') y_n + x_n' (y_n - y_n'))$

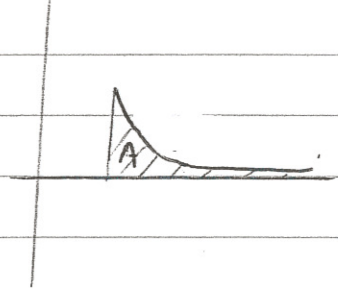
$x_n - x_n' = \frac{1}{n}$ (1)

$y_n = n$ (2) Απο (2),(3): $y_n' = n - \frac{1}{n}$

$y_n - y_n' = \frac{1}{n}$ (3)

$x_n' = n$ (4) $x_n = n + \frac{1}{n}$

β) $A = \{x + yi,\ x, y \in \mathbb{R} \mid 0 \leq y \leq \frac{1}{x^2},\ x \geq 1\}$



Απόδειξη (με άτοπο)

Έστω ότι η g δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής. Άρα $\exists\ z_n, w_n$ ώστε

$\lim_{n \to +\infty} (z_n - w_n) = 0$, $z_n = x_n + y_n i$, $w_n = a_n + b_n i$

$\lim_{n \to +\infty} (x_n y_n - a_n b_n) \neq 0$

$x_n - a_n = \sigma_n$, $\sigma_n \to 0$

$y_n - b_n = t_n$, $t_n \to 0$

Μπορεί η x_n να είναι φραγμένη;

→ Όχι γιατί αν ήταν $x_n \leq M \Rightarrow x_{n_k}$ συγκλίνουσα υπακολουθία

$\lim x_n = +\infty \Rightarrow \lim b_n = +\infty$

$x_n = a_n + \sigma_n$

$y_n = b_n + t_n$

$y_n \leq \frac{1}{x_n^2}$ και $b_n \leq \frac{1}{a_n^2}$

$$x_n y_n - a_n b_n = (a_n + \sigma_n)(b_n + t_n) - a_n b_n$$
$$= \cancel{a_n b_n} + a_n t_n + b_n \sigma_n + \sigma_n t_n - \cancel{a_n b_n}$$
$$= \underset{\downarrow\, 0}{a_n t_n} + \underset{\downarrow\, 0}{b_n \sigma_n} + \underset{\downarrow\, 0}{\sigma_n t_n}$$

$a_n t_n = a_n(y_n - b_n) = a_n y_n - a_n b_n$

$|x_n y_n - a_n b_n| \leq |x_n y_n| + |a_n b_n| \leq \frac{1}{x_n^2} x_n + \frac{a_n}{a_n^2} = \frac{1}{x_n} + \frac{1}{a_n} \to 0$

a) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{1+\bar{z}^{2n}}$ $\quad r<1,\ B(0,r)$

$M_n = \sup_{B(0,r)} \left|\frac{z^n}{1+\bar{z}^{2n}}\right|$

και $\sum_{n=1}^{+\infty} M_n$ συγκλίνει

$1 - |\bar{z}^{2n}| \leq |1+\bar{z}^{2n}|$

(Τριγωνική ανισότητα)

$|\bar{z}|^{2n} \leq r^{2n} \leq r < 1$ οπότε έχουμε

$0 < 1 - r \leq 1 - |\bar{z}^{2n}| \leq |1+\bar{z}^{2n}|$

$$\frac{1}{|1+\bar{z}^{2n}|} \leq \frac{1}{1-r}$$

$$\sup\left|\frac{z^n}{1+\bar{z}^{2n}}\right| \leq \sup_{|z|<r} \frac{|z^n|}{1-r} = \frac{|r|^n}{1-r} = M_n$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} M_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{r^n}{1-r} = \frac{r}{1-r} \sum_{n=1}^{+\infty} r^{n-1} = \frac{r}{(1-r)^2} < +\infty$$

Από κριτήριο Weierstrass η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη

Μιγαδική Ανάλυση 31/10/2017

Λήμμα: Έστω Ω τόπος, $f:\Omega\to\mathbb{C}$ ολόμορφη και Δ τρίγωνο ώστε $\Delta\subseteq\Omega$

τότε $\int_{\partial\Delta} f(z)dz=0$, $\partial\Delta$: το σύνορο του τριγώνου

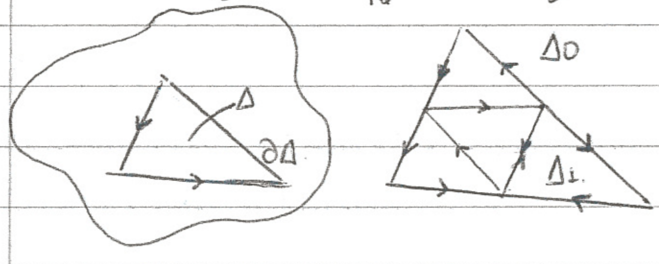
Απόδειξη

Απαγωγή σε άτοπο

Έστω πως υπάρχει τρίγωνο Δ και ολόμορφη $f:\Omega\to\mathbb{C}$

Τότε $\int_{\partial\Delta} f(z)dz\neq 0$

$$=\int_{T_1} f(z)dz+\int_{T_2} f(z)dz+\int_{T_3} f(z)dz+\int_{T_4} f(z)dz$$



$$\left|\int_{\partial\Delta} f(z)dz\right|\leq\sum_{i=1}^{4}\left|\int_{T_i} f(z)dz\right|\leq 4\left|\int_{\partial\Delta} f(z)dz\right|$$

Επιλέγουμε επίσης το τρίγωνο που το επικαμπύλιο κατ' απόλυτη τιμή είναι το μεγαλύτερο

Με τον τρόπο αυτό ορίζουμε τα τρίγωνα $\Delta_0\supseteq\Delta_1\supseteq\Delta_2\supseteq\ldots\supseteq\Delta_n\supseteq\ldots$

Περίμετρος του $\Delta_1=\dfrac{\text{περίμετρος } \Delta_0}{2}$

(Με επαγωγή)

$|\partial\Delta_n|=$ περίμετρος του $\Delta_n=\dfrac{\text{περίμετρος } \Delta_0}{2^n}$

Διάμετρος του $\Delta_n=\dfrac{\text{διάμετρος } \Delta_0}{2^n}$

η μεγαλύτερη δυνατή απόσταση μεταξύ δύο σημείων

$$\left|\int_{\partial\Delta_0} f(z)dz\right|\leq 4^n\left|\int_{\partial\Delta_n} f(z)dz\right|$$

$\bigcap_{n=1}^{+\infty}\Delta_n$:
- κλειστό (τομή κλειστών)
- φραγμένο

Αν $z_i\in\Delta_i\Rightarrow\{z_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ φραγμένη $\Rightarrow$ Άρα έχει συγκλίνουσα υπακολουθία

Δηλαδή $\exists z_{n_k}$ συγκλίνει

$z_{n_k}\to z_0$

$z_n\in\Delta_n$ και $z_m\in\Delta_m$, $m\geq n$.

$z_n \in \Delta_n,\ n \geq N \Rightarrow \lim_{n\to\infty} z_n = z_0 \in \Delta_n$

Άρα $\bigcap_{n=1}^{+\infty} \Delta_n \supseteq \{z_0\}$ (Δηλαδή έχει τουλάχιστον ένα σημείο)

Οπότε $z_0 \in \bigcap_{n=0}^{+\infty} \Delta_n$. Επειδή η f είναι ολόμορφη στο z_0

$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \left| \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} - f'(z_0) \right| < \varepsilon,\ 0 < |z-z_0| < \delta$
$z \in \Omega$

$\Longleftrightarrow |f(z)-f(z_0)-f'(z_0)(z-z_0)| \leq \varepsilon |z-z_0|,\ |z-z_0| < \delta$

Επιλέγουμε n αρκετά μεγάλο ώστε $\Delta_n \subset B(z_0,\delta)$, $n \geq n_0$

Τότε $\int_{\partial\Delta_n} f(z)\,dz = \int_{\partial\Delta_n} (f(z)-f(z_0)-f'(z_0)(z-z_0))\,dz + \underbrace{\int_{\partial\Delta_n} (f(z_0)+f'(z_0)(z-z_0))\,dz}_{=0}$

$\Rightarrow \left| \int_{\partial\Delta_n} f(z)\,dz \right| = \left| \int_{\partial\Delta_n} (f(z)-f(z_0)-f'(z_0)(z-z_0))\,dz \right|$ (Γιατί μπορώ να βρω παράγουσα και είναι κλειστή καμπύλη)

$\leq \max |f(z)-f(z_0)-f'(z_0)(z-z_0)|$ περίμετρος του Δ_n

$\leq \varepsilon \cdot$ Διάμετρος του $\Delta_n \cdot$ περίμετρος του Δ_n

$= \varepsilon \cdot \frac{\text{Διάμετρος } \Delta_0}{2^n} \cdot \frac{|\partial\Delta_0|}{2^n}$

Αν g συνεχής
$\left| \int_\gamma g(z)\,dz \right| \leq \max_{z\in[a,b]} |g(\gamma(z))| \cdot \ell(\gamma)$

Και επομένως $\left| \int_{\partial\Delta_0} f(z)\,dz \right| \leq 4^n \cdot \left| \int_{\partial\Delta_n} f(z)\,dz \right| \leq 4^n \cdot \frac{\varepsilon}{2^n \cdot 2^n}$ διάμετρος $\Delta_0 \cdot$ περίμετρος

$\Rightarrow \int_{\partial\Delta_0} f(z)\,dz = 0$

Πότε $\lim_{n\to+\infty} \int_{\gamma_n} f(z)dz = \int_{\gamma} f(z)dz$

$$= \left| \int_a^b f(\gamma_n(t))\gamma_n'(t)dt - \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt \right|$$

$$= \left| \int_a^b \left[f(\gamma_n(t))\gamma_n'(t) - f(\gamma(t))\gamma'(t) \right] dt \right|$$

$$= \left| \int_a^b (f(\gamma_n(t)) - f(\gamma(t)))\gamma'(t)dt + \int_a^b f(\gamma_n(t))(\gamma_n'(t) - \gamma'(t))dt \right|$$

$$\leq \left| \int_a^b f(\gamma_n(t)) - f(\gamma(t))\gamma'(t)dt \right| + \left| \int_a^b f(\gamma_n(t))(\gamma_n'(t) - \gamma'(t))dt \right|$$

Αν $\gamma_n' \to \gamma'$ ομοιόμορφα, $\gamma_n(a) \to \gamma(a)$ $\Rightarrow$ $\gamma_n \to \gamma$ ομοιόμορφα

$\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ $\gamma|_{[a_{i-1},a_i]}$ είναι C^2

$\gamma'|_{[a_{i-1},a_i]}$ είναι συνεχής άρα ομοιόμορφα συνεχής

$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$, $\varepsilon, \delta \in [a_{i-1}, a_i]$

$|\gamma'(t) - \gamma'(s)| < \varepsilon$, $|t - s| < \delta$

<u>Πρόταση</u>

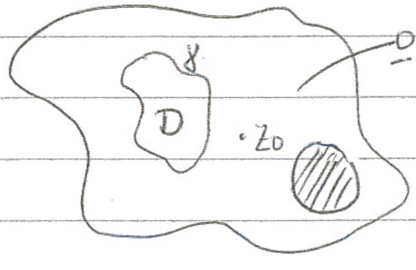
Έστω Ω τόπος, $z_0 \in \Omega$, f ολόμορφη, $f : \Omega \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$

f συνεχής στο z_0 και γ κλειστή καμπύλη με το εσωτερικό αυτής να είναι στο Ω

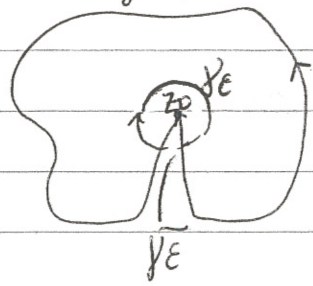
Τότε $\int_{\gamma} f(z)dz = 0$

<u>Απόδειξη</u>. Διακρίνουμε περιπτώσεις.

1) Αν $z_0 \in \Omega \setminus D$ η προηγούμενη απόδειξη.



2) Αν $z_0 \in \gamma[a,b]$



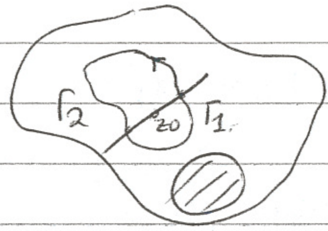
$\int_{\gamma_\varepsilon} f(z)dz = 0 \quad \forall \varepsilon > 0$

f συνεχής

$\left|\int_{\tilde{\gamma}_\varepsilon} f(z)dz\right| \leq \max|f(z)|\,|\text{μήκος } \tilde{\gamma}_\varepsilon|$

$\cong \left(2\pi\varepsilon \int_{t_0-\delta}^{t_0+\delta} |\gamma'(t)|dt\right)$

3) Αν $z_0 \in D^\circ$



$$\left.\begin{array}{l} \int_{\Gamma_1} f(z)dz = 0 \\ \int_{\Gamma_2} f(z)dz = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \int_{\Gamma_1} f(z)dz + \int_{\Gamma_2} f(z)dz = 0$$

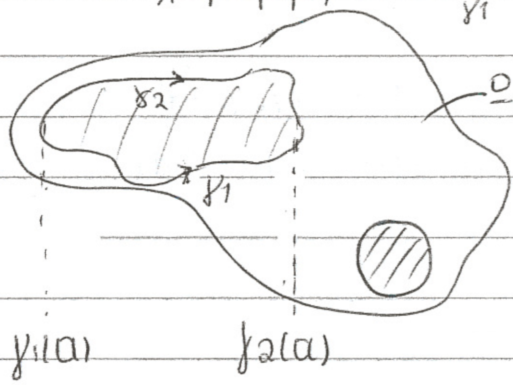
$$\Downarrow$$

$$\int_\gamma f(z)dz = 0$$

__Πρόταση:__

Έστω Ω τόπος και $\gamma_1, \gamma_2 : [a,b] \to \Omega$ (κατά τμήματα C^1) ώστε $\gamma_1(a) = \gamma_2(a)$ και $\gamma_1(b) = \gamma_2(b)$ και το εσωτερικό των γ_1, γ_2 να βρίσκεται στο Ω.

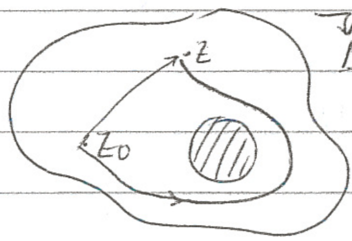
$f : \Omega \to \mathbb{C}$ ολόμορφη τότε $\int_{\gamma_1} f(z)dz = \int_{\gamma_2} f(z)dz$



$\gamma_1(a) = z_0$

$\gamma_1(b) = z$

$F(z) := \int_{z_0}^{z} f(w)dw$



Δεν εφαρμόζεται το θεώρημα Cauchy γιατί κάθε σημείο στο εσωτερικό της καμπύλης πρέπει να είναι στο Ω

Μιγαδική Ανάλυση

21|11|2017

Υπενθύμιση:

Θεώρημα Cauchy

Αν $f:\Omega$ τόπος $\to \mathbb{C}$ ολόμορφη και $\gamma:[a,b]\to\mathbb{C}$ κλειστή καμπύλη ώστε το επικαμπύλιο της γ να βρίσκεται στο $\Omega \Rightarrow \int_\gamma f(w)\,dw=0$

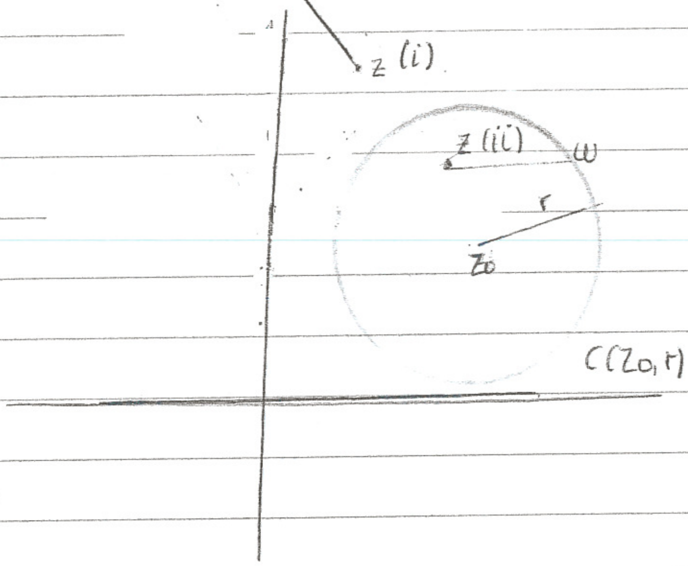
Πρόταση:

$f:\Omega\to\mathbb{C}$ ολόμορφη στο $\Omega\setminus\{z_0\}$ και συνεχής στο $z_0 \Rightarrow \int_\gamma f(w)\,dw=0$

Λήμμα:

Έστω $r>0$, $z_0\in\mathbb{C}$, $\gamma:[0,2\pi]\to\mathbb{C}$, $\gamma(t)=z_0+re^{it}$, $t\in[0,2\pi]$

$$\int_\gamma \frac{dw}{w-z}=\begin{cases}0 & |z-z_0|>r\\ 2\pi i & |z-z_0|<r\end{cases}$$



Απόδειξη:

i) $|z-z_0|>r$

Απο Θεώρημα Cauchy

$$\int_\gamma \frac{dw}{w-z}=0$$

ii) $|z-z_0|<r$

$$|z-z_0|<r=|w-z_0| \Rightarrow$$

$$\left|\frac{z-z_0}{w-z_0}\right|<1$$

$$\frac{1}{w-z}=\frac{1}{w-z_0+z_0-z}=\frac{1}{(w-z_0)\left(1+\frac{z_0-z}{w-z_0}\right)}=\frac{1}{w-z_0}\cdot\frac{1}{1-\left(\frac{z-z_0}{w-z_0}\right)}$$

$\sum_{n=0}^{+\infty} w^n=\frac{1}{1-w}$, $|w|<1$

$|w|<r<1$

$B(0,r)$ ολόμορφη

$$=\frac{1}{w-z_0}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{z-z_0}{w-z_0}\right)^n \qquad \left|\frac{z-z_0}{w-z_0}\right|<1$$

$$=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(z-z_0)^n}{(w-z_0)^{n+1}}$$

$$\Rightarrow \int_\gamma\frac{dw}{w-z}=\sum_{n=0}^{+\infty}\int_\gamma\frac{(z-z_0)^n}{(w-z_0)^{n+1}}\,dw$$

$$=\sum_{n=0}^{+\infty}(z-z_0)^n\int_\gamma\frac{dw}{(w-z_0)^{n+1}}=(z-z_0)^0\int_\gamma\frac{dw}{w-z_0}+\sum_{n=1}^{+\infty}(z-z_0)^n\underbrace{\int\frac{dw}{(w-z_0)^{n+1}}}_{=0}=2\pi i$$

$$\int_\gamma \frac{dw}{(w-z_0)^{n+1}} = \int_0^{2\pi} \frac{\gamma'(t)}{(\gamma(t)-z_0)^{n+1}}dt = \int_0^{2\pi} \frac{ire^{it}}{(r\cdot e^{it})^{n+1}} = \frac{i}{r^n}\int_0^{2\pi} e^{-int}dt$$

$$= \begin{cases} i2\pi, & n=0 \\ 0, & n=1,2,\dots \end{cases}$$ Η παράγουσα είναι η $-\frac{e^{-int}}{in}$

$$\lim_{w\to z}\frac{1}{w-z} = +\infty$$

• $\tilde{\gamma}(t) = z_0 + re^{imt}$, $m\in\mathbb{N}$, $t\in[0,2\pi]$

$$\int_{\tilde\gamma} \frac{dw}{(w-z_0)^{n+1}} = \int_0^{2\pi} \frac{\tilde{\gamma}'(t)}{(\tilde\gamma(t)-z_0)^{n+1}}dt = \int_0^{2\pi} \frac{imre^{imt}}{(re^{imt})^{n+1}}dt$$

$$= \frac{im}{r^n}\int_0^{2\pi} e^{imt-im(n+1)t}dt$$

$$= \frac{im}{r^n}\int_0^{2\pi} e^{-imnt}dt = \begin{cases} m\cdot 2\pi i & n=0 \\ 0, & n=1,2,\dots \end{cases}$$

<u>Θεώρημα</u> (Ολοκληρωτικός τύπος του cauchy)

Έστω $f:\Omega\to\mathbb{C}$ ολόμορφη $\overline{B(z_0,r)}\subseteq\Omega$

Τότε αν $|z-z_0|<r$ $f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C(z_0,r)} \frac{f(w)}{w-z}dw$.

Φυλλάδιο 3

1) $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ $f(z) = \bar{z}^2, z \in \mathbb{C}$

$\frac{f(z)-f(0)}{z-0} = \frac{\bar{z}^2}{z} = \frac{\bar{z}^3}{|z|^2}$ είναι παραγωγίσιμη στο 0

$\left|\frac{f(z)-f(0)}{z-0}\right| = \left|\frac{\bar{z}^3}{|z|^2}\right| = \frac{|z|^3}{|z|^2} = |z|$

Αν $z_0 \neq 0$

$z_0 = a + bi$, $a^2 + b^2 \neq 0$

$\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$ $z = x + bi$ Βρίσκω τα όρια αλλά είναι διαφορετικά

$z = a + yi$ Άρα δεν είναι παραγωγίσιμη εκτός από το 0.

2) $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ $f(z) = e^z$ Με ορισμό

$\lim_{h \to 0} \left(\frac{f(z+h)-f(z)}{h} - f'(z) \right) = 0$

$\lim_{h \to 0} \left(\frac{e^{z+h}-e^z}{h} - e^z \right) = \lim_{h \to 0} \frac{e^z(e^h - 1 - h)}{h}$ $e^{x+yi} = e^x e^{yi}$

$h = re^{it}$

$\frac{e^{re^{it}} - 1 - re^{it}}{re^{it}}$ ...

Εναλλακτικά, η άσκηση λύνεται με τις συνθήκες Cauchy-Riemann

$f(z) = e^z = \underbrace{e^x \cos y}_{u(x,y)} + i \underbrace{e^x \sin y}_{v(x,y)}$, $z = x + yi$, $x, y \in \mathbb{R}$

3) $f, g: \Omega \to \mathbb{C}$, $z_0 \in \Omega$ παραγωγίσιμη στο $z_0 \Rightarrow (fg)'(z_0) = f'(z_0) \cdot g(z_0) + f(z_0) \cdot g'(z_0)$

α' τρόπος

$\frac{(fg)(z) - (fg)(w)}{z-w} = \frac{f(z)g(z) - f(w)g(w)}{z-w} = \frac{f(z)g(z) - f(z)g(w) + f(z)g(w) - f(w)g(w)}{z-w}$

$= f(w) \cdot \frac{g(z) - g(w)}{z-w} + g(w) \cdot \frac{f(z)-f(w)}{z-w}$

β' τρόπος:

Πρόταση: Η f είναι παραγωγίσιμη στο z_0, όταν $\exists h$ συνεχής στο z_0 ώστε $f(z)-f(z_0)=h(z)(z-z_0)$

$$h(z)=\begin{cases}\dfrac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}, & z\neq z_0\\ f'(z_0), & z=z_0\end{cases}$$

Αν το εφαρμόσουμε στην f έχουμε ότι:

$\exists h(z)$ συνεχής στο z_0 ώστε $f(z)-f(z_0)=h(z)(z-z_0)$

και στην g: $\exists q(z)$ συνεχής στο z_0 ώστε $g(z)-g(z_0)=q(z)(z-z_0)$

Οπότε $(fg)(z)-(fg)(z_0)=f(z)g(z)-f(z_0)g(z_0)$

$$=(\cancel{f(z_0)}+h(z)(z-z_0))(\cancel{g(z_0)}+q(z)(z-z_0))-\cancel{f(z_0)g(z_0)}$$

$$=f(z_0)q(z)(z-z_0)+g(z_0)h(z)(z-z_0)+h(z)q(z)(z-z_0)$$

$$=[\underbrace{f(z_0)q(z)+g(z_0)h(z)+h(z)q(z)(z-z_0)}_{\text{συνεχής στο } z_0}](z-z_0)$$

$$f(z_0)q(z_0)+g(z_0)h(z_0)$$
$$\shortparallel$$
$$\underbrace{f(z_0)g'(z_0)+g(z_0)f'(z_0)}_{(fg)'(z_0)}$$

4) S_1,S_2 συνεκτικά $\subseteq\mathbb{C}$ $S_1\cap S_2\neq\emptyset \Rightarrow S_1\cup S_2$ συνεκτικό

Έστω $S_1\cup S_2$ μη συνεκτικό

Άρα $\exists A,B$ ανοικτά. $A\cap B=\emptyset$.

$A\cap(S_1\cup S_2)\neq\emptyset$

$B\cap(S_1\cup S_2)\neq\emptyset$

$A\cup B\supseteq S_1\cup S_2$

X συνεκτικό ανν ΔΕΝ υπάρχουν ανοικτά A,B με τις ιδιότητες:
$A\cap B=\emptyset$
$A\cap X\neq\emptyset$
$B\cap X\neq\emptyset$
$X\subseteq A\cup B$

S_1 συνεκτικό $\Rightarrow S_1\subseteq A\cup B\Longrightarrow$

χωρίς βλάβη της γενικότητας

$S_1\subseteq A$ (λόγω συνεκτικότητας)

$S_2\subseteq A\cup B\Longrightarrow$(αναγκαστικά) $S_2\subseteq B$ γιατί $A\cap B=\emptyset$.

$S_1\cap S_2\neq\emptyset$ άρα έχουν κοινό σημείο που θα έπρεπε να περιέχεται και στο $A\cap B$ (το οποίο όμως είναι κενό) Άτοπο

Μιγαδική Ανάλυση

7/11/2017

Θεώρημα (Ολοκληρωτικός τύπος του Cauchy).
Έστω Ω τόπος και $z \in D(z_0,r) \subset \Omega$ $\quad (D(z_0,r)=\{z\in\mathbb{C} \mid |z-z_0|<r\})$
και $f:\Omega\to\mathbb{C}$ ολόμορφη, τότε $f(z)=\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{C(z_0,r)} \dfrac{f(w)}{w-z}\,dw$

Απόδειξη:

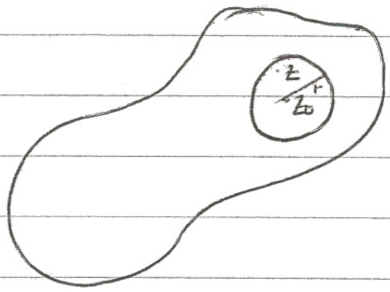
Θεωρούμε βοηθητική συνάρτηση $g:\Omega\to\mathbb{C}$ με τύπο

$$g(w)=\begin{cases} \dfrac{f(w)-f(z)}{w-z}, & w\neq z \\[2ex] f'(z) & w=z \end{cases}$$

→ Η g είναι ολόμορφη στο $\Omega\setminus\{z\}$ (ως πηλίκο ολόμορφων συναρτήσεων με παρανομαστή $\neq 0$)

→ Η g είναι συνεχής στο z διότι $\lim\limits_{w\to z} g(w)=g(z) \Leftrightarrow \lim\limits_{w\to z}\dfrac{f(w)-f(z)}{w-z}=f'(z)$
το οποίο ισχύει γιατί η f είναι παραγωγίσιμη στο z (αφού είναι ολόμορφη)

Τότε επειδή $D(z_0,r)\subset\Omega$ πληρούνται οι προϋποθέσεις για το πόρισμα του Θεωρήματος Cauchy, δηλαδή $\displaystyle\int_{C(z_0,r)} g(w)\,dw=0$



$$\Leftrightarrow \int_{C(z_0,r)} \frac{f(w)-f(z)}{w-z}\,dw=0$$

$$\Leftrightarrow \int_{C(z_0,r)} \frac{f(w)}{w-z}\,dw - f(z)\underbrace{\int_{C(z_0,r)} \frac{dw}{w-z}}_{2\pi i}=0$$

Θεώρημα (Ολοκληρωτικός τύπος του Cauchy για παραγώγους)
Έστω Ω τόπος και $z\in D(z_0,r)\subset\Omega$ και $f:\Omega\to\mathbb{C}$ ολόμορφη τότε η f είναι n φορές παραγωγίσιμη ($n\in\mathbb{N}$) και μάλιστα

$$\boxed{f^{n}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\int_{C(z_0,r)}\frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}}\,dw \quad \forall n\in\mathbb{N}}$$

Απόδειξη (με επαγωγή)

→Δηλαδή θα αποδείξουμε ότι ισχύει για $n=1$.

Δηλαδή η f είναι παραγωγίσιμη και ισχύει

$$f'(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C(z_0,r)}\frac{f(w)}{(w-z)^2}\,dw$$

$$f'(z)=\lim_{h\to 0}\frac{f(z+h)-f(z)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[\frac{1}{2\pi i}\int_{C(z_0,r)}\frac{f(w)}{w-(z+h)}\,dw-\frac{1}{2\pi i}\int_{C(z_0,r)}\frac{f(w)}{w-z}\,dw\right]$$

$|h|<r-|z-z_0| \Rightarrow z+h\in D(z_0,r)$ διότι $|z+h-z_0|=|z-z_0+h|\leq|z-z_0|+|h|$

$$<|z-z_0|+r-|z-z_0|=r$$

Περιμένουμε $f'(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C(z_0,r)}\frac{f(w)}{(w-z)^2}\,dw$

οπότε έχουμε

$$\frac{1}{h}\left[\frac{1}{2\pi i}\int_{C(z_0,r)}\frac{f(w)}{w-(z+h)}\,dw-\frac{1}{2\pi i}\int_{C(z_0,r)}\frac{f(w)}{w-z}\,dw\right]-\frac{1}{2\pi i}\int_{C(z_0,r)}\frac{f(w)}{(w-z)^2}\,dw$$

$$\frac{1}{h}\frac{1}{2\pi i}\int_{C(z_0,r)}f(w)\left[\frac{1}{w-(z+h)}-\frac{1}{w-z}-\frac{h}{(w-z)^2}\right]dw$$

$$\frac{1}{w-(z+h)}-\frac{1}{w-z}-\frac{h}{(w-z)^2}=\frac{(w-z)^2-(w-z)(w-(z+h))-h(w-(z+h))}{(w-z)^2(w-(z+h))}$$

$$=\frac{w^2-2wz+z^2-(w^2-wz-hw-wz+z^2+zh)-wh+hz+h^2}{(w-z)^2(w-(z+h))}$$

$$=\frac{h^2}{(w-z)^2(w-(z+h))}$$

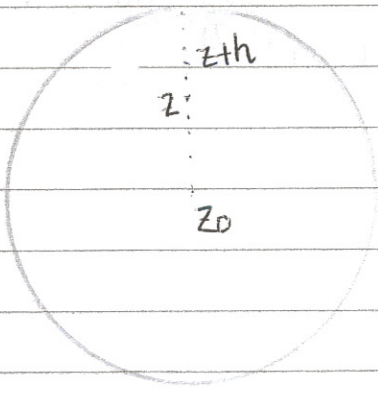
$$\frac{1}{h}\left(\frac{1}{w-(z+h)}-\frac{1}{w-z}-\frac{h}{(w-z)^2}\right)=\frac{h}{(w-z)^2(w-(z+h))}$$

$|w-z|\geq r-|z-z_0|$

$|w-(z+h)|=|w-z-h|\geq|w-z|-|h|$

$$\geq r-|z-z_0|-\frac{r-|z-z_0|}{2}$$

$$=\frac{r-|z-z_0|}{2}$$



$2|h|<r-|z-z_0|$

Και επομένως

$$\left|\frac{1}{h}\frac{1}{2\pi i}\int_{C(z_0,r)} f(\omega)\left[\frac{1}{\omega-(z+h)}-\frac{1}{\omega-z}-\frac{h}{(\omega-z)^2}\right]d\omega\right|$$

$$\leq \frac{1}{2\pi|h|}\,2\pi r \max_{|\omega-z_0|=r}\frac{|f(\omega)|\cdot|h|^2}{|\omega-z|^2|\omega-(z+h)|}$$

$$\leq |h|\,r\,\frac{2\max|f(\omega)|}{(r-|z-z_0|)^3}$$

Άρα $\lim \_\_\_\_ = 0$

Υποθέτουμε ότι ισχύει για $n=k$

Δηλαδή $f^{(k)}(z)=\frac{k!}{2\pi i}\int_{C(z_0,r)}\frac{f(\omega)}{(\omega-z)^{k+1}}d\omega$

και θα αποδείξουμε ότι η f είναι $(k+1)$ φορές παραγωγίσιμη

και μάλιστα $f^{(k+1)}(z)=\frac{(k+1)!}{2\pi i}\int_{C(z_0,r)}\frac{f(\omega)}{(\omega-z)^{k+2}}d\omega$.

Όμως $f^{(k+1)}(z)=\lim_{h\to 0}\frac{f^{(k)}(z+h)-f^{(k)}(z)}{h}$

$$=\lim_{h\to 0}\underbrace{\left[\frac{\frac{k!}{2\pi i}\int_{C(z_0,r)}\frac{f(\omega)}{(\omega-(z+h))^{k+1}}d\omega-\frac{k!}{2\pi i}\int_{C(z_0,r)}\frac{f(\omega)}{(\omega-z)^{k+1}}d\omega}{h}-\frac{(k+1)!}{2\pi i}\int_{C(z_0,r)}\frac{f(\omega)}{(\omega-z)^{k+2}}d\omega+\frac{(k+1)!}{2\pi i}\int_{C(z_0,r)}\frac{f(\omega)}{(\omega-z)^{k+2}}d\omega\right]}_{A}$$

Οπότε προκύπτει.

$$\frac{1}{|h|}\left|\int_{C(z_0,r)} f(\omega)\left(\frac{1}{(\omega-(z+h))^{k+1}}-\frac{1}{(\omega-z)^{k+1}}-\frac{(k+1)h}{(\omega-z)^{k+2}}\right)d\omega\right|$$

$$\leq C_n\cdot|h|\cdot\max_{|\omega-z_0|=r}|f(\omega)|\,\frac{1}{\left(\frac{r-|z-z_0|}{2}\right)^{k+2}}$$

Άρα $\lim_{h\to 0} A=\frac{(k+1)!}{2\pi i}\int_{C(z_0,r)}\frac{f(\omega)}{(\omega-z)^{k+2}}d\omega$

• f ολόμορφη στο Ω $D(z_0,r)\subseteq \Omega$

$\Rightarrow$ f άπειρες φορές παραγωγίσιμη, $z\in D(z_0,r)$

$$f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\int_{C(z_0,r)}\frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}}\,dw$$

Cauchy f ολόμορφη $\int_\gamma f(w)dw=0$

Θεώρημα (Morera)

Έστω Ω τόπος, $f:\Omega\to\mathbb{C}$ συνεχής με την ιδιότητα $\forall \Delta\subseteq\Omega$

$\int_{\partial\Delta} f(w)dw=0$ τότε η f είναι ολόμορφη

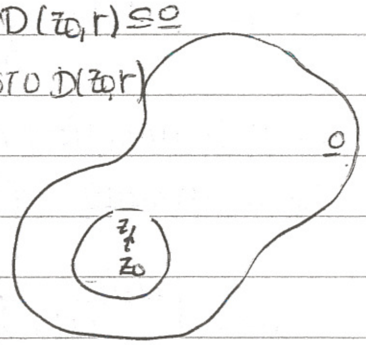
Απόδειξη:

Έστω $z_0\in\Omega$ και επειδή είναι ανοιχτό $\exists r>0: D(z_0,r)\subseteq\Omega$

Θα αποδείξουμε ότι η f είναι ολόμορφη στο $D(z_0,r)$

Για $z\in D(z_0,r)$ ορίζουμε:

$$F(z):=\int_{[z_0,z]} f(w)\,dw,\quad z\in D(z_0,r)$$



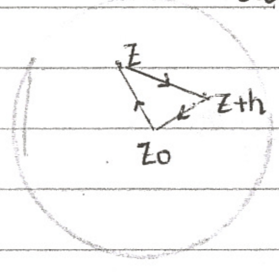
Θα αποδείξουμε ότι η F είναι ολόμορφη

και μάλιστα $F'(z)=f(z)$, $z\in D(z_0,r)$, $h\neq 0$ $(|h|<r-|z-z_0|)$

$$\frac{F(z+h)-F(z)}{h}-f(z)=\frac{1}{h}\left[\int_{[z_0,z+h]} f(w)dw-\int_{[z_0,z]} f(w)dw-hf(z)\right]$$

Αν εφαρμόσω την υπόθεση του θεωρήματος

$$\int_T f(w)dw=0 \Leftrightarrow \int_{[z_0,z]} f(w)dw+\int_{[z,z+h]} f(w)dw-\int_{[z_0,z+h]} f(w)dw=0$$



$$\Leftrightarrow \int_{[z_0,z_0+h]} f(w)dw-\int_{[z_0,z]} f(w)dw=\int_{[z,z+h]} f(w)dw$$

$\int_{[z,z+h]} f(z)dw$ $\qquad$ $\int_{[z,z+h]} dw=h.$

$$\text{Οπότε}\quad \frac{F(z+h)-F(z)}{h}-f(z)=\frac{1}{h}\left[\int_{[z,z+h]} f(w)dw-hf(z)\right]$$

$$=\frac{1}{h}\int_{[z,z+h]}(f(w)-f(z))\,dw.$$

$$\left|\frac{F(z+h)-F(z)}{h}-f(z)\right| = \frac{1}{|h|}\left|\int_{[z,\,z+h]}(f(w)-f(z))dw\right|$$

$$\leq \frac{|h|}{|h|}\max_{w\in[z,\,z+h]}|f(w)-f(z)|$$ $\{|w-z|\leq|h|\}$

$$\leq \max_{|w-z|\leq|h|}|f(w)-f(z)|\leq\varepsilon$$

Η f είναι συνεχής στο z

Άρα $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0$: $|w-z|<\delta \Rightarrow |f(w)-f(z)|<\varepsilon$

οπότε $\exists\delta>0$: $0<|h|<\delta$

$$\left|\frac{F(z+h)-F(z)}{h}-f(z)\right|\leq\varepsilon$$

<u>Πόρισμα:</u>

Έστω Ω τόπος, $z_0\in\Omega$, $f:\Omega\to\mathbb{C}$ είναι τέτοια ώστε η f είναι ολόμορφη στο $\Omega\setminus\{z_0\}$, και είναι συνεχής στο z_0

Τότε η f είναι ολόμορφη στο Ω.

<u>Απόδειξη:</u>

Εφαρμόζεται το θεώρημα Cauchy

Δηλαδή $\int_{\partial\Delta} f(w)dw=0$

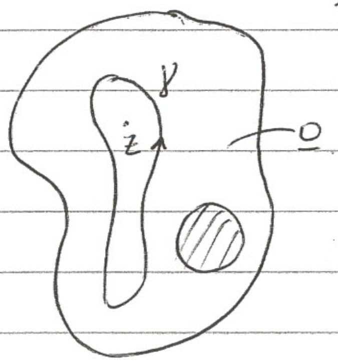
Θεώρημα Morera τότε η f είναι ολόμορφη στο Ω

και άρα και στο z_0

6

Θεώρημα (Γενικευμένος ολοκληρωτικός τύπος του Cauchy)
Έστω Ω τόπος, $f:\Omega\to\mathbb{C}$ ολόμορφη, γ απλή κλειστή κατά τμήματα C^1 καμπύλη (δηλαδή μονοπάτι) με θετικό προσανατολισμό με το εσωτερικό της γ στο Ω. Αν z στο εσωτερικό της γ

Τότε $f(z)=\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}\,dw$

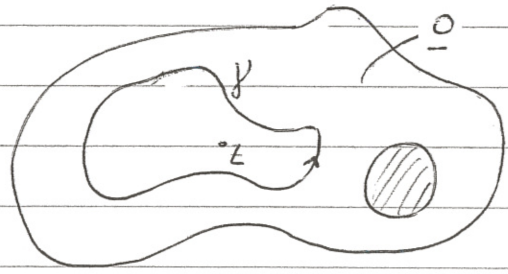


Μιγαδική Ανάλυση 9/11/2017

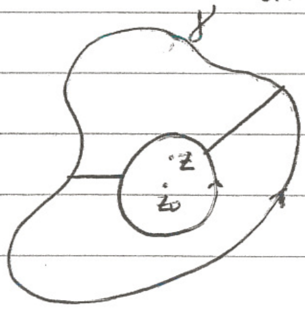
Θεώρημα (Γενικευμένος Ολοκληρωτικός τύπος του Cauchy)

Έστω Ω τόπος (ανοικτό και συνεκτικό) και $f:\Omega\to\mathbb{C}$ ολόμορφη $\gamma:[a,b]\to\Omega$ κλειστή, με το εσωτερικό της γ στο Ω επίσης (κατά τμήματα C^1), απλή με θετικό προσανατολισμό και z στο εσωτερικό της γ τότε

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}\,dw$$



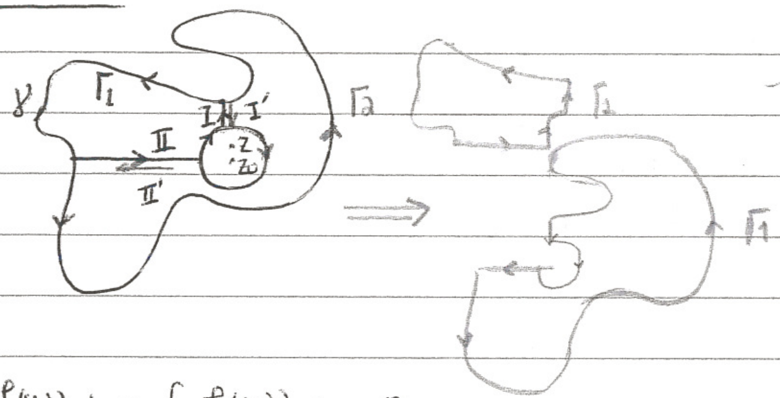
(Επίσης $f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}}\,dw$)



$z\in C(z_0,r)\subset$ εσωτερικό της γ

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C(z_0,r)} \frac{f(w)}{w-z}\,dw.$$

Απόδειξη:

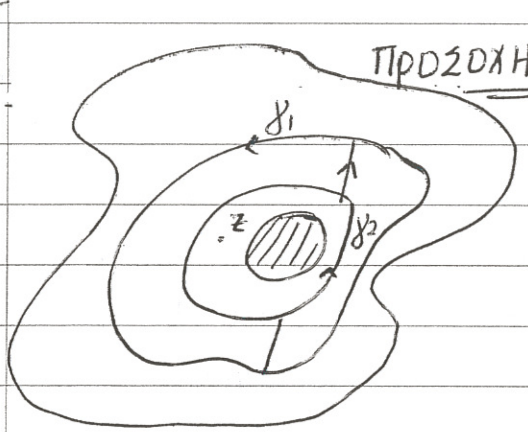


$$\int_{\Gamma_1}\frac{f(w)}{w-z}\,dw+\int_{\Gamma_2}\frac{f(w)}{w-z}\,dw=0$$

$$\Longleftrightarrow \int_{\gamma_1}\frac{f(w)}{w-z}\,dw+\int_{C_1}\frac{f(w)}{w-z}\,dw+\int_{I}\frac{f(w)}{w-z}\,dw+\int_{II}\frac{f(w)}{w-z}\,dw+\int_{\gamma_2}\frac{f(w)}{w-z}\,dw+\int_{C_2}\frac{f(w)}{w-z}\,dw+$$

$$+\int_{I'}\frac{f(w)}{w-z}\,dw+\int_{II'}\frac{f(w)}{w-z}\,dw=0$$

$$\int_\gamma\frac{f(w)}{w-z}\,dw-\int_{C(z_0,r)}\frac{f(w)}{w-z}\,dw=0$$



ΠΡΟΣΟΧΗ ! $\Longrightarrow$ $\cancel{f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_2} \frac{f(\omega)}{\omega - z}\,d\omega}$

$$\int_{\gamma_1} \frac{f(\omega)}{\omega - z}\,d\omega = \int_{\gamma_2} \frac{f(\omega)}{\omega - z}\,d\omega$$

<u>Θεώρημα (Ανάπτυγμα Taylor)</u>

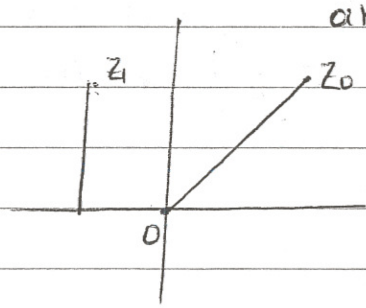
Έστω Ω τόπος, $f : \Omega \to \mathbb{C}$ ολόμορφη, $D(z_0, r) \subset \Omega$, $C(z_0, r) \subset \Omega$

τότε $\forall z \in D(z_0, r)$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n \quad \forall z \in D(z_0, r)$$

- $\log z : \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0] \to \mathbb{C}$ ολόμορφη

  $(\log z)' = \frac{1}{z}$



<u>Φυλλάδιο 3:</u>

SOS $\Rightarrow$ 5) Έστω Ω τόπος $\subseteq \mathbb{C}$ $f : \Omega \to \mathbb{C}$ συνεχής

Επιπρόσθετα ικανοποιεί $f^2(z) = e^z \; \forall z \in \Omega$

$\Longrightarrow$ f είναι παραγωγίσιμη στο Ω

<u>Πρόχειρο:</u> $\omega \in \Omega$ $\exists \varepsilon > 0 : D(\omega, \varepsilon) \subset \Omega$

$$\frac{(f(z) - f(\omega))}{z - \omega}(f(z) + f(\omega)) = \frac{e^z - e^\omega}{z - \omega}$$

$$? \lim_{z \to \omega} \frac{f(z) - f(\omega)}{z - \omega}$$

$$\left.\begin{array}{l} f^2(z) = e^z \\ f^2(\omega) = e^\omega \end{array}\right\} f^2(z) - f^2(\omega) = e^z - e^\omega$$

$$\frac{\frac{e^z - e^\omega}{z - \omega}}{f(z) + f(\omega)} = \frac{f(z) - f(\omega)}{z - \omega} \qquad \lim_{z \to \omega} \frac{\frac{e^z - e^\omega}{z - \omega}}{f(z) + f(\omega)} = \frac{\lim_{z \to \omega} \frac{e^z - e^\omega}{z - \omega}}{\lim_{z \to \omega}(f(z) + f(\omega))} = \frac{e^\omega}{2f(\omega)}$$

Λύση: Παρατηρούμε αρχικά ότι η $f(\omega)\neq 0$ $\forall \omega\in\Omega$

Διότι αν $\exists \omega\in\Omega$: $f(\omega)=0 \Rightarrow e^{\omega}=0$ αδύνατο)

Λόγω συνέχειας της f στο ω θα έχουμε $\lim_{z\to\omega}(f(z)+f(\omega))=2f(\omega)\neq 0$

οπότε $\exists$ δ(μικρό)>0 : $|z-\omega|<\delta$ $D(\omega,\delta)\subset\Omega$, $f(z)+f(\omega)\neq 0$

Τότε έχουμε $|z-\omega|<\delta$

$$\frac{(f(z)-f(\omega))}{z-\omega}=\frac{\frac{e^z-e^{\omega}}{z-\omega}}{f(z)+f(\omega)}$$

$$\lim_{z\to\omega}\frac{e^z-e^{\omega}}{z-\omega}=e^{\omega} \quad (e^z \text{ παραγωγίσιμη})$$

Οπότε $\exists \lim_{z\to\omega}\frac{f(z)-f(\omega)}{z-\omega}=\frac{e^{\omega}}{2f(\omega)}$

σύνηθες

f,g $f(g(z))=h(z)$

Γνωρίζω η h παραγωγίσιμη f παραγωγίσιμη, g συνεχής

$\left.\begin{matrix} f(g(z))=h(z) \\ f(g(\omega))=h(\omega)\end{matrix}\right\} \Rightarrow \frac{f(g(z))-f(g(\omega))}{z-\omega}=\frac{h(z)-h(\omega)}{z-\omega}$

$$\frac{f(g(z))-f(g(\omega))}{g(z)-g(\omega)}\cdot\frac{g(z)-g(\omega)}{z-\omega}=\frac{h(z)-h(\omega)}{z-\omega}$$

i) $f'(g(z))\neq 0$ $\quad f(g(z))=h(z)$, $z\in\Omega$, $f:\Omega\to g(\Omega)$

ii) Η g τοπικά να είναι 1-1

$\forall \omega\in\Omega$ $\exists$ δ>0: $g|_{B(\omega,\delta)}$ να είναι 1-1

$\Rightarrow$ Η g παραγωγίσιμη και $g'(z)=\frac{h'(z)}{f'(g(z))}$, $z\in\Omega$

Φυλλάδιο 4.

5) $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ ολόμορφη $f(z+\omega)=f(z)f(\omega)$, $\forall z,\omega\in\mathbb{C}$

$f(x)=e^x$, $x\in\mathbb{R}$

$\Rightarrow f(z)=e^z$

$z=x+yi$, $x,y\in\mathbb{R}$

$f(z)=f(x+yi)=f(x)f(iy)$

$=e^x\cdot f(iy)$

$=e^x[A(y)+iB(y)]$

$f(z)=e^xA(y)+ie^xB(y)$

Ισχύουν οι συνθήκες Cauchy-Riemann

$z=x+yi$, $x,y\in\mathbb{R}$

$g(z)=u(x,y)+iv(x,y)$

$\overline{g(z)}=u(x,y)-iv(x,y)$

$u(x,y)=\frac{g(z)+\overline{g(z)}}{2}$

$$\left.\begin{array}{l} f(z)=u(x,y)+iv(x,y) \\ \exists u_x, u_y, v_x, v_y \text{ και } u_x=v_y,\ u_y=-v_x \end{array}\right)$$

$\Longrightarrow u(x,y)=e^x A(y)$

$v(x,y)=e^x \cdot B(y)$

Η ύπαρξη των μερικών παραγώγων $\exists u_y \Rightarrow A$ παραγωγίσιμη

$\exists v_y \Rightarrow B$ παραγωγίσιμη

Απο συνθήκες Cauchy-Riemann

$$\left.\begin{array}{l} u_x=v_y \Leftrightarrow e^x A(y)=e^x B'(y) \\ u_y=-v_x \Leftrightarrow e^x A'(y)=-e^x B(y) \end{array}\right\} \Leftrightarrow \begin{array}{l} B'(y)=A(y) \\ A'(y)=-B(y) \end{array} \quad ,\ y\in\mathbb{R}$$

Επειδή $B'(y)=A(y)$ και A παραγωγίσιμη

$\Rightarrow B'$ παραγωγίσιμη $\Rightarrow B$ παραγωγίσιμη

$\Rightarrow B''(y)=A'(y)=-B(y)$

$\Rightarrow B''(y)+B(y)=0$

$\exists c_1, c_2 \in\mathbb{R}: B(y)=c_1\cos y+c_2\sin y$

$A(y)=-c_1\sin y+c_2\cos y$

$B(y)=c_1\cos y+c_2\sin y$

$u(x,y)=e^x A(y) \overset{y=0}{\Longrightarrow} u(x,y)=e^x A(0)$

$v(x,y)=e^x \cdot B(y) \overset{y=0}{\Longrightarrow} v(x,y)=e^x B(0)$

$f(z)=e^x A(y)+e^x B(y) i$

$\underline{y=0} \Rightarrow f(x)=e^x A(0)+e^x B(0)\cdot i=e^x$

$A(0)=1$ και $B(0)=0$

$B(0)=0 \Rightarrow c_1=0$

$A(0)=1 \Rightarrow c_2=1$

Άρα $A(y)=\cos y$

$B(y)=\sin y$

$f(z)=e^x(\cos y+i\sin y)=e^z$

Μιγαδική Ανάλυση

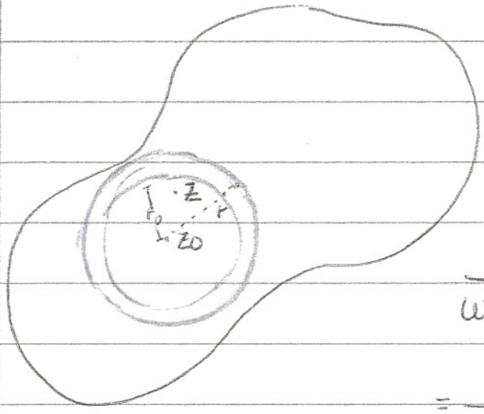
14/11/2017

Θεώρημα Taylor

Έστω Ω τόπος, $f:\Omega\to\mathbb{C}$ ολόμορφη και $D(z_0,r)\subset\Omega$

Τότε $f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$, $\forall z\in D(z_0,r)$

Απόδειξη:



Επιλέγουμε $r_0<r$ τότε $|z-z_0|<r_0$

Τότε το θεώρημα Cauchy

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C(z_0,r_0)}\frac{f(w)}{w-z}\,dw$$

$$\frac{1}{w-z}=\frac{1}{w-z_0+z_0-z}=\frac{1}{(w-z_0)-(z-z_0)}$$

$$=\frac{1}{(w-z_0)\left(1-\frac{z-z_0}{w-z_0}\right)}=\frac{1}{w-z_0}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{z-z_0}{w-z_0}\right)^n \quad \left|\frac{z-z_0}{w-z_0}\right|<1$$

$|w-z_0|=r_0$

$|z-z_0|<r_0$

$$\frac{1}{w-z}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(z-z_0)^n}{(w-z_0)^{n+1}}$$ ομοιόμορφη σύγκλιση, $|w-z_0|=r_0$, $|z-z_0|<r_0$

Επομένως $\frac{1}{2\pi i}\int_{C(z_0,r_0)}\frac{f(w)}{w-z}\,dw=\frac{1}{2\pi i}\int_{C(z_0,r_0)}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{f(w)(z-z_0)^n}{(w-z_0)^{n+1}}\,dw$

$$=\frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{+\infty}\int_{C(z_0,r_0)}\frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}\,dw\,(z-z_0)^n$$

Όμως το θεώρημα Cauchy μας δίνει ότι:

$$f^{(n)}(z_0)=\frac{n!}{2\pi i}\int_{C(z_0,r_0)}\frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}$$

$$\Rightarrow f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$$

Παράδειγμα:

- $e^z=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{n!}$, $z\in\mathbb{C}$

$$f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$$

$$\boxed{e^z=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{e^{z_0}}{n!}(z-z_0)^n}$$

$$(e^z)^{(n)}\Big|_{z=z_0}=e^{z_0}$$

- $e^{ix} = \cos x + i\sin x \quad , x \in \mathbb{R}$

$e^{iz} = \cos z + i\sin z$

$e^{-iz} = \cos(-z) + i\sin(-z) = \cos z - i\sin z$

$\cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz})$

$\sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz})$

- $\boxed{\sin z = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!}}$

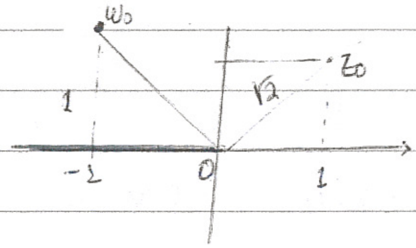
- $\boxed{\cos z = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n} \frac{z^{2n}}{(2n)!}}$

$\cosh z = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2} \qquad e^{z} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$

$\sinh z = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2} \qquad e^{-z} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-z)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n z^n}{n!}$

Επομένως $\frac{e^{z} + e^{-z}}{2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1+(-1)^n}{2n!} z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}$

$\boxed{\cosh z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}}$ Αντίστοιχα και το $\sinh z$



- $\log z, \; z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$

$f(z) = \log z$

$f'(z) = \frac{1}{z}$

$f''(z) = -\frac{1}{z^2}$

$f'''(z) = \frac{2}{z^3}$

$\boxed{f^{(n)}(z) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{z^n} \; , n \in \mathbb{N}}$

$f(z) = f(z_0) + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$

$= \log z_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{n! \, z_0^{\,n}} (z - z_0)^n$

$= \log z_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \left(\frac{z - z_0}{z_0}\right)^n$

$z_0 = |z| e^{i\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2} \cdot e^{i\frac{\pi}{4}}$ $\qquad \left|\frac{z-z_0}{z_0}\right| < 1 \Leftrightarrow |z-z_0| < |z_0| = \sqrt{2}$

$\log z_0 = \log\sqrt{2} + i\frac{\pi}{4} = \frac{\log 2}{2} + i\frac{\pi}{4}$

Επομένως, $\boxed{f(z) = \frac{\log 2}{2} + i\frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}\left(\frac{z-z_0}{z_0}\right)^n, \ |z-z_0| < \sqrt{2}}$

$f(z) = f(w_0) + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(w_0)}{n!}(z-w_0)^n$

$w_0 = -1+i = \sqrt{2}\, e^{i\frac{3\pi}{4}}$

$\log w_0 = \frac{\log 2}{2} + i\frac{3\pi}{4}$

Άρα $f(z) = \frac{\log 2}{2} + i\frac{3\pi}{4} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}\left(\frac{z-w_0}{w_0}\right)^n, \ |z-w_0| < 1$

<u>Ρίζες ολόμορφων συναρτήσεων</u>

$f: \Omega \to \mathbb{C}$ Ω τόπος, f ολόμορφη

$\forall z_0 \in \Omega \ \exists r > 0 : D(z_0, r) \subset \Omega$ (ανοικτό)

$\Rightarrow f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$

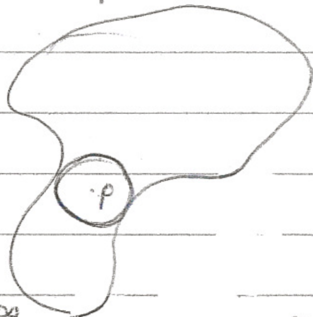
Αν $p \in \Omega$ ρίζα της f τότε $\exists m \in \mathbb{N}$ ώστε $f(p) = \ldots = f^{(m-1)}(p) = 0$, $f^{(m)}(p) \neq 0$.

m είναι η πολλαπλότητα της p

→ Θα μπορούσαν $f^{(n)}(p) = 0, \ \forall n \in \mathbb{N}$?

$\Rightarrow f(z) = 0 \quad |z-p| < r$

Θα αποδείξουμε ότι $f(z) = 0 \ \forall z \in \Omega$



Γράφοντας με χρήση Taylor $f(z) = \sum_{n=m}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(p)}{n!}(z-p)^n$

$= (z-p)^m \sum_{n=m}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(p)}{n!}(z-p)^{n-m}$

$f(z) = (z-p)^m \cdot \Pi(z)$, $\Pi(p) \neq 0$

γιατί $\Pi(p) = \frac{f^{(m)}(p)}{m!}$

$n-m=t \Rightarrow n=m+t$

$$\sum_{n=m}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(p)}{n!}(z-p)^{n-m} = \sum_{t=0}^{+\infty} \frac{f^{(m+t)}(p)}{(m+t)!}(z-p)^{t}$$

$$= \frac{f^{(m)}(p)}{m!} + \sum_{t=1}^{+\infty} \frac{f^{(m+t)}(p)}{(m+t)!}(z-p)^{t}$$

Κανόνας L'Hospital

Έστω $z_0 \in \Omega$ τόπος, $f,g: \Omega \to \mathbb{C}$ ολόμορφες και g (όχι η ταυτοτικά μηδέν συνάρτηση) τότε

$$f(z_0) = \dots = f^{(n-1)}(z_0) = 0,$$

$$g(z_0) = \dots = g^{(n-1)}(z_0) = 0,\ g^{(n)}(z_0) \neq 0$$

Τότε $\lim\limits_{z \to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \lim\limits_{z \to z_0} \frac{f'(z)}{g'(z)} = \dots = \lim\limits_{z \to z_0} \frac{f^{(m-1)}(z)}{g^{(m-1)}(z)} = \lim\limits_{z \to z_0} \frac{f^{(m)}(z)}{g^{(m)}(z)} = \frac{f^{(m)}(z_0)}{g^{(m)}(z_0)}$

Απόδειξη

Γύρω από το z_0 $g(z) = (z-z_0)^{m-1} \cdot \Pi(z)$

$\Pi(z_0) \neq 0$

Από συνέχεια της $\Pi(z)$ στο z_0 έχουμε ότι $\exists r>0$ μικρό: $\Pi(z) \neq 0$ $|z-z_0|<r$

$D(z_0,r) \subset \Omega$

Επομένως η $g(z)$ δεν έχει άλλη ρίζα στο $D(z_0,r)$ εκτός τη z_0

$k \geq m-1$

$f(z) = (z-z_0)^k Q(z)$, με $Q(z_0) \neq 0$, $|z-z_0|<r$, $z \neq z_0$,

Τότε $\frac{f(z)}{g(z)} = \frac{(z-z_0)^k Q(z)}{(z-z_0)^m \Pi(z)} = (z-z_0)^{k-m} \frac{Q(z)}{\Pi(z)}$

$$\Rightarrow \lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f^{(n)}(z_0)}{g^{(n)}(z_0)}$$

Πρόταση Εκτιμήσεις Cauchy

Αν $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ είναι ολόμορφη θα τη λέμε ακέραια

Έστω f ακέραιη τότε ισχύουν οι εκτιμήσεις:

- $|f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{n!}{R^n} \max\limits_{t \in [0,2\pi]} |f(z_0+Re^{it})|$, $|z-z_0|<R$

(Ισχύει και για $f: \Omega \to \mathbb{C}$ ολόμορφη, $D(z_0,R) \subset \Omega$ όχι απαραίτητα f ακέραιη)

<u>Απόδειξη:</u> Ολοκληρωτικό τύπος Cauchy για τη n-οστή παράγωγο.

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_{C(z_0,R)} \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}}\,dw \quad |z-z_0|<R$$

$$|f^{(n)}(z_0)| = \frac{n!}{2\pi}\left|\int_{C(z_0,R)} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}\,dw\right|$$

$$= \frac{n!}{2\pi}\left|\int_0^{2\pi} \frac{f(z_0+Re^{it})}{(Re^{it})^{n+1}}\, iRe^{it}dt\right|$$

$$\leq \frac{n!}{2\pi R^n}\int_0^{2\pi}|f(z_0+Re^{it})|dt$$

$$\leq \frac{n!}{R^n}\max_{t\in[0,2\pi]}|f(z_0+Re^{it})|$$

<u>Θεώρημα Liouville</u>

Έστω f ακέραιη, φραγμένη. Τότε η f είναι σταθερή

<u>Απόδειξη:</u>

Έστω M $|f(z)|\leq M$ $\forall z\in\mathbb{C}$

Από τις εκτιμήσεις Cauchy έχουμε:

$|f^{(n)}(0)| \leq \frac{n!}{R^n}M$, $D(0,R)\subset\mathbb{C}$, $n\in\mathbb{N}$

αφήνοντας το R στο άπειρο

$\Rightarrow |f^{(n)}(0)| \leq \lim_{R\to+\infty}\frac{n!M}{R^n} = 0$, $f^{(n)}(0)=0$ $\forall n\in\mathbb{N}$

$\Rightarrow f(z) = f(0)$ $\forall z\in\mathbb{C}$

<u>Πρόταση:</u> κάθε πολυώνυμο με μιγαδικούς συντελεστές έχει (μιγαδικές) ρίζες.

<u>Απόδειξη:</u>

Έστω $Q(z) = \sum_{m=0}^{N} a_m z^m$, $a_N\neq 0$

που δεν έχει μιγαδικές ρίζες $Q(z)\neq 0$, $\forall z\in\mathbb{C}$

$\Rightarrow \frac{1}{Q(z)}$ ολόμορφη στο $\mathbb{C}$

τότε $\lim_{|z|\to+\infty}\frac{1}{Q(z)} = 0 \Rightarrow \frac{1}{Q(z)}$ φραγμένη στο $\mathbb{C} \Rightarrow \frac{1}{Q(z)} = c \Rightarrow Q$ σταθερή

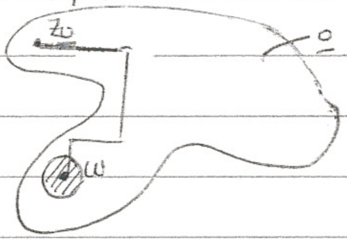
Μιγαδική Ανάλυση

16/11/2017

Θεώρημα: Ταυτοποίηση

Έστω Ω τόπος, $\omega\in\Omega$, $\exists\varepsilon>0$ $B(\omega,\varepsilon)\subset\Omega$, $f:\Omega\to\mathbb{C}$ ολόμορφη
και $f(z)=0$, $z\in B(\omega,\varepsilon)$

$\Rightarrow f(z)=0$, $z\in\Omega$



Απόδειξη:

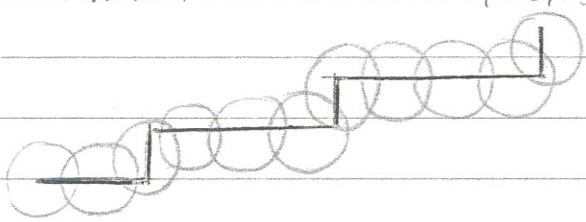
Έστω $z_1\in\Omega \Rightarrow$
$\exists$ πολυγωνική γραμμή Γ που
περιέχεται στο Ω που ενώνει το ω με το z_1 (Ω ανοικτό, συνεκτικό)

$\forall z\in\Gamma\subset\Omega$, $\exists\varepsilon_z>0$: $D(z,\varepsilon_z)\subset\Omega$

$\Rightarrow \Gamma\subset\bigcup_{z\in\Gamma}D(z,\varepsilon_z)$ όμως το Γ είναι συμπαγές (κλειστό και φραγμένο)

$\exists$ πεπερασμένο υποκάλυμμα, δηλαδή $\exists N\in\mathbb{N}$: $\omega_1,\omega_2,\dots,\omega_N\in\Gamma$

$\Gamma\subseteq\bigcup_{k=1}^{N}D(\omega_k,\varepsilon_{\omega_k})$



Πρόταση:

Έστω $f:\Omega\to\mathbb{C}$ ολόμορφη, Ω τόπος $\exists(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}}\subset\Omega$ ώστε $f(\rho_n)=0$, $\rho_n\to\rho\in\Omega$
$\rho_n\neq\rho$ $\forall n\in\mathbb{N}$. Τότε $f(z)\equiv0$, $z\in\Omega$

$z_1,\dots,z_m$, $f(z_i)=0$, $i=1,2,\dots,m$ (από πεπερασμένο το πλήθος ρίζες δεν μπορώ
$f(z)=(z-z_1)^{n_1}(z-z_2)^{n_2}\dots(z-z_m)^{n_m}\Pi(z)$ να οδηγηθώ στην αναγνώριση της f)

Απόδειξη:

1η) Αν $f^{(n)}(\rho)=0$ $\forall n=1,2,\dots$

$\Longrightarrow f(\rho_n)=0\Rightarrow 0=\lim_{n\to+\infty}f(\rho_n)\xrightarrow[\text{στο }\rho]{f\text{ συνεχής}}f(\lim_{n\to+\infty}\rho_n)=f(\rho)\Rightarrow f(\rho)=0$

$\Rightarrow f(z)=0$, $|z-\rho|<\varepsilon$

$\Rightarrow f(z)\equiv0$, $z\in\Omega$

2η) Έστω πως $\exists m\in\mathbb{N}$, ώστε $f^{(m)}(\rho)\neq0$, τότε $\exists m_1\in\mathbb{N}$ ο μικρότερος δυνατός
με την ιδιότητα $f^{(m_1)}(\rho)\neq0\Rightarrow f^{(m)}(\rho)=0$ $\forall m<m_1$

Επειδή το ρ είναι σημείο ολομορφίας $\xRightarrow{\text{Taylor}}$ $\exists\varepsilon>0$: $f(z)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{f^{(k)}(\rho)}{k!}(z-\rho)^k=$

$$= \sum_{k=m_1}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(\rho)}{k!}(z-\rho)^k = (z-\rho)^{m_1} \sum_{k=m_1}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(\rho)}{k!}(z-\rho)^{k-m_1}$$

Όμως επειδή $\lim_{n\to+\infty} \rho_n = \rho \Rightarrow \exists N_1 : n \geq N_1, \rho_n \in D(\rho,\varepsilon)$
οπότε $n \geq N_1$

$$f(\rho_n) = (\rho_n-\rho)^{m_1} \sum_{k=m_1}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(\rho)}{k!}(\rho_n-\rho)^{k-m_1} \quad n \geq N_1$$

$$\sum_{k=m_1}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(\rho)}{k!}(\rho_n-\rho)^{k-m_1} = 0 \quad , n \geq N_1$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sum_{k=m_1}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(\rho)}{k!}(\rho_n-\rho)^{k-m_1} = \frac{f^{(m_1)}(\rho)}{m_1!} = 0 \quad \text{ΑΤΟΠΟ}$$

Επομένως $f(z) \equiv 0, z \in \Omega$

$f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{n+1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$

$f : D(0,1) \to \mathbb{C}$ ολόμορφη

$\Rightarrow f\left(\frac{1}{n}\right) = 1 + \frac{1}{n} \Rightarrow f(z) = 1 + z$

$g(z) = f(z) - 1 - z$, $z \in D(0,1)$

$g\left(\frac{1}{n}\right) = 0 \Rightarrow g(0) = 0$
από συνέχεια

Φυλλάδιο Ασκήσεων 4

1) Έστω $\Omega \subset \mathbb{C}$ τόπος και $f : \Omega \to \mathbb{C}$ είναι ολόμορφη που έχει επιπρόσθετα την ιδιότητα αν $z \in \Omega$ τότε είτε $f(z) = 0$ είτε $f'(z) = 0$
Αποδείξτε ότι f είναι σταθερή συνάρτηση

Λύση:

Θεωρούμε την $g : \Omega \to \mathbb{C}$, $g(z) = f^2(z)$, $z \in \Omega$
(Η σύνθεση της $h(z) = z^2$ με την f δίνει την $g(z) = (f(z))^2$ είναι ολόμορφη)
και μάλιστα $g'(z) = 2f(z) f'(z) = 0 \; \forall z \in \Omega$

$$\Rightarrow g'(z) = 0 \Rightarrow \exists c \in \mathbb{C} : g(z) \equiv c, \forall z \in \Omega$$

(Άσκηση: f ολόμορφη και Ω τόπος : $f'(z) = 0 \Rightarrow f \equiv$ σταθερή)

$\Rightarrow f^2(z) = c$

$z^{1/2}$ πρωτεύουσα ρίζα του z. (κατ' αντιστοιχία με $\sqrt{x}$, $x \geq 0$ στους πραγματικούς)

$\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$, $z = |z| e^{i \arg z}$, $-\pi < \arg z \leq \pi$

$z^{1/2} := e^{\log z^{1/2}} = e^{\frac{1}{2} \log z}$ ολόμορφη

$\Rightarrow (f^2(z))^{1/2}$

i) $c \notin (-\infty, 0]$ $(f^2(z))^{1/2} = e^{\frac{1}{2}\log(f^2(z))} = e^{\log f(z)} = f(z)$ ολόμορφη (σύνθεση ολόμορφων)

ii) $c \in (-\infty, 0]$ Αλλάζω τον κλάδο λογαρίθμου

Άλλος τρόπος

$f^2(z) = c$, $c \neq 0 \Rightarrow f(z) = \begin{cases} c^{1/2}, & z \in \Omega_1 \\ -c^{1/2}, & z \in \Omega \setminus \Omega_1 \end{cases}$

$\rightarrow$ i) $z \in \Omega_1$, $f(z) = 0 \Rightarrow c = 0$ αποκλείεται

$f'(z) = 0$ ✓

$\rightarrow$ ii) $z \in \Omega \setminus \Omega_1$ μπορεί $f(z) = 0$ όχι $\Rightarrow f'(z) = 0$

$f'(z) = 0$ στο Ω_1 και στο $\Omega \setminus \Omega_1$ άρα και στην ένωση τους δηλαδή στο Ω, ($f'(z) = 0$, $z \in \Omega$)

2) Βρείτε όλες τις ολόμορφες συναρτήσεις $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ που ικανοποιούν $f(x+yi) = x^2 - y^2 + i v(x,y)$, $x, y \in \mathbb{R}$, $v: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

<u>Λύση:</u>

f ολόμορφη $\Rightarrow$ εφαρμόζω συνθήκες Cauchy-Riemann

$u_x = v_y$ $\Leftrightarrow 2x = v_y(x,y) \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial y}(v(x,y) - 2xy) = 0$

$u_y = -v_x$

$\Leftrightarrow v(x,y) - 2xy = A(x)$

$\Leftrightarrow v(x,y) = 2xy + A(x)$

$\Rightarrow v_x = 2y + A'(x)$

$-2y = -2y - A'(x) \Rightarrow A(x) = c$

$v(x,y) = 2xy + c$

$f(\overbrace{x+yi}^{z}) = z^2 + c$

Μιγαδική Ανάλυση

28/11/2017

Φυλλάδιο 6:

3) Έστω $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ολόμορφη και $z \notin C(0,1)$. Αποδείξετε ότι $\int_{C(0,1)} \frac{f(w)}{(w-z)^2}\,dw = \int_{C(0,1)} \frac{f'(w)}{w-z}\,dw$.

Σκέψη: Ολοκληρωτικός τύπος Cauchy

$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}\,dw$ $z \in$ εσωτερικό της γ

$\int_\gamma f(w)\,dw = 0$

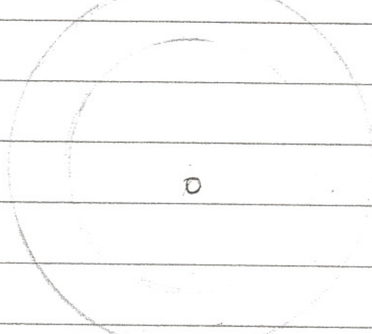
$f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}}\,dw$

Απόδειξη:

Διακρίνουμε 2 περιπτώσεις.

$r>1$

$\Omega = D(0,r)$



α) $z \notin D(0,1) \Rightarrow \frac{1}{w-z}$ ολόμορφη στο $D(0,r)$

για κατάλληλο $r>1$

$\frac{1}{(w-z)^2}$ ολόμορφη στο $D(0,r)$, $r>1$

χωρίς να μηδενίζεται ο παρανομαστής

$\Rightarrow$ πηλίκα ολομόρφων $\frac{f(w)}{(w-z)^2}$, $\frac{f'(w)}{w-z}$, $w \in D(0,r)$ ολόμορφες

$\Rightarrow \int_{C(0,1)} \frac{f(w)}{(w-z)^2}\,dw = 0$

$\int_{C(0,1)} \frac{f'(w)}{w-z}\,dw = 0$

$\Rightarrow \int_{C(0,1)} \frac{f(w)}{(w-z)^2}\,dw = \int_{C(0,1)} \frac{f'(w)}{(w-z)^2}\,dw$

β) $z \in D(0,1)$ η f είναι ολόμορφη οπότε από τους ολοκληρωτικούς τύπους του Cauchy έχουμε:

$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(0,1)} \frac{f(w)}{(w-z)^2}\,dw$, $f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(0,1)} \frac{f'(w)}{w-z}\,dw$

$\Rightarrow \int_{C(0,1)} \frac{f(w)}{(w-z)^2}\,dw = \int_{C(0,1)} \frac{f'(w)}{w-z}\,dw$

4) Έστω $f: C(z_0,r) \to \mathbb{C}$, $r>0$ συνεχής συνάρτηση και ορίζουμε $g: D(z_0,r) \to \mathbb{C}$ $r>0$ με τύπο $g(z)=\int_{C(z_0,r)} \frac{f(w)}{w-z}\,dw$, $z \in D(z_0,r)$.
Αποδείξτε ότι η g
είναι ολόμορφη στο $D(z_0,r)$. Ποια είναι η $g'(z)$;

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C(z_0,r)} \frac{f(w)}{w-z}\,dw$$

$\Downarrow$ αποδείξαμε ότι f ολόμορφη
και ότι

$$f'(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C(z_0,r)} \frac{f(w)}{(w-z)^2}\,dw$$

$$\frac{1}{w-z}=\frac{1}{w-z_0-(z-z_0)}=\frac{1}{(w-z_0)\left(1-\frac{z-z_0}{w-z_0}\right)}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(z-z_0)^n}{(w-z_0)^{n+1}}$$

$$\frac{g(z+h)-g(z)}{z+h-z}=\frac{1}{2\pi i h}\int_{C(z_0,r)}\left(\frac{f(w)}{w-(z+h)}-\frac{f(w)}{w-z}\right)dw \ldots$$ (λεπτομέρειες στην απόδειξη θεωρίας)

$$g'(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C(z_0,r)}\frac{f(w)}{(w-z)^2}\,dw$$

5) Έστω Ω τόπος και $f_n, f: \Omega \to \mathbb{C}$, $n\in\mathbb{N}$ συναρτήσεις ώστε
i) f_n ολόμορφες στο Ω $\forall n\in\mathbb{N}$
ii) $f_n \to f$ ομοιόμορφα στα συμπαγή του Ω.
Αποδείξτε ότι η f είναι ολόμορφη στο Ω.

Απόδειξη: Έστω T τρίγωνο στο Ω. Θα αποδείξουμε ότι $\int_T f(w)\,dw=0$
Από Θεώρημα Morera έχουμε ότι η f είναι ολόμορφη
Επειδή η f_n ολόμορφη $\Rightarrow \int_T f_n(w)\,dw=0$ $\forall n\in\mathbb{N}$

$$\Rightarrow \underbrace{\lim_{n\to\infty}\int_T f_n(w)\,dw}_{=0} \xrightarrow[\text{σύγκλιση}]{\text{ομοιόμορφη}} \int_T \lim_{n\to+\infty} f_n(w)\,dw$$

$$=\int_T f(w)\,dw=0$$ Άρα η f ολόμορφη

(Αποδεικνύω ότι η f συνεχής)

2) Με κατάλληλη χρήση των ολοκληρωτικών τύπων του Cauchy στη συνάρτηση $f(z)=e^z$ αποδείξετε ότι α) $\int_0^{2\pi} e^{e^{it}}dt=2\pi$. και β) $\int_0^{2\pi} e^{e^{it}-it}dt=2\pi$

$$2\pi i f(0)=\int_{C(0,1)}\frac{e^z}{z}dz \Rightarrow 2\pi i=\int_{C(0,1)}\frac{e^z}{z}dz$$

α) $z=e^{it}$: $2\pi \cancel{i}=\int_0^{2\pi}\frac{e^{e^{it}}}{\cancel{e^{it}}}\cancel{i}\cancel{e^{it}}dt=2\pi$.

β) $1=\frac{1}{2\pi i}\int_{C(0,1)}\frac{e^z}{z^2}dz \Rightarrow 2\pi i=\int_0^{2\pi}\frac{e^{e^{it}}}{e^{2it}}\cdot ie^{it}dt$

$$\Rightarrow \int_0^{2\pi} e^{e^{it}-it}dt=2\pi.$$

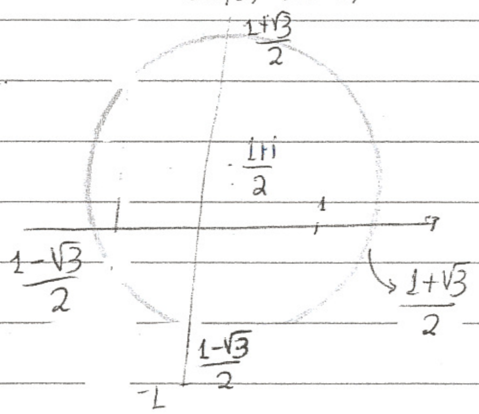
1) Να υπολογίσετε τα επικαμπύλια ολοκληρώματα

α) $\int_{C(0,2)}\frac{\omega^2+\omega}{(\omega-1)^2}d\omega$ β) $\int_{C\left(\frac{1+i}{2},1\right)}\frac{2}{(\omega-1)(\omega^2+1)}d\omega$

α) $(\omega^2+\omega)\Big|_{\omega=1}=\frac{1}{2\pi i}\int_{C(0,2)}\frac{\omega^2+\omega}{(\omega-1)^2}d\omega$

$$3=\frac{1}{2\pi i}\int_{C(0,2)}\frac{\omega^2+\omega}{(\omega-1)^2}d\omega \Rightarrow 6\pi i=\int_{C(0,2)}\frac{\omega^2+\omega}{(\omega-1)^2}d\omega$$

β). $\sqrt{\left(\frac12\right)^2+\left(\frac12\right)^2}=\sqrt{\frac12}=\frac{\sqrt2}{2}<1$.



$(x,y)=x+yi$

$\sqrt{\left(x-\frac12\right)^2+\left(y-\frac12\right)^2}=1$

$\left(x-\frac12\right)^2+\left(y-\frac12\right)^2=1$

$\left(x-\frac12\right)^2=\frac34$, $x=\frac12\pm\frac{\sqrt3}{2}$

α' τρόπος.

$$\frac{2}{(\omega-1)(\omega^2+1)}=\frac{A}{\omega-1}+\frac{B}{\omega-i}+\frac{\Gamma}{\omega+i},\ A,\ B,\Gamma\in\mathbb{C}$$

$$2=A(\omega^2+1)+B(\omega-1)(\omega+i)+\Gamma(\omega-1)(\omega-i)$$
$$=(A+B+\Gamma)\omega^2+(B(i-1)-\Gamma(i+1))\omega+A-iB+i\Gamma$$

$$\left.\begin{array}{l} A+B+\Gamma=0 \\ B(i-1)-\Gamma(i+1)=0 \\ A+(\Gamma-B)i=2 \end{array}\right\} \Longleftrightarrow B=\Gamma\,\frac{1+i}{i-1}=-\frac{(1+i)(1+i)}{(-i-1)(i-1)}=-\Gamma\left(\frac{1+i^2+2i}{2}\right)=-i\cdot\Gamma$$

$$\left.\begin{array}{l} B=-i\Gamma \\ A-i\Gamma+\Gamma=0 \\ A+i(\Gamma+\Gamma i)=2 \end{array}\right| \Longleftrightarrow \begin{array}{l} B=-i\Gamma \\ A=(-1+i)\Gamma \\ A+(i+i^2)\Gamma=2 \Rightarrow A+(i-1)\Gamma=2 \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} A=(-1+i)\Gamma \\ B=-i\Gamma \\ (-1+i)\Gamma+(-i-1)\Gamma=2 \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} B=\frac{(1+i)}{2}i=\frac{i-1}{2} \\ \Gamma=\frac{1}{i+1}=\frac{-(1+i)}{(-1+i)(i+1)}=-\frac{1+i}{2} \end{array}\right.$$

$$A=-\frac{(-1+i)(1+i)}{2}=-\frac{1}{2}(-1-i+i+i^2)=1$$

Επομένως $\frac{2}{(w-1)(w^2+1)}=\frac{1}{w-1}+\frac{\frac{i-1}{2}}{w-i}+\frac{-\frac{1+i}{2}}{w+i}$

$$\int_{C\left(\frac{1+i}{2},1\right)}\frac{2}{(w-1)(w^2+1)}=\int_{C\left(\frac{1+i}{2},1\right)}\frac{dw}{w-1}+\frac{i-1}{2}\int_{C\left(\frac{1+i}{2},1\right)}\frac{dw}{w-i}\cancel{-\frac{1+i}{2}\int_{C\left(\frac{1+i}{2},1\right)}\frac{dw}{w+i}}^{\,0}$$

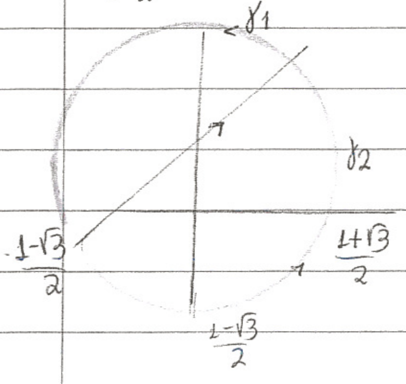
$$=2\pi i+\frac{i-1}{2}\cdot 1\cdot 2\pi i$$

$$=2\pi i\left(1+\frac{i-1}{2}\right)$$

$$=2\pi i\cdot\frac{1+i}{2}=\pi\, i(1+i)=\pi(-1+i)$$

β' τρόπος

$$\int_{C\left(\frac{1+i}{2},1\right)}\frac{2}{(w-1)(w^2+1)}dw=\int_{\gamma_1}\frac{\frac{2}{w^2+1}}{w-1}dw+\int_{\gamma_2}\frac{2}{(w-1)(w-i)(w+i)}dw$$



$$=2\pi i\,\frac{2}{1^2+1}+\int_{\gamma_2}\frac{\frac{2}{(w-1)(w+i)}}{w-i}dw$$

$$=2\pi i+2\pi i\,\frac{2}{(i-1)(2+i)}\ \ldots$$

Φυλλάδιο 7.

1) Έστω $f,g: D(0,1) \to \mathbb{C}$ ολόμορφες. Εάν επιπρόσθετα ισχύουν $|f(z)| \leq 1$ $|g(z)| \leq \frac{1}{1-|z|}$ $\forall z \in D(0,1)$ αποδείξτε ότι

a) $|f'(0)| \leq 1$ b) $|g'(0)| \leq 4$, $|g''(0)| \leq \frac{27}{2}$

Ολοκληρωτικός τύπος Cauchy

$$f'(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(0,r)} \frac{f(w)}{w^2} dw \quad , 0<r<1$$

$$\Rightarrow |f'(0)| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_{C(0,r)} \frac{f(w)}{w^2} dw \right| \quad w = re^{it}, t \in [0,2\pi]$$

$$= \frac{1}{2\pi r} \left| \int_0^{2\pi} \frac{f(re^{it})}{e^{2it}} \cancel{r} i e^{it} dt \right|$$

$$= \frac{1}{2\pi r} \left| \int_0^{2\pi} f(re^{it}) \cdot e^{-it} dt \right|$$

$$\leq \frac{1}{2\pi r} \int_0^{2\pi} |f(re^{it}) e^{-it}| dt$$

$$= \frac{1}{2\pi r} \int_0^{2\pi} |f(re^{it})| dt \leq \frac{1}{r}$$

$|f'(0)| \leq \frac{1}{r} \quad \forall r<1$

$|f'(0)| \leq \lim_{r \to 1^-} \frac{1}{r} = 1$

b) Επίσης $|g'(0)| \leq \frac{1}{2\pi r} \int_0^{2\pi} |g(re^{it})| dt$

$$\leq \frac{1}{2\pi r} \int_0^{2\pi} \frac{1}{1-r} dt = \frac{1}{r(1-r)} \quad \forall r<1$$

$r = \frac{1}{2}$: $\frac{1}{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}} = 4$ (μικρότερη δυνατή τιμή)

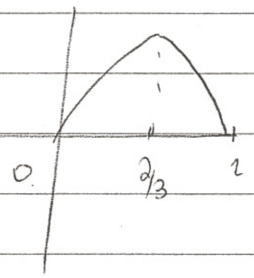
$$g''(0) = \frac{2!}{2\pi i}\int_{C(0,r)} \frac{g(w)}{w^3}\,dw$$

$$\Rightarrow |g''(0)| \le \frac{1}{\pi \cancel{i}}\left|\int_0^{2\pi} \frac{g(re^{it})}{r^3 e^{3it}}\, r\cancel{i}e^{it}\,dt\right| \le \frac{1}{\pi r^2}\int_0^{2\pi} \frac{1}{1-r}\,dt = \frac{2}{r^2(1-r)}$$

$h(r) = r^2(1-r)$

$h'(r) = 2r - 3r^2 = r(2-3r)$

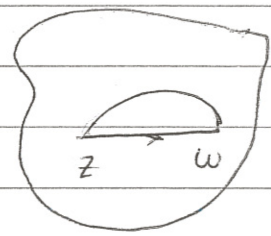
$$\sup_{r\in[0,1)} r^2(1-r) = \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{27}$$



Επομένως $|g''(0)| \le \frac{27}{2}$

4) Έστω Ω κυρτός ($\forall z,w\in\Omega$, $\lambda z+(1-\lambda)w \in \Omega$, $\forall \lambda\in(0,1)$) τόπος και $f:\Omega\to\mathbb{C}$ ολόμορφη συνάρτηση ώστε $|f'(z)|\le 1$ $\forall z\in\Omega$

Αποδείξτε ότι $|f(z)-f(w)| \le |z-w|$, $\forall z,w\in\Omega$



$$\int_w^z f'(w)\,dw = f(z)-f(w)$$

$$|f(z)-f(w)| = \left|\int_w^z f'(w)\,dw\right|$$

$(1-t)z+tw \quad t\in[0,1]$

$$\Downarrow$$

$$= \left|\int_0^1 f'((1-t)z+tw)(w-z)\,dt\right|$$

$$\le \int_0^1 |f'((1-t)z+tw)|\cdot|w-z|\,dt \le |w-z|$$

2) Προσδιορίστε όλες τις ακέραιες συναρτήσεις f για τις οποίες υπάρχουν θετικές σταθερές c_1, c_2 ώστε $|f'(z)| \le c_1 + c_2\cdot|z|^{3/2}$, $z\in\mathbb{C}$

Σκέψη: Αν είχα $|f'(z)| \le c_1 \xrightarrow{\text{Liouville}} f'(z)=c \Leftrightarrow (f(z)-cz)'=0$

$f(z) = c_1 z + c_2$

$$f'''(z) = \frac{2!}{2\pi i} \int_{C(z,r)} \frac{f'(w)}{(w-z)^3}\, dw \qquad z + re^{it}$$

$$|f'''(z)| \leq \frac{1}{\pi \cancel{i}} \left| \int_0^{2\pi} \frac{f'(z+re^{it})}{r^3 e^{3it}}\, r \cdot \cancel{i} e^{it} dt \right|$$

$$\leq \frac{1}{\pi r^2} \int_0^{2\pi} |f'(z+re^{it})| dt$$

$$\leq \frac{1}{\pi r^2} \int_0^{2\pi} (C_1 + C_2 |z+re^{it}|^{3/2}) dt$$

$$\leq \frac{1}{\pi r^2} \int_0^{2\pi} (C_1 + C_2 r^{3/2}) dt$$

$$\simeq \frac{C + \tilde{C} r^{3/2}}{r^2}$$

$$|f'''(z)| \leq \lim_{r \to +\infty} \frac{C + \tilde{C} r^{3/2}}{r^2} = 0$$

Μιγαδική Ανάλυση

30/11/2017

Ολόμορφες συναρτήσεις με ανωμαλίες

• Μεμονωμένη ανωμαλία

Ω ανοικτό $\Omega \setminus \{z_0\}$, $z_0 \in \Omega$

$\exists D(z_0, r_0)$ ώστε η f ολόμορφη στο $D(z_0,r_0) \setminus \{z_0\}$

• $f: \Omega \setminus \bigcup_{i=1} \{z_i\}$, Ω ανοικτό, $z_i \in \Omega$ ολόμορφη τότε z_i είναι μεμονωμένα σημεία ανωμαλίας.

Όμως είναι πιθανό $\exists z_0, z_n \in \Omega$, $z_n \to z_0$, z_n σημεία ώστε f ολόμορφη στο $\Omega \setminus \{z_0, z_n, n=1, \dots\}$ Τότε το z_0 ΔΕΝ είναι μεμονωμένο σημείο ανωμαλίας

πχ. $\frac{\sin z}{z}$ για να ορίζεται πρέπει $z \neq 0$

Είναι ολόμορφη στο $\mathbb{C} \setminus \{0\}$

$\lim_{z \to 0} \frac{\sin z}{z} = 1$ συνεχής στο $z=0$

Η επέκταση της συνάρτησης "$\frac{\sin z}{z}$" $= \begin{cases} \frac{\sin z}{z}, & z \neq 0 \\ 1, & z=0 \end{cases}$

Επομένως είναι ολόμορφη

$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5} - \dots$

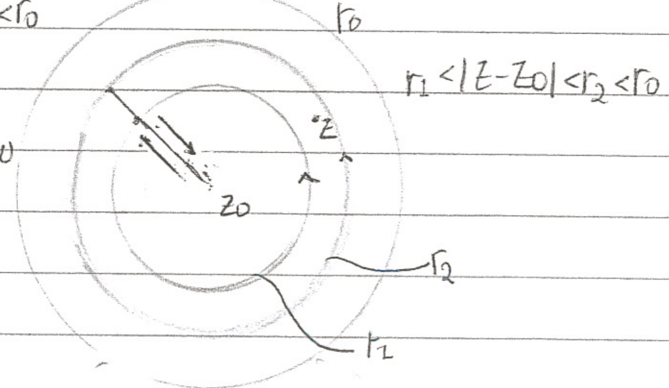
$\frac{\sin z}{z} = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots$

Θεώρημα

Έστω $f: D(z_0,r_0) \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ ολόμορφη και έστω επιλέγουμε $z \in D(z_0,r_0) \setminus \{z_0\}$ και $0 < r_1 < |z-z_0| < r_2 < r_0$

Τότε ισχύει:

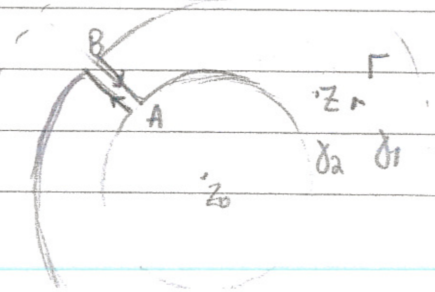
$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c(z_0,r_2)} \frac{f(w)}{w-z} dw - \frac{1}{2\pi i} \int_{c(z_0,r_1)} \frac{f(w)}{w-z} dw$$



Απόδειξη

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(w)}{w-z} dw$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \left(\int_{\gamma_1} \frac{f(w)}{w-z} dw + \int_{BA} \frac{f(w)}{w-z} dw + \int_{\gamma_2} \frac{f(w)}{w-z} dw + \int_{AB} \frac{f(w)}{w-z} dw \right)$$



$$= \frac{1}{2\pi i}\left(\int_{C(z_0,r_2)} \frac{f(w)}{w-z}dw - \int_{C(z_0,r_1)} \frac{f(w)}{w-z}dw\right)$$

<u>Θεώρημα:</u> Ανάπτυγμα Laurent

Έστω $f: D(z_0,r_0)\setminus\{z_0\}$ - ολόμορφη και επιλέγουμε $z \in D(z_0,r_0)\setminus\{z_0\}$ τότε

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n + \sum_{m=-\infty}^{+\infty} a_m(z-z_0)^m$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n \qquad 0<|z-z_0|<r_0$$

ομοιόμορφα στα συμπαγή του $D(z_0,r_0)\setminus\{z_0\}$

<u>Απόδειξη.</u>

$0<r_1<|z-z_0|<r_2<r_0$ τότε $f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C(z_0,r_2)} \frac{f(w)}{w-z}dw - \frac{1}{2\pi i}\int_{C(z_0,r_1)}\frac{f(w)}{w-z}dw$

• Για το πρώτο ολοκλήρωμα: $\frac{1}{w-z} = \frac{1}{w-z_0-(z-z_0)} = \frac{1}{w-z_0}\cdot\frac{1}{1-\frac{z-z_0}{w-z_0}}$

$$= \frac{1}{w-z_0}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{z-z_0}{w-z_0}\right)^n \qquad |z-z_0|<r_2$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C(z_0,r_2)}\frac{f(w)}{w-z}dw = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{C(z_0,r_2)}\frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}dw\right)(z-z_0)^n$$

Επομένως: $f(z) = \sum^{+\infty}\underbrace{\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{C(z_0,r_2)}\frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}dw\right)}_{a_n}(z-z_0)^n - \frac{1}{2\pi i}\int_{C(z_0,r_1)}\frac{f(w)}{w-z}dw$

• Για το δεύτερο ολοκλήρωμα:

$$-\frac{1}{w-z} = \frac{1}{z-w} = \frac{1}{z-z_0+z_0-w} = \frac{1}{z-z_0}\cdot\frac{1}{1-\frac{w-z_0}{z-z_0}}$$

$$= \frac{1}{z-z_0}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{w-z_0}{z-z_0}\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(w-z_0)^n}{(z-z_0)^{n+1}}$$

Άρα $-\frac{1}{2\pi i}\int_{C(z_0,r_1)}\frac{f(w)}{w-z}dw = \sum_{n=0}^{+\infty}\underbrace{\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{C(z_0,r_2)} f(w)(w-z_0)^n dw\right)}_{a_m}\frac{1}{(z-z_0)^{n+1}}$

$$\underset{n=-(1+m)}{\overset{-(n+1)=m}{=}} \sum_{m=-\infty}^{-1} a_m(z-z_0)^m$$

$$a_m = \frac{1}{2\pi i}\int_{C(z_0,r_2)}\frac{f(w)}{(w-z_0)^{1+m}}dw$$

$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{C(z_0,r)}\frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}}dw,\ n\in\mathbb{Z}$, $0<r<r_0$

Παραδείγματα:

• $\frac{1-z+z}{z(z-1)} = -\frac{1}{z}+\frac{1}{z-1} = -\frac{1}{z}-\frac{1}{1-z} = -\left(\frac{1}{z}+\sum_{n=0}^{+\infty} z^n\right) \quad 0<|z|<1$

Γύρω απο το 0, $\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n$

Το 0 είναι πόλος τάξης 1

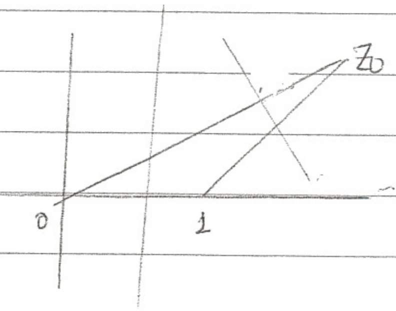
$\frac{1}{z} = \frac{1}{z-1+1} = \frac{1}{1-(1-z)} = \sum_{n=0}^{+\infty}(1-z)^n, \ |1-z|<1.$

$\frac{1}{z(z-1)} = -\left(\frac{1}{z}+\sum_{n=0}^{+\infty} z^n\right) \quad 0<|z|<1$

$= -\frac{1}{1-z} - \sum_{n=0}^{+\infty}(1-z)^n \quad 0<|z-1|<1$

$\frac{1}{1-z} = \frac{1}{1-z_0+z_0-z} = \frac{1}{1-z_0-(z-z_0)} = \frac{1}{(1-z_0)\left(1-\frac{z-z_0}{1-z_0}\right)}$ $\qquad \left|\frac{z-z_0}{1-z_0}\right|<1$

$= \frac{1}{1-z_0}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{z-z_0}{1-z_0}\right)^n$



• $e^z = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{n!}, \ z\in\mathbb{C}$

$e^{\frac{1}{z}} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}\cdot\frac{1}{z^n}, \ z\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$

Θεώρημα

Έστω $f: D(z_0,r_0)\setminus\{z_0\}$ ολόμορφη. Τότε ένα απο τα ακόλουθα αληθεύουν.

i) Το z_0 είναι επουσιώδης ανωμαλία όταν $\exists \lim_{z\to z_0} f(z) = a\in\mathbb{C}$
(και τότε η f επεκτείνεται σε ολόμορφη στο $D(z_0,r_0)$)

ii) $\exists \lim_{z\to z_0} f(z)=\infty$, τότε και μόνο τότε αν το z_0 είναι πόλος της f

iii) $\nexists \lim_{z\to z_0} f(z)$ όταν το ανάπτυγμα Laurent έχει άπειρους αρνητικούς όρους.

Απόδειξη:

i) ορίζουμε $\tilde{f}(z) = \begin{cases} f(z), & z\in D(z_0,r_0)\setminus\{z_0\} \\ a, & z=z_0 \end{cases}$

Τότε η $\tilde{f}$ είναι ολόμορφη στο $D(z_0,r_0)\setminus\{z_0\}$, συνεχής στο $D(z_0,r_0)$

Οπότε απο "θεώρημα" έχουμε ότι η $\tilde{f}$ είναι ολόμορφη στο $D(z_0, r_0)$

ii) Αν z_0 είναι πόλος έστω τάξης m $(a_m \neq 0)$

Δηλαδή $f(z) = \dfrac{a_m}{(z-z_0)^m} + \dots + \dfrac{a_1}{z-z_0} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_k (z-z_0)^k$

$$= \frac{1}{(z-z_0)^m}\left[a_m + \sum_{k=1}^{\infty} \theta_k (z-z_0)^k\right]$$

$$\Rightarrow \lim_{z \to z_0} f(z) = \infty$$

Έστω $\lim_{z \to z_0} f(z) = \infty \Rightarrow \exists \delta > 0 : f(z) \neq 0$ στο $0 < |z-z_0| < \delta$

και επομένως η $\dfrac{1}{f(z)}$ ορίζεται και είναι ολόμορφη στο $0 < |z-z_0| < \delta$

$\lim_{z \to z_0} \dfrac{1}{f(z)} = 0$

και επομένως η $\dfrac{1}{f(z)}$ είναι ολόμορφη στο $D(z_0, \delta)$

Αν m είναι η τάξη

της ρίζας της $\dfrac{1}{f(z)}$ τότε $\exists$ ολόμορφη h στο $D(z_0, \delta)$ ώστε $\dfrac{1}{f(z)} = (z-z_0)^m h(z)$

$h(z_0) \neq 0$

$f(z) = \dfrac{1}{(z-z_0)^m} \dfrac{1}{h(z)} \to$ ολόμορφη

$\Rightarrow (z-z_0)^m \cdot f(z)$ ολόμορφη στο $D(z_0, r_0)$

Μιγαδική Ανάλυση

5/12/2017

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C(z_0,r)} f(z)\,dz = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \frac{1}{2\pi i}\int_{C(z_0,r)} (w-z_0)^n \quad 0<r_1<r_2$$

$$= a_{1} = Re(f,z_0)$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C(z_0,r)} (w-z_0)^n\,dw = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} (re^{it})^n\, ire^{it}\,dt$$

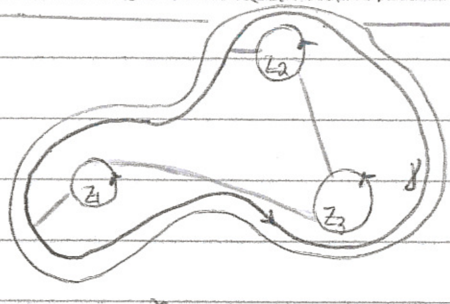
$w = z_0 + re^{it}$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} r^{n+1} e^{i(n+1)t}\,dt$$

$$= \begin{cases} 0, & n+1\neq 0 \\ 2\pi, & n=-1 \end{cases}$$

Θεώρημα: Έστω $z_1, z_2 \in \Omega$: $f:\Omega\setminus\{z_1,\dots,z_n\}\to\mathbb{C}$ ολόμορφη και $z_i\neq z_j$ $\forall i\neq j$ $\gamma\subset\Omega\setminus\{z_1,\dots,z_n\}$ θετικά προσανατολισμένο μονοπάτι, ώστε $z_1,\dots,z_n$ να είναι στο εσωτερικό της γ τότε:

$$\boxed{\int_\gamma f(w)\,dw = 2\pi i\big(Re(f,z_1)+Re(f,z_2)+\dots+Re(f,z_n)\big)}$$

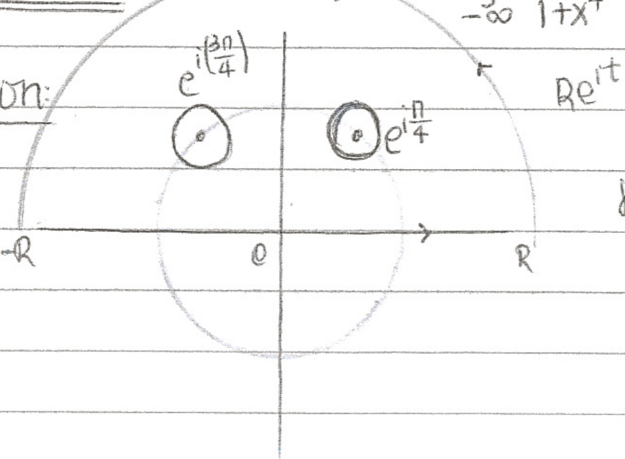


$$\int_\gamma f(w)\,dw = \sum_{k=1}^{n}\int_{C(z_0,r)} f(w)\,dw$$ για κατάλληλα μικρά

Υπολογισμός ολοκληρωμάτων

Άσκηση: Να υπολογιστεί $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2}{1+x^4}\,dx$

Λύση:



$$\int_{\gamma_R}\frac{w^2}{1+w^4}\,dw = \int_{-R}^{R}\frac{x}{1+x^4}\,dx + \int_0^{\pi}\frac{R^2e^{2it}(iRe^{it})}{1+R^4e^{4it}}\,dt$$

-2-

$w^4 = -1 \Rightarrow e^{4i\varphi} = e^{i\pi} \Longleftrightarrow 4\varphi = \pi + 2k\pi$

$\Longleftrightarrow \varphi = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}$

$\int_{\gamma_R} \frac{w^2}{1+w^4} = 2\pi i (Re(f, z_0) + Re(f, z_1))$ $\quad z_0 = \frac{\pi}{4}$

$\lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z)$ $\quad z_1 = \frac{3\pi}{4}$

$f(z) = \frac{z^2}{1+z^4}$

$f(z) = \frac{Q(z)}{z - z_0} = \frac{a_{-1} + b_1(z - z_0) + \dots}{z - z_0} = \frac{a_{-1}}{z - z_0} + b_1 + b_2(z - z_0) + \dots$

$\Rightarrow (z - z_0) f(z) = a_{-1} + b_1(z - z_0) + \dots$

$\lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z) = a_{-1}$

$Re(f, z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{z^2}{1+z^4} = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) \frac{z^2}{z^4 - z_0^4}$

$= \lim_{z \to z_0} \frac{\cancel{(z - z_0)} z^2}{\cancel{(z - z_0)} (z^3 + z^2 z_0 + z \cdot z_0^2 + z_0^3)} = \frac{z_0^2}{4 z_0^3}$

$= \frac{1}{4 z_0} = \frac{1}{4} e^{-i\frac{\pi}{4}}$

$Re(f, z_1) =$ ομοίως με πριν $= \frac{1}{4 z_1} = \frac{1}{4} \cdot e^{-i\frac{3\pi}{4}}$

$Re(f, z_0) + Re(f, z_1) = \frac{1}{4}\left(e^{-\frac{\pi}{4} i} + e^{-i\frac{3\pi}{4}}\right)$

$= \frac{1}{4}\left(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4} + \cos\frac{3\pi}{4} - i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$

$= \frac{1}{4}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -i\frac{\sqrt{2}}{4}$

$\int_{\gamma_R} \frac{w^2}{1+w^4} = 2\pi i (Re(f, z_0) + Re(f, z_1)) = 2\pi i \left(-i\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$

$\left| i \int_0^\pi \frac{R^3 e^{3it}}{1 + R^4 e^{4it}} dt \right| \leq \int_0^\pi \frac{R^3}{|1 + R^4 e^{4it}|} dt \overset{(*)}{\leq} \int_0^\pi \frac{R^3}{R^4 - 1} dt = \pi \frac{R^3}{R^4 - 1}$

(*) $|z| - |w| \leq |z + w| \leq |z| + |w|$

$R^4 - 1 \leq |1 + R^4 e^{4it}| \Rightarrow \frac{1}{|1 + R^4 e^{4it}|} \leq \frac{1}{R^4 - 1}$

Έχουμε $\frac{\pi\sqrt{2}}{2} = \int_{-R}^{R} \frac{x^2}{1+x^4} + I_2$

$$\Rightarrow \frac{\pi\sqrt{2}}{2} = \lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{R} \frac{x^2}{1+x^4}dx + \cancel{\lim_{R\to+\infty} I_R}^{\to 0}$$

$$\Rightarrow \frac{\pi\sqrt{2}}{2} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^4}dx + 0$$

$\rightarrow \int_0^{2\pi} R(\cos\theta, \sin\theta)d\theta$

$z = e^{it} = \cos t + i\sin t$

$\frac{1}{z} = \overline{z} = \cos t - i\sin t$

$\cos t = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})$

$\sin t = \frac{1}{2}(z - \frac{1}{z})$

$z = e^{it}$

$dz = ie^{it} = izdt$

$\Rightarrow dt = \frac{dz}{iz}$

$$\int_{c(0,1)} R\left(\frac{1}{2}(z+\frac{1}{z}), \frac{1}{2i}(z-\frac{1}{z})\right)\frac{dz}{iz}$$

<u>Άσκηση</u>: Έστω $a>1$, υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a+\cos t}$

<u>Λύση</u>:

Αν $|z|=1$, $z=e^{it} \Rightarrow dz = ie^{it}dt$

$\cos t = \frac{1}{2}(z+\frac{1}{z})$

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a+\cos t} = \int_{c(0,1)} \frac{1}{a+\frac{1}{2}(z+\frac{1}{z})}\frac{dz}{iz} = \frac{1}{i}\int_{c(0,1)} \frac{dz}{az+\frac{1}{2}z^2+\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{i}\int_{c(0,1)} \frac{z}{z^2+2az+1}dz \quad (1)$$

• $z^2+2az+a^2-a^2+1 = (z+a)^2-(a^2-1) = (z+a)^2-(\sqrt{a^2-1})^2$

$= (z+a+\sqrt{a^2-1})(z+a-\sqrt{a^2-1})$

Άρα $z_1 = -(a+\sqrt{a^2-1})$

$z_2 = -a+\sqrt{a^2-1} = (-a+\sqrt{a^2-1})\frac{(a+\sqrt{a^2-1})}{a+\sqrt{a^2-1}}$

Ερώτηση: Πώς βρίσκουμε το a_{-1} όταν έχουμε πόλο τάξης m;

$$\lim_{z \to z_0} (z-z_0)^m f(z) \neq 0$$
$$= a \in \mathbb{C}$$
$$= a_{-m}$$

$$(z-z_0)^{m-1}\left(f(z) - \frac{a_{-m}}{(z-z_0)^m}\right) = a_{-m+1}$$

$$\left(\frac{d}{dz}\right)^{m-1}\left((z-z_0)^m f(z)\right)$$

$$f(z) = \frac{a_{-m}}{(z-z_0)^m} + \frac{a_{-m+1}}{(z-z_0)^{m-1}} + \dots + \frac{a_{-1}}{z-z_0} + Q(z)$$

$$(z-z_0)^m \cdot f(z) = a_{-m} + a_{-m+1}(z-z_0) + \dots + a_{-1}(z-z_0)^{m-1}$$
$$= a_{-m} + a_{-m+1} \cdot (z-z_0) + \dots + a_{-1}(z-z_0)^{m-1} + (z-z_0)^m Q(z)$$

$$\left(\frac{d}{dz}\right)^{m-1}\left((z-z_0)^m f(z)\right) = a_{-1}(m+1)! + (z-z_0)\tilde{Q}(z)$$

$$\left(\frac{d}{dz}\right)^{(m-1)}\left((z-z_0)^m f(z)\right) = (m-1)!\, a_{-1}$$

$$\frac{1}{(m-1)!}\left(\frac{d}{dz}\right)^{(m-1)}\left((z-z_0)^m f(z)\right)\Bigg|_{z=z_0} = a_{-1}$$

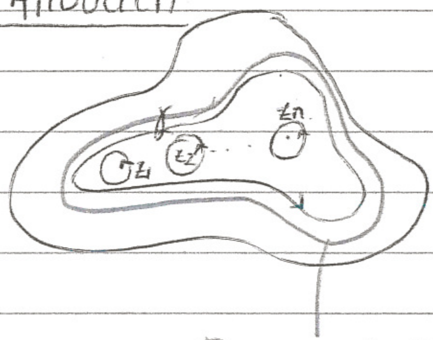
Μιγαδική Ανάλυση 12/12/2017

Πως μετράμε ρίζες;

Πρόταση Έστω, $f:\Omega\to\mathbb{C}$ ολόμορφη (Ω τόπος), $\gamma:[0,1]\to\Omega$ ένα κλειστό μονοπάτι και $f(\gamma(t))\neq 0$ $\forall t\in[0,1]$ και $z_1,\dots,z_n$ οι ρίζες της f στο εσωτερικό της γ (m_i = πολλαπλότητα της ρίζας z_i, $i=1,\dots,n$) τότε

$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(w)}{f(w)}\,dw$ = # των ριζών της f στο εσωτερικό της γ παίρνοντας υπόψιν την πολλαπλότητά τους $= m_1+m_2+\dots+m_n$

Απόδειξη



Επιλέγουμε δίσκους ακτίνας δ μικρή ώστε

$\overline{D(z_i,\delta)}\subset$ εσωτερικό της γ

$\overline{D(z_i,\delta)}\cap\overline{D(z_j,\delta)}=\emptyset$ $\forall i\neq j$

Τότε θα έχουμε ότι η συνάρτηση $\frac{f'(z)}{f(z)}$ είναι ολόμορφη

B ανοικτό $B\supseteq\gamma$ και τα εσωτερικά σημεία της και δεν υπάρχει άλλη ρίζα της f

$z_1,\dots,z_n$

Οπότε $\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{f'(w)}{f(w)}dw = \frac{1}{2\pi i}\int_{C(z_1,\delta)}\frac{f'(w)}{f(w)}dw+\frac{1}{2\pi i}\int_{C(z_2,\delta)}\frac{f'(w)}{f(w)}dw+\dots+\frac{1}{2\pi i}\int_{C(z_n,\delta)}\frac{f'(w)}{f(w)}dw$

Επειδή η f είναι ολόμορφη στο $D(z_j,\delta)\to f(z)=(z-z_j)^{m_j}Q_j(z)$, $|z-z_j|\le\delta$

$Q_j(z_j)\neq0$ (αναπτύσσεται σε δυναμοσειρά)

Q_j ολόμορφη στο $\overline{D(z_j,\delta)}$

$\Rightarrow f'(z)=m_j(z-z_j)^{m_j-1}Q_j(z)+(z-z_j)^{m_j}\cdot Q_j'(z)$

$(Q_j(z)\neq0\ \ \forall z\in\overline{D(z_j,\delta)})$

$0<|z-z_j|\le\delta \Rightarrow \frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{m_j(z-z_j)^{m_j-1}Q_j(z)+(z-z_j)^{m_j}Q_j'(z)}{(z-z_j)^{m_j}Q_j(z)}$

$= m_j\frac{1}{z-z_j}+\frac{Q_j'(z)}{Q_j(z)}$ ολόμορφη στο $\overline{D(z_j,\delta)}$

Επομένως $\frac{1}{2\pi i}\int_{C(z_j,\delta)}\frac{f'(w)}{f(w)}dw=\frac{1}{2\pi i}\int_{C(z_j,\delta)}\frac{m_j}{(w-z_j)}dw+\overbrace{\frac{1}{2\pi i}\int_{C(z_j,\delta)}\frac{Q_j'(w)}{Q_j(w)}dw}^{0}$

$= m_j\frac{1}{2\pi i}\int_{C(z_j,\delta)}\frac{1}{(w-z_j)}dw = m_j$ (αφού είναι ολόμορφη)

γιατί: $z=z_j+\delta e^{it}$, $t\in[0,2\pi]$ $\int_{C(z_j,\delta)}\frac{dw}{w-z_j}=\int_0^{2\pi}\frac{\delta i e^{it}}{\delta\cdot e^{it}}dt=2\pi i$

-2-

Μερόμορφη f: σε μεμονωμένα σημεία έχει πόλους

Ω τόπος, $f:\Omega\setminus\{z_1,\dots,z_n\}\to\mathbb{C}$ ολόμορφη και z_j είναι πόλοι για την f
δηλαδή $m_j\in\mathbb{N}$ $\exists$ $\delta>0$: $(z-z_j)^{m_j}f(z)$ είναι ολόμορφη στο $D(z_j,\delta)$

$$f(z)=\frac{a_{-m}}{(z-z_j)^m}+\frac{a_{-m+1}}{(z-z_j)^{m-1}}+\dots+\frac{a_{-1}}{z-z_j}+a_0+a_j(z-z_j)+\dots+a_k(z-z_j)^k+\dots$$

$$(z-z_j)^m f(z)=a_{-m}+\frac{a_{-m+1}}{(z-z_j)}+\dots+$$

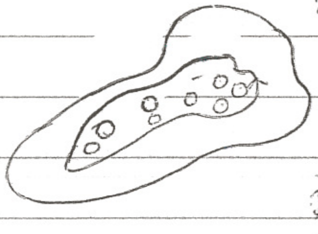
$$\lim_{z\to z_j}(z-z_j)^{m_j}f(z)\neq 0$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C(z_j,\delta)} f(w)dw=a_{-1}=Res(f,z_j)$$

Πρόταση.
Έστω Ω τόπος, $z_1,\dots,z_k\in\Omega$ και $f:\Omega\setminus\{z_1,\dots,z_k\}$ ολόμορφη, τα z_j είναι πόλοι για την f τάξης m_j και $\gamma:[0,1]\to\Omega$ μονοπάτι (απλή κλειστή καμπύλη κατά τμήματα C^1 με θετικό προσανατολισμό)
Τα $z_1,z_2,\dots,z_k$ είναι εσωτερικά της γ, $f(\gamma(t))\neq 0$ $\forall t\in[0,1]$
Τότε $\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(w)}{f(w)}dw=$ # πλήθος ριζών της f στο εσωτερικό της γ (υπολογίζουμε την πολλαπλότητά τους)
− # πλήθος των πόλων παίρνοντας υπόψιν την πολλαπλότητά τους

Απόδειξη:
Η f έχει πεπερασμένο πλήθος ριζών. Γιατί όχι άπειρο?
→ Έστω w_k ρίζες της f στο εσωτερικό της γ. $w_k\to w_0$
$w_0\in\gamma(t)\cup\{$εσωτερικό της $\gamma\}$ $\exists t_0\in[0,1]: w_0=\gamma(t_0)$
$f(w_k)=0 \xrightarrow[\text{της } f]{\text{από συνέχεια}} f(w_0)=0$
Οπότε
αναγκαστικά w_0 εσωτερικό της γ.
Αν το w_0 είναι σημείο ολομορφίας ⇒ αδύνατο
Μπορεί το w_0 να είναι πόλος? Δηλαδή $\lim_{z\to w_0}f(z)=\infty$
Άτοπο γιατί $\underset{\overset{\|}{0}}{f(w_k)}\to f(w_0)$

Έστω $w_1, \ldots, w_m$ είναι οι ρίζες της f στο εσωτερικό της γ
$a_1, \ldots, a_m$ οι πολλαπλότητες των ριζών της f (αντίστοιχα)
και $z_1, \ldots, z_k$ είναι οι πόλοι της f πολλαπλότητων $m_1, \ldots, m_k$ αντίστοιχα.
Θα αποδείξουμε ότι $\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(w)}{f(w)}dw = a_1+a_2+\ldots+a_m-(m_1+m_2+\ldots+m_k)$



Γύρω από τα σημεία $w_1, \ldots, w_m, z_1, \ldots, z_k$
Επιλέγω κατάλληλη μικρή ακτίνα $\delta>0$ ώστε
$\overline{D(z_l,\delta)} \subset$ εσωτερικό της γ
$\overline{D(w_k,\delta)} \subset$ εσωτερικό της γ
$\overline{D(z_j,\delta)} \cap \overline{D(w_k,\delta)} = \phi$ όπως στο σχήμα

Τότε $\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(w)}{f(w)}dw = \sum_{j=1}^{m}\frac{1}{2\pi i}\int_{C(w_j,\delta)}\frac{f'(w)}{f(w)}dw + \sum_{l=1}^{k}\frac{1}{2\pi i}\int_{C(z_l,\delta)}\frac{f'(w)}{f(w)}dw$

$$= \sum_{j=1}^{m} a_j + \sum_{l=1}^{k}\frac{1}{2\pi i}\int_{C(z_l,\delta)}\frac{f'(w)}{f(w)}dw = \sum_{j=1}^{m}a_j - \sum_{l=1}^{k}m_l$$

Θα αποδείξουμε ότι αφού z_l είναι πόλος της f τάξης m_l τότε
$(z-z_l)^{m_l}f(z)$ ολόμορφη στο $\overline{D(z_l,\delta)}$ και $\lim_{z\to z_l}(z-z_l)^{m_l}f(z) = a_l \neq 0$
$(z-z_l)^{m_l}f(z) = \varphi_l(z)$ ολόμορφη στο $\overline{D(z_l,\delta)}$
Δεν έχει ρίζες στο $\overline{D(z_l,\delta)}$, ούτε πόλους.
$f(z) = \frac{\varphi_l(z)}{(z-z_l)^{m_l}}, \quad z \in \overline{D(z_l,\delta)} \setminus \{z_l\}$

$$f'(z) = \frac{\varphi_l'(z)(z-z_l)^{m_l} - \varphi_l(z)\, m_l (z-z_l)^{m_l-1}}{(z-z_l)^{2m_l}} = \frac{\varphi_l'(z)(z-z_l) - m_l\varphi_l(z)}{(z-z_l)^{m_l+1}}$$

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{\frac{\varphi_l'(z)(z-z_l)-m_l\varphi_l(z)}{(z-z_l)^{m_l+1}}}{\frac{\varphi_l(z)}{(z-z_l)^{m_l}}} = \frac{\frac{\varphi_l'(z)(z-z_l)}{\varphi_l(z)} - m_l}{z-z_l} = \frac{\varphi_l'(z)}{\varphi_l(z)} - \frac{m_l}{z-z_l}$$

$0<|z-z_l|\leq\delta$.

Η φ_l είναι ολόμορφη και δεν μηδενίζεται
Η $\frac{\varphi_l'(z)}{\varphi_l(z)}$ ολόμορφη ως πηλίκο ολομόρφων

$$\Rightarrow \frac{1}{2\pi i}\int_{C(z_l,\delta)}\frac{f'(w)}{f(w)}dw = \frac{1}{2\pi i}\int_{C(z_l,\delta)}\frac{\varphi_l'(w)}{\varphi_l(w)}dw - m_l\frac{1}{2\pi i}\int_{C(z_l,\delta)}\frac{dw}{w-z_l} = -m_l$$

Θεώρημα Rouche:

Έστω Ω τόπος, $f,g:\Omega\to\mathbb{C}$ ολόμορφες

$\gamma:[0,1]\to\Omega$ μονοπάτι και γνωρίζουμε: $|g(\gamma(t))|<|f(\gamma(t))|$ $t\in[0,1]$

τότε # των ριζών της f = # των ριζών της $f+g$

στο εσωτερικό της γ στο εσωτερικό της γ

Άσκηση: Αποδείξτε ότι τα πολυώνυμα $2z^{10}+4z^2+1$ και $2z^{10}-4z^2+1$ έχει ακριβώς 2 ρίζες στο $D(0,1)$

Απόδειξη:

$f(z)=4z^2$, $g(z)=2z^{10}+1$ $C(0,1)$

$|f(z)|=4|z|^2=4$

$|g(z)|=|2z^{10}+1|\leq 2|z|^{10}+1=3$.

$\Rightarrow |g(z)|<|f(z)|$, $|z|=1$

$\Longrightarrow$ Από Θεώρημα Rouche

$\Rightarrow$ # ριζών της f στο $D(0,1)=2$

$=$ # ριζών της $f+g=2z^{10}+4z^2+1$

$=$ # ριζών της $f-g=2z^{10}-4z^2+1$

$=$ # ριζών της $f+ig=2iz^{10}+4z^2+i$

Εν γένει, $\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{dz}{z}=0$ $\gamma(t)\neq 0$ $\forall t\in[0,1]$

Το 0 εξωτερικό της γ

Μιγαδική Ανάλυση

14/12/2017

Θεώρημα Rouché

Έστω Ω τόπος, f,g: ολόμορφες, $f,g:\Omega\to\mathbb{C}$ και $\gamma:[0,1]\to\Omega$ μονοπάτι (κλειστό) (απλή, κλειστή, κατά τμήματα C^1 με θετικό προσανατολισμό)
και γνωρίζουμε ότι $|g(\gamma(t))|<|f(\gamma(t))|$ $\forall t\in[0,1]$.
Τότε #ριζών της f στο εσωτερικό της γ: $(z(f))$ = #ριζών της $(f+g)$ στο εσωτερικό της γ $(z(f+g))$

• Η f δεν έχει ρίζες στη γ (αποδεικνύεται με άτοπο)

$$z(f)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(w)}{f(w)}\,dw$$

• Παρατηρούμε επίσης ότι $(f+g)(\gamma(t))\neq 0$, $\forall t\in[0,1]$ διότι αν $\exists t_0$:
$(f+g)(\gamma(t_0))=0$
$\Rightarrow f(\gamma(t_0))=-g(\gamma(t_0))$
$\Rightarrow |f(\gamma(t_0))|=|g(\gamma(t_0))|$ Αδύνατο
και επομένως $z(f+g)=\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_\gamma \frac{(f+g)'(w)}{(f+g)(w)}\,dw$

Τότε όμως έχουμε $\dfrac{f'(w)+g'(w)}{f(w)+g(w)}-\dfrac{f'(w)}{f(w)}=$

$$=\frac{f(w)(f'(w)+g'(w))-f'(w)(f(w)+g(w))}{f(w)(f(w)+g(w))}$$

$$=\frac{f(w)g'(w)-f'(w)g(w)}{f(w)(f(w)+g(w))}=$$

$$\left\{\left(\frac{g(z)}{f(z)}\right)'=\frac{g'(z)f(z)-g(z)f'(z)}{f^2(z)}\right.$$

$$=\frac{\cancel{f^2(w)}\left(\frac{g(w)}{f(w)}\right)'}{\cancel{f^2(w)}\left(1+\frac{g(w)}{f(w)}\right)}$$

$$=\frac{\left(1+\frac{g(w)}{f(w)}\right)'}{1+\frac{g(w)}{f(w)}}$$

Οπότε $\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \left(\frac{f'(w)+g'(w)}{f(w)+g(w)}\right) dw - \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(w)}{f(w)} dw$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\left(1+\frac{g}{f}\right)'(w)}{\left(1+\frac{g}{f}\right)(w)} dw$$

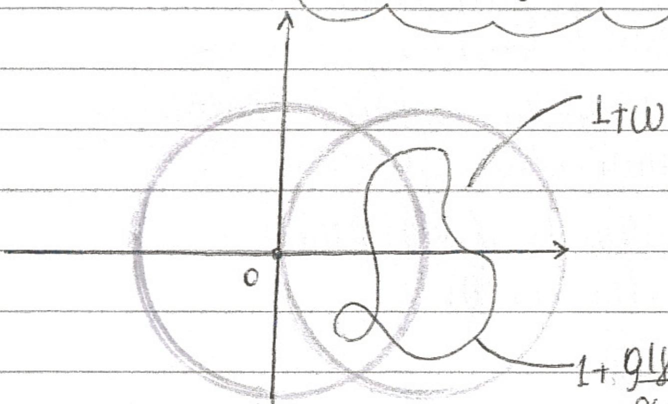
Όμως $|g(\gamma(t))| < |f(\gamma(t))| \Longrightarrow \left|\frac{g(\gamma(t))}{f(\gamma(t))}\right| < 1$

$$\Longrightarrow 1+\frac{g(\gamma(t))}{f(\gamma(t))} = \Gamma(t) \qquad t\in[0,1]$$

σ κλειστή

$\frac{1}{2\pi i}\int_\sigma \frac{dw}{w-z}$: i) Αν z εσωτερικό της σ αν είναι απλή $\frac{1}{2\pi i}\int_\sigma \frac{dw}{w-z}$
και σ θετικά προσανατολισμένη

ii) Αν z εξωτερικό της σ (ανεξάρτητα απο το αν είναι απλή ή όχι) $\frac{1}{2\pi i}\int_\sigma \frac{dw}{w-z} = 0$



$1+\frac{g(\gamma(t))}{f(\gamma(t))}$, $t\in[0,1]$

$z = 1+w$

$w = \frac{g(\gamma(t))}{f(\gamma(t))}$, $|w|<1$

$1+\frac{g(\gamma(t))}{f(\gamma(t))}$ (δεν μηδενίζεται)

$$Re\left(1+\frac{g(\gamma(t))}{f(\gamma(t))}\right) > 0$$

Οπότε το 0 είναι στο εξωτερικό της $\Gamma(t) = 1+\frac{g(\gamma(t))}{f(\gamma(t))}$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\left(1+\frac{g}{f}\right)'(w)}{\left(1+\frac{g}{f}\right)(w)} dw = \frac{1}{2\pi i}\int_0^1 \frac{\left(1+\frac{g}{f}\right)'(\gamma(t))\,\gamma'(t)}{\left(1+\frac{g}{f}\right)(\gamma(t))} dt$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{1}{z} dz = 0$$

$$\Gamma'(t) = \left(\frac{g(\omega)}{f(\omega)}\right)'\Bigg|_{\omega=\gamma(t)} \cdot \gamma'(t)$$

Θεώρημα Hurwitz

Έστω Ω τόπος, $f_n, f: \Omega \to \mathbb{C}$ ολόμορφες ώστε $f_n \to f$ ομοιόμορφα στα συμπαγή του Ω. Εαν f_n δεν έχουν ρίζες στο Ω $\forall n \in \mathbb{N}$ τότε

είτε η $f \equiv 0$ στο Ω.

είτε η f δεν έχει ρίζα επίσης.

Απόδειξη

Έστω ότι η f δεν είναι ταυτοτικά μηδέν και έχει τουλάχιστον μια ρίζα (πολλαπλότητας m), z_0, δηλαδή $f(z_0)=0$. Τότε $\exists r_0>0$ κατάλληλα μικρός ώστε η f να μην έχει άλλη ρίζα εκτός της z_0 στο $\overline{D(z_0,r_0)} \subset \Omega$

$\Downarrow$ γιατί?

Ερώτημα: κοντά στο z_0 υπάρχει άλλη ρίζα;

Αν υπήρχε, $0<|z_n - z_0| < \frac{1}{n}$

$\left.\begin{array}{l} f(z_n)=0 \\ z_n \to z_0 \end{array}\right] \Rightarrow$ Από θεώρημα αναγνώρισης η $f \equiv 0$ στο Ω. Άρα άτοπο

Επομένως $\displaystyle \frac{1}{2\pi i}\int_{C(z_0,r_0)} \frac{f'(\omega)}{f(\omega)}\,d\omega = m$

Όμως $f_n \to f$ ομοιόμορφα στο $C(z_0,r_0)$ (που είναι συμπαγές)

$f_n' \to f'$ ομοιόμορφα στο $C(z_0,r_0)$

ορίζεται $\frac{f_n'}{f_n}$ αφού η f_n δε μηδενίζεται και μάλιστα $\frac{f_n'}{f_n} \to \frac{f'}{f}$ ομοιόμορφα στο $C(z_0,r_0)$

* $f_n \to f$ ομοιόμορφα στο K

$\frac{1}{f_n} \to \frac{1}{f}$ ομοιόμορφα στο K?

Αυτό ισχύει αν: είναι φραγμένη

$\left|\frac{1}{f_n} - \frac{1}{f}\right| = \frac{|f_n - f|}{|f_n f|}$, $|f_n(z) f(z)| \geq c$

και άρα $\frac{|f_n - f|}{|f_n f|} < c|f_n - f|$

$f_n \to f \Rightarrow f_n - f \to 0$, $|f_n| \geq \frac{1}{2}|f|$

Επομένως, $\frac{1}{2\pi i}\int_{C(z_0,r_0)} \frac{f_n'(w)}{f_n(w)}dw \to \frac{1}{2\pi i}\int_{C(z_0,r_0)} \frac{f'(w)}{f(w)}dw$

Άτοπο γιατί: $\overset{\shortparallel}{0}$ και $\overset{\shortparallel}{m}$

Θεώρημα:

Έστω Ω τόπος, f_n, f ολόμορφες και $f_n \to f$ ομοιόμορφα στα συμπαγή του Ω.
Εάν η f_n είναι 1-1, τότε είτε η $f \equiv$ σταθερή στο Ω
είτε η f είναι 1-1 επίσης

~ o ~

Θέματα Προόδου.

(Φυλλάδιο 8)

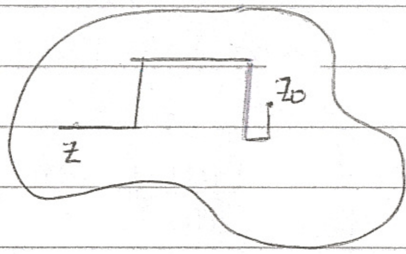
3) α) Έστω Ω τόπος και $f: \Omega \to \mathbb{C}$ ολόμορφη ώστε $f'(z)=0$ $\forall z \in \Omega$.

β) Να βρείτε όλες τις ακέραιες g, h για τις οποίες υπάρχουν θετικές σταθερές c_1, c_2 ώστε να ισχύουν $|g'(z)| \leq c_1 + c_2|z|^{3/2}$, $\forall z \in \mathbb{C}$

$|z| \leq |h'(z)|$ $\forall z \in \mathbb{C}$

Λύση: α) Θέλω να δείξω ότι:

$f(z) = f(z_0)$ $z \in \Omega$, $z_0 \in \Omega$



Τότε $\exists$ πολυγωνική γραμμή $\subset \Omega$ που ενώνει τα z, z_0

Επίσης $f'(z)=0 \Rightarrow f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, $u,v: \Omega \to \mathbb{R}$

$\Rightarrow \exists u_x, v_x, u_y, v_y: u_x = u_y = v_x = v_x = 0$

$\underbrace{u(x,y)}_{z} = \underbrace{u(x_0,y_0)}_{z_0}$

$u(x_1,y_0) - u(x_0,y_0) = (x_1 - x_0)\,u_x(\xi_1,y_0) = 0$ (ΘΜΤ)

Μετά από πεπερασμένο πλήθος βημάτων έχουμε ότι $u(x,y) = u(x_0,y_0)$

Αντίστοιχα με χρήση του $v_x = v_y = 0 \Rightarrow v(x,y) = v(x_0,y_0)$

Η $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$

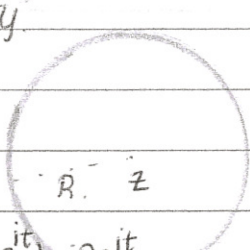
$= u(x_0,y_0) + iv(x_0,y_0)$

$= f(z_0)$

β). $g'''(z) = Q''(z)$ θέλουμε να εκτιμηθεί από την $g'(z) = Q(z)$

$Q''(z)$ ολοκληρωτικός τύπος Cauchy

$$Q''(z) = \frac{2!}{2\pi i}\int_{C(z,R)} \frac{Q(w)}{(w-z)^3}\,dw$$



$$g'''(z) = \frac{1}{\pi i}\int_{C(z,R)} \frac{g'(w)}{(w-z)^3}\,dw = \frac{1}{\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{g'(z+Re^{it})\, iRe^{it}}{R^3 \cdot e^{3it}}\,dt$$

$$|g'''(z)| \le \frac{1}{\pi R^2}\int_0^{2\pi} |g'(z+Re^{it})|\,dt \le \frac{2\pi}{\pi R^2}\left(c_1+c_2(|z|+R)^{3/2}\right)$$

$$|g'(z+Re^{it})| \le c_1+c_2|z+Re^{it}|^{3/2}$$
$$\le c_1+c_2 \cdot (|z|+R)^{3/2}$$

$$\lim_{R\to\infty}\left|\frac{2\pi}{\pi R^2}\left(c_1+c_2(|z|+R)^{3/2}\right)\right| = 0$$

Άρα $g'''(z)=0 \Rightarrow g''(z)=a \Leftrightarrow \left(g(z)-\frac{a}{2}z^2\right)''=0$

$\exists a\in\mathbb{C}:$

$\exists \beta\in\mathbb{C}:$ $\Leftrightarrow \left(g(z)-\frac{a}{2}z^2\right)' = \beta = (\beta z)'$

$\Leftrightarrow g(z) - \beta z - \frac{a}{2}z^2 = 0$

$\exists \gamma\in\mathbb{C}:$ $\Leftrightarrow g(z) = \frac{a}{2}z^2 + \beta z + \gamma$

- $|z| \le |h'(z)|$

→ Αν z_0 ρίζα της $h'(z)$ δηλαδή $h'(z_0)=0$

$|z_0| \le 0 \Rightarrow z_0 = 0$

Άρα αν έχει ρίζα, η μοναδική είναι το μηδέν

Επομένως, αναγκαστικά $h'(z) = z^m Q(z)$ ολόμορφη

$|z| \le |z^m Q(z)|$, $|z| \neq 0$

$1 \le |z|^{m-1}|Q(z)|$ $\forall z \neq 0$

Αναγκαστικά $m=1$, γιατί αν $m \ge 2$ καταλήγουμε σε άτοπο

$|z| \le |zQ(z)| \Rightarrow 1 \le |Q(z)|$, $z \neq 0$

Q ολόμορφη και δεν μηδενίζεται άρα $\frac{1}{Q(z)}$ ολόμορφη

$\left|\frac{1}{Q(z)}\right| \leq 1$ Απο θεωρημα Liouville

έχουμε ότι $\frac{1}{Q(z)} = c$

$Q(z) = \lambda,\ \lambda \in \mathbb{C},\ \lambda \neq 0$

$h'(z) = \lambda z \Rightarrow h'(z) = \left(\frac{\lambda}{2} z^2\right)'$

$\Rightarrow \left(h(z) - \frac{\lambda}{2} z^2\right)' = 0$

$\Rightarrow h(z) = \frac{\lambda}{2} z^2 + \beta,\ |\lambda| \geq 1,\ \beta \in \mathbb{C}$

→ Αν η $h'(z)$ δεν έχει ρίζα

$\left|\frac{z}{h'(z)}\right| \leq 1$

Απο θεωρημα Liouville.

$\frac{z}{h'(z)} = c \Rightarrow h'(z) = \lambda z$

καταλήγουμε στο ίδιο συμπέρασμα.

Μιγαδική Ανάλυση: (Αναπλήρωση: 14/12/2017)

Θεώρημα:

Έστω Ω τόπος, $f_n, f: \Omega \to \mathbb{C}$ ολόμορφες, $f_n \to f$ ομοιόμορφα στα συμπαγή του Ω

Εάν η f_n είναι 1-1 τότε είτε $f \equiv$ σταθερή

είτε f 1-1

Απόδειξη:

Έστω ότι η f δεν είναι σταθερή και δεν είναι 1-1.

Οπότε υπάρχουν $z_1 \neq z_2$, ώστε $f(z_1)=f(z_2)$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $\varphi(z)=f(z)-f(z_1)$, τότε η φ έχει τουλάχιστον δύο ρίζες, ειδικότερα τις z_1 και z_2.

Επειδή η f δεν είναι σταθερή, φ δεν είναι η ταυτοτικά μηδέν συνάρτηση

Επιλέγουμε δίσκο $\overline{D(z_2,r)} \subset \Omega$, ώστε η φ να μην έχει άλλη ρίζα εκτός της z_2. Επίσης θεωρούμε τις συναρτήσεις $\varphi_n(z)=f_n(z)-f_n(z_1)$, $z\in\overline{D(z_2,r)}$

Τότε $\varphi_n \to \varphi$ ομοιόμορφα στο δίσκο $\overline{D(z_2, r)}$

Η φ_n δεν έχει ρίζα στο $\overline{D(z_2,r)}$

τότε απο Θεώρημα Hurwitz — είτε $\varphi\equiv 0$ $\overline{D(z_2,r)}$, αδύνατο

— είτε φ δεν έχει ρίζες, αντίφαση

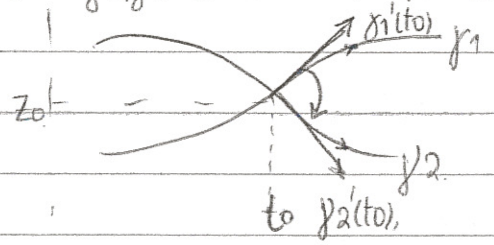
Γεωμετρική σημασία της Μιγαδικής Παραγώγου

Σύμμορφες συναρτήσεις

Ισοδύναμα σύμμορφα χωρία

Βασικές σύμμορφες απεικονίσεις, Μετασχηματισμοί Möbius

Έστω γ_1,γ_2 είναι C^1 καμπύλες που τέμνονται στο t_0, δηλαδή $\gamma_1(t_0)=\gamma_2(t_0)$
$=z_0$



$\gamma_1(t)=(x_1(t),y_1(t),0)=x_1(t)+iy_1(t)$

$$\overrightarrow{\gamma_1}(t_0)\times\overrightarrow{\gamma_2}(t_0) = \begin{vmatrix} i & j & k\\ x_1' & y_1' & 0 \\ x_2' & y_2' & 0\end{vmatrix} = (x_1'y_2'-x_2'y_1')(t)\vec{k}$$

$\overline{\gamma_1'(t)} \cdot \gamma_2'(t)$

$(x_1'(t) - i y_1'(t))$ $(x_2'(t) + i y_2'(t))$

$= x_1' x_2' + y_1' y_2' + i(x_1' y_2' - y_1' x_2')$

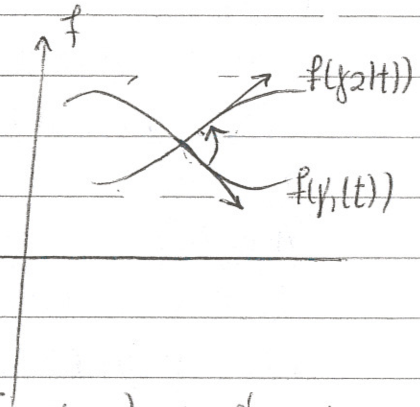
$Im(\overline{\gamma_1'(t_0)}, \gamma_2'(t_0))$

$f(\gamma_1(t))$

$f(\gamma_2(t))$

$(f'(\gamma_1(t)))|_{t=t_0} = f'(z_0) \cdot \gamma_1'(t_0)$

$(f(\gamma_2(t)))' = f'(z_0) \gamma_2'(t_0)$



$Im(\overline{f'(z_0)\gamma_1'(t_0)})(f'(z_0) \cdot \gamma_2'(t_0)) = |f'(z_0)|^2 Im(\overline{\gamma_1'(t_0)} \cdot \gamma_2'(t_0))$ Αν $f'(z_0) \neq 0$

Τι συμβαίνει αν $f'(z_0) \neq 0$;

Λόγω συνέχειας της παραγώγου, τότε $\exists \delta > 0$: $f'(z) \neq 0$ $\forall z \in D(z_0, \delta)$

<u>Θεώρημα:</u>

Έστω Ω τόπος, $f: \Omega \to \mathbb{C}$ ολόμορφη, $z_0 \in \Omega$ ώστε $f'(z_0) \neq 0$ τότε $\exists \delta > 0$ ώστε f να είναι 1-1 στο $D(z_0, \delta) \subset \Omega$

<u>Απόδειξη:</u>

$\frac{d}{dt} f((1-t)w + tz) = f'((1-t)w + tz)(z - w)$

$\int_0^1 \frac{d}{dt} f((1-t)w + tz)\, dt$

$\int_w^z f'(w)\, dw = f(z) - f(w) = (z - w) \cdot \int_0^1 f'((1-t)w + tz)\, dt$

$z, w \in D(z_0, \delta)$, $z \neq w$

$\Longrightarrow \frac{f(z) - f(w)}{z - w} - f'(z_0) = \int_0^1 f'((1-t)w + tz)\, dt - f'(z_0) \int_0^1 dt$

$= \int_0^1 (f'((1-t)w + tz) - f'(z_0))\, dt$

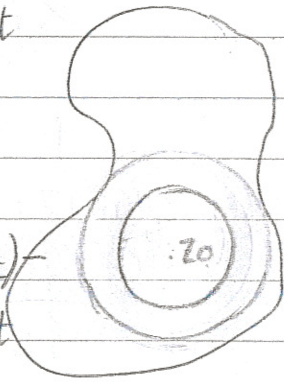
Επιλέξουμε δ σχετικά μικρό ώστε

$|f'(z) - f'(z_0)| < \frac{|f'(z_0)|}{2}$ και επομένως

αν $z \neq w \in D(z_0, \delta_0)$

τότε $\left| \frac{f(z) - f(w)}{z - w} - f'(z_0) \right| \leq \int_0^1 |f'((1-t)w + tz) - f'(z_0)|\, dt$

$\leq \frac{|f'(z_0)|}{2}$



Οπότε για z, w, $z \neq w$ στο $D(z_0, \delta_0)$ έχουμε

$$|f'(z_0)| - \left|\frac{f(z)-f(w)}{z-w}\right| \leq \left|\frac{f(z)-f(w)}{z-w} - f'(z_0)\right| \leq \frac{|f'(z_0)|}{2}$$

$$\Rightarrow \left|\frac{f(z)-f(w)}{z-w}\right| \geq \frac{|f'(z_0)|}{2} > 0$$ και άρα η f είναι 1-1 στο $D(z_0,\delta_0)$

- Τι γίνεται αν $f'(z_0)=0$

i) Γωνίες

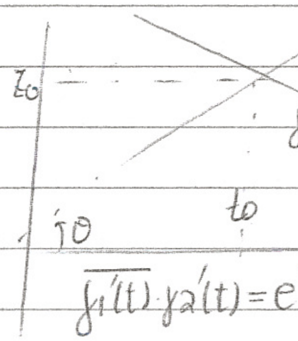
ii) Μπορεί να γίνει 1-1?

$\Rightarrow$ i) $\overline{f(\gamma_1(t))}$ $\quad f(\gamma_2(t))$, $t_0<t$

$$\lim_{t\to t_0^+} \frac{\overline{f'(\gamma_1(t))}\,\overline{\gamma_1'(t)} \quad f'(\gamma_2(t))\,\gamma_2'(t)}{|f'(\gamma_1(t))||\gamma_1'(t)|\cdot|f'(\gamma_2(t))||\gamma_2'(t)|}$$

$\gamma_1(t) = z_0 + (t-t_0)e^{i\theta}$

$\gamma_1'(t) = e^{i\theta}$



$\gamma_2(t) = z_0 + (t-t_0)e^{i\varphi}$

$\gamma_2'(t) = e^{i\varphi}$

$\overline{\gamma_1'(t)}\cdot\gamma_2'(t) = e^{i(\varphi-\theta)}$

$f(z) = f(z_0) + (z-z_0)^m Q(z)$, $Q(z_0)\neq 0$

$m=1$: $f'(z_0) = Q(z_0) \neq 0$

$m=2,3,\ldots$ $f'(z_0)=0$

$\Rightarrow f'(z) = (z-z_0)^{m-1}\Pi(z)$

$f'(\gamma_1(t))\cdot\gamma_1'(t) = (t-t_0)^{m-1}\cdot e^{i(m-1)\theta}\,\Pi(z_0+(t-t_0)e^{i\theta})$

$f'(\gamma_2(t))\,\gamma_2'(t) = (t-t_0)^{m-1} e^{i(m-1)\varphi}\,\Pi(z_0+(t-t_0)e^{i\varphi})$

$$\frac{\overline{f'(\gamma_1(t))}\,\overline{\gamma_1'(t)}\cdot f'(\gamma_2(t))\cdot\gamma_2'(t)}{|f'(\gamma_1)||f'(\gamma_2)|} = e^{i(m-1)(\varphi-\theta)}\,\Pi(\ \ldots\ )$$

$e^{i(m-1)(\varphi-\theta)} \quad |\Pi(z_0)|^2$

Θέματα Προόδου: (Φυλλάδιο Β)

4) α) Έστω Ω ανοικτό και $f: \Omega \to \mathbb{C}$ συνεχής που επιπρόσθετα ικανοποιεί την $f^3(z)=e^{z^2}$ $\forall z \in \Omega$. Αποδείξτε με όλες τις λεπτομέρειες ότι η f είναι ολόμορφη στο Ω.

β) Έστω $z, \omega \in \mathbb{C}$ ώστε $Re\, z<0$, $Re\, \omega<0$. Να αποδείξετε ότι ισχύει $|e^z-e^\omega|<|z-\omega|$

Λύση:

α) $z \in \Omega$ $\exists r>0 : D(\omega, r) \subset \Omega$.

$$\frac{f(z)-f(\omega)}{z-\omega}, \quad \omega \in D(z,r)$$

$$\begin{matrix} f^3(z)=e^{z^2} \\ f^3(\omega)=e^{\omega^2} \end{matrix} \Longrightarrow \frac{f^3(z)-f^3(\omega)}{z-\omega}=\frac{e^{z^2}-e^{\omega^2}}{z-\omega}$$

$$\frac{f(z)-f(\omega)}{z-\omega}\left(f^2(z)+f(z)f(\omega)+f^2(\omega)\right)=\frac{e^{z^2}-e^{\omega^2}}{z-\omega}$$

Υπάρχει $\omega \in \Omega$ $f(\omega)=0$? $\Rightarrow e^{\omega^2}=0 \xRightarrow{\omega^2=z_0} e^{z_0}=0$ αδύνατο

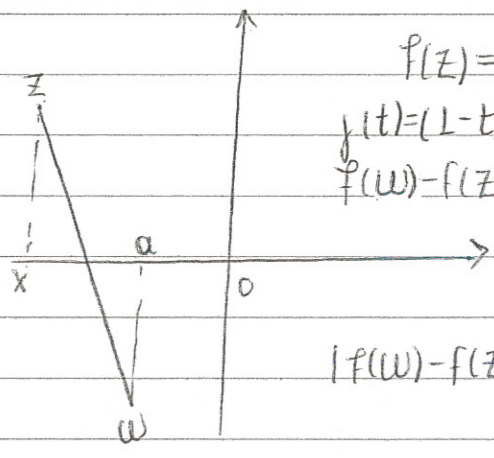
$$|e^{z_0}|=|e^{x_0}e^{iy_0}|=e^{x_0}>0$$

$$\frac{f(z)-f(\omega)}{z-\omega}=\frac{\dfrac{e^{z^2}-e^{\omega^2}}{z-\omega}}{f^2(z)+f(z)f(\omega)+f^2(\omega)}$$

$$\exists \lim_{z\to\omega}\frac{f(z)-f(\omega)}{z-\omega}=\frac{\lim\left(\dfrac{e^{z^2}-e^{\omega^2}}{z-\omega}\right)}{\lim(f^2(z)+f(z)f(\omega)+f^2(\omega))}=\frac{e^{\omega^2}\cdot 2\omega}{3f^2(\omega)}$$

Παραγωγίζεται παντού η f και επομένως είναι ολόμορφη.

β)



$f(z)=e^z$.

$\gamma(t)=(1-t)z+t\omega$

$$f(\omega)-f(z)=\int_\gamma f'(\omega)\,d\omega=\int_0^1 f'((1-t)z+t\omega)(\omega-z)\,dt$$

$$=(\omega-z)\int_0^1 f'((1-t)z+t\omega)\,dt$$

$$|f(\omega)-f(z)|\leq|\omega-z|\int_0^1|f'((1-t)z+t\omega)|\,dt$$

$|f'(t)|<1,\ t\in[0,1]$ $\quad z=x+yi,\ \omega=a+bi,\ x<0,\ a<0$

$e^{(1-t)z+t\omega}=e^{(1-t)x+ta+((1-t)y+tb)i}$

$|e^{(1-t)x+ta+i((1-t)y+tb)}|=e^{(1-t)x+ta}$

$(1-t)x+ta\leq \max(x,a)<0 \quad t\in[0,1]$

$e^{(1-t)x+ta}\leq \underbrace{\max(e^x,e^a)}_{M}<1$

Επομένως: $|e^z-e^w|\leq \max(e^{Re z},e^{Re w})|z-w|<|z-w|$

$\int_0^1 e^{(1-t)x+ta}dt$

$=e^x\int_0^1 e^{t(a-x)}dt$

$\left(\dfrac{e^{t(a-x)}}{a-x}\right)\Big|_0^1=\dfrac{e^{a-x}-1}{a-x}\cdot e^x=\dfrac{e^a-e^x}{a-x}<1$

Από ΘΜΤ: $\dfrac{e^a-e^x}{a-x}=(\cdot\ \cdot)e^{\xi}<1$

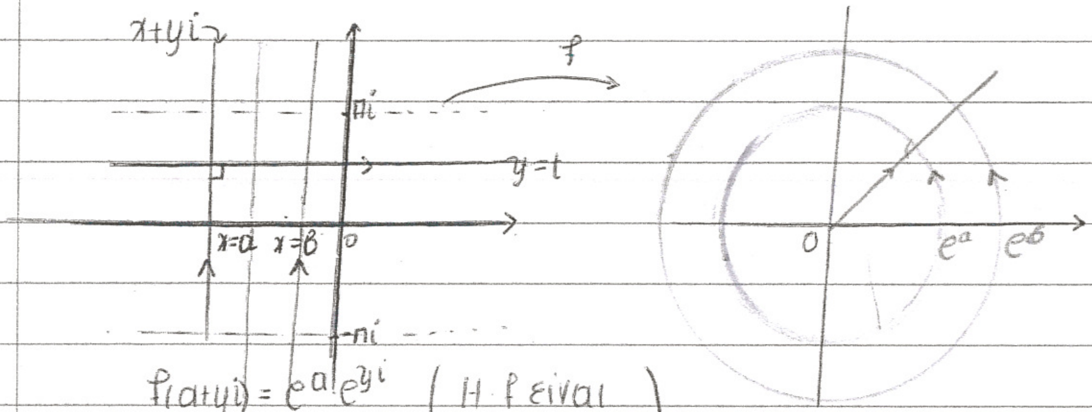
$\exists\ \xi<0$

Μιγαδική Ανάλυση

19/12/2017

Παραδείγματα

1) $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ $f(z)=e^z$, $f'(z)=e^z \neq 0$



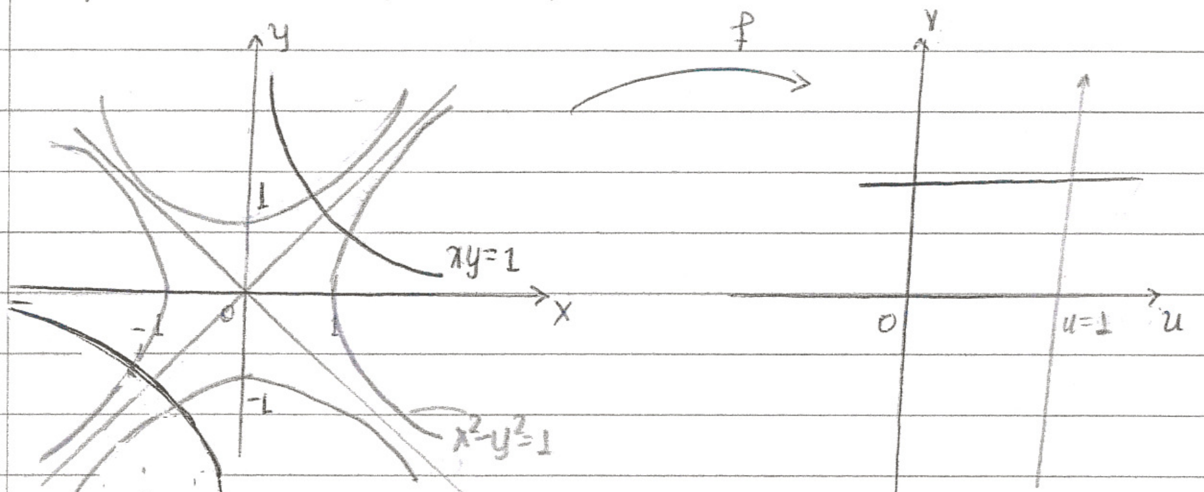
$f(a+yi)=e^a e^{yi}$ (Η f είναι περιοδική)

$|f(a+yi)|=e^a$

$f(x+ti)=e^x e^{ti}$

2) $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ $f(z)=z^2 \Rightarrow f'(z)=2z \neq 0$, $z \neq 0$

Άρα είναι 1-1 σε όλα τα σημεία εκτός από το 0



$z=x+yi$

$z^2=\underbrace{x^2-y^2}_{u}+\underbrace{2xyi}_{v}$ $\quad 2xy=2$

$x^2-y^2=u$

$x^2-y^2=1$

$x^2-y^2=-1$

$\Omega_1,\Omega_2 \subseteq \mathbb{C}$ σύμμορφα ισοδύναμα χωρία αν $\exists f:\Omega_1\to\Omega_2$ 1-1 και επί

Riemann

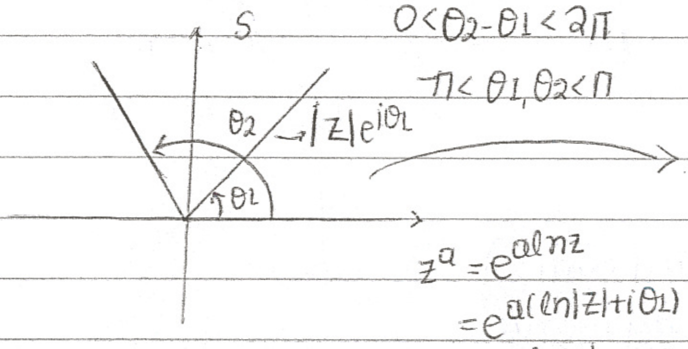
$\forall\, \Omega$ απλά συνεκτικό $\neq \mathbb{C}$ $\quad \exists f:\Omega\to D(0,1)$ 1-1 και επί

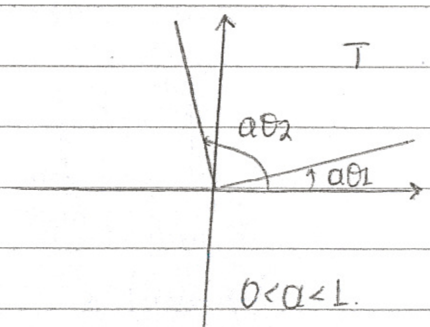
ανοικτό

3) $a>0 \quad z^a := e^{a\ln z}$, $-\pi<\arg z<\pi$

$0<\theta_2-\theta_1<2\pi$

$-\pi<\theta_1,\theta_2<\pi$





$$z^a = e^{a\ln z} = e^{a(\ln|z|+i\theta_1)} = e^{a\ln|z|}\, e^{ia\theta_1} = |z|^a\, e^{ia\theta_1}$$

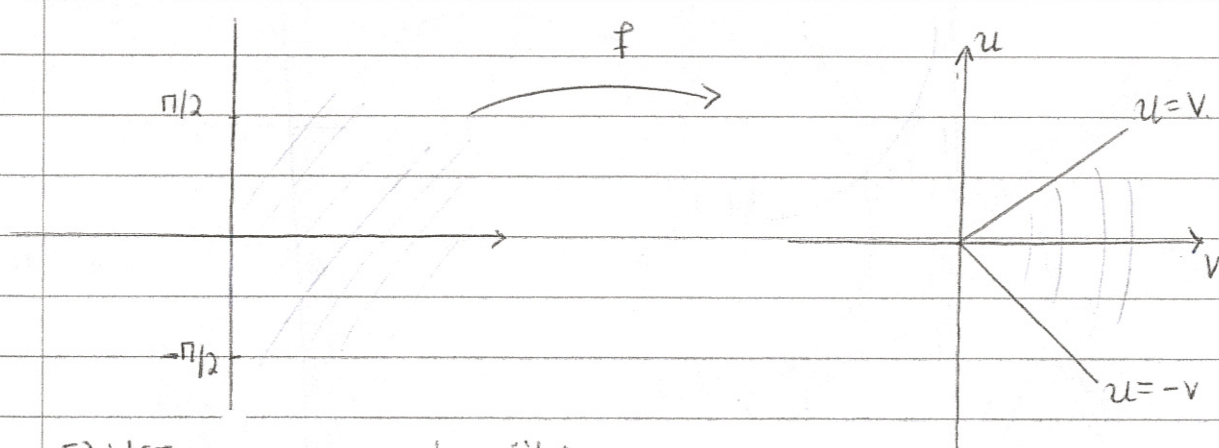
$0<a<1$

$a(\theta_2-\theta_1)<2\pi$

S, T είναι σύμμορφα ισοδύναμα χωρία

• Αν $a>1$: $\theta_2-\theta_1<\frac{2\pi}{a}$

4) $f(z)=z^{1/2}$



5) Μετασχηματισμοί Möbius

$\Phi_a(z)=\frac{z-a}{1-\bar a z} \qquad |a|<1 \qquad |z-a|=|1-\bar a z|$ γιατί

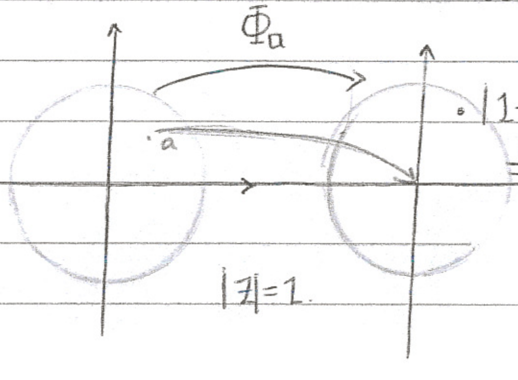
• $(z-a)(\bar z-\bar a)=z\bar z-\bar a z-a\bar z+a\bar a$

$=|z|^2+|a|^2-(\bar a z+a\bar z)$

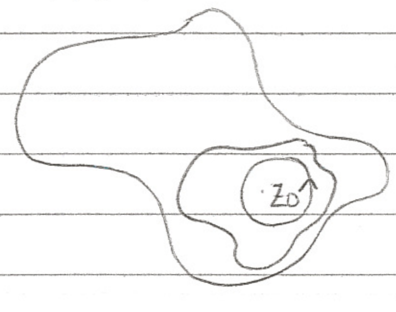
• $|1-\bar a z|^2=(1-\bar a z)(1-a\bar z)=1-a\bar z-\bar a z+|a|^2|z|^2$

$\overset{|z|=1}{=}\; 1-a\bar z-\bar a z+|a|^2$

$\Longleftrightarrow (1-|z|^2)(1-|a|^2)=0$



Άσκηση: Ω τόπος και $z_0 \in \Omega$, $f: \Omega \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ ολόμορφη, $B(z_0,\varepsilon) \subset \Omega$
$f|_{B(z_0,\varepsilon)\setminus\{z_0\}}$ φραγμένη. Να δείξετε ότι η f είναι ολόμορφη στο Ω



Τι μπορεί να συμβαίνει σε μια συνάρτηση με ανωμαλία;

① αίρεται

② πόλος τάξης m: $\lim_{z \to z_0} f(z) = +\infty$

③ ουσιώδης ανωμαλία: $\nexists \lim_{z \to z_0} f(z)$

Η f δεν μπορεί να είναι πόλος, ούτε ουσιώδης ανωμαλία. Θα καταλήξουμε στην περίπτωση ①.
Χρησιμοποιούμε την $\varphi(z) = (z-z_0) f(z)$ που είναι ολόμορφη στο $\Omega \setminus \{z_0\}$
και $\lim_{z \to z_0} \varphi(z) = \lim_{z \to z_0} (z-z_0) f(z) = 0$ (μηδενική επί φραγμένη)

$\Rightarrow$ Άρα η φ είναι ολόμορφη στο Ω.
$\varphi(z) = (z-z_0)^m Q(z)$, $m \geq 1$.
$f(z) = (z-z_0)^{m-1} Q(z)$ ολόμορφη στο Ω

Θέματα Προόδου

2) α) Να προσδιορίσετε τις σταθερές $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ ώστε η
$f(z) = a(x^3 - 3xy^2) - b(x^2 - y^2) + c(3x^2 - y^2) - dxyi$ $\forall z = x+yi$, $x, y \in \mathbb{R}$ να είναι ακέραια. Στη συνέχεια αποδείξτε ότι όντως για τις επιλογές σας η f είναι ακέραια

β) Αποδείξτε ότι δεν υπάρχει δυναμοσειρά $g(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ $|z|<1$ ώστε να ισχύουν i) $g\left(\frac{1}{n}\right) = 1$ $n = 2, 3$

ii) $g'(0) > 0$

Λύση: Cauchy-Riemann
$a = a_1 + b_1 i$
$b = a_2 + b_2 i$
$c = a_3 + b_3 i$
$d = a_4 + b_4 i$

$$f(z)=\overbrace{a_1(x^3-3xy^2)-a_2(x^2-y^2)+a_3(3x^2-y^2)+b_4xy}^{u(x,y)}+$$
$$\underbrace{+b_1(x^3-3xy^2)i-b_2(x^2-y^2)i+b_3-a_4xyi}_{v(x,y)}$$

$u_x=v_y \qquad u_x(x,y)=3a_1(x^2-y^2)\overbrace{-2a_2x+6a_3x}^{-2(a_2-3a_3)x}+b_4y$

$u_y=-v_x \qquad v_y(x,y)=-6b_1xy+2b_2y-3b_3y^2-a_4x$

Για να ειναι ισα: $\begin{cases} a_1=0,\ b_1=0,\ b_3=0 \\ 2b_2=b_4 \\ a_4=2a_2-6a_3 \end{cases}$

$\xrightarrow{a_1=b_1=b_3=0}$ $u_y(x,y)=2a_2y-3a_3y^2+b_4x$

$v_x(x,y)=-2b_2x-a_4y$

$\Rightarrow -v_x(x,y)=2b_2x+a_4y$

Για να ισχυει $u_y=-v_x$: $\begin{cases} a_3=0 \\ 2b_2=b_4 \\ 2a_2=a_4 \end{cases}$

Επομένως: $f(z)=-(a_2+ib_2)(x^2-y^2)-(2a_2+2b_2i)xyi$

$=-(a_2+b_2i)[x^2-y^2+2xyi]=-(a_2+b_2i)(x+yi)^2$

Ελέγχω ότι η f είναι ολόμορφη

β) $h(z)=g(z)-1$ ολόμορφη στον ανοικτό δίσκο

$h\left(\frac{1}{n}\right)=0,\ \frac{1}{n},\ n=2.$

$\Longrightarrow h\equiv 0$

$g(z)=1+z^m\sum_{k=0}^{+\infty}b_kz^k$

$g\left(\frac{1}{n}\right)=1+\left(\frac{1}{n}\right)^m\sum_{k=0}^{+\infty}b_k\left(\frac{1}{n}\right)^k \Longrightarrow \sum_{k=0}^{+\infty}b_k\left(\frac{1}{n}\right)^k=0$

$b_0=\lim_{n\to 0}\sum_{k=0}^{+\infty}b_k\frac{1}{n^k}=0$

$\left.\begin{array}{l} g(z)=\sum a_nz^n \quad |z|<1 \\ g\left(\frac{1}{n}\right)=1,\ n=2,3,\ldots \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{l} g(z)=1 \\ g'(0)=0 \end{array}$ Άρα η δυναμοσειρά δεν υπάρχει

Φυλλάδιο 9.

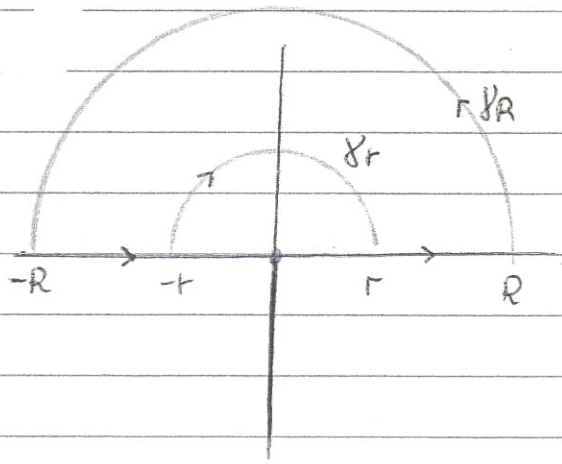
3) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx$.

Υπόδειξη: Ολοκληρώστε κατάλληλα την $\frac{e^{2iz}-1-2iz}{z^2}$

Λύση: Σκέψη: Γιατί αντιμετωπίζει πρόβλημα στο γ_r η $Q(z)=\frac{e^{2iz}}{z^2}$, $\omega=re^{it}$.

$$\int_{\gamma_r} Q(w)\,dw = -\int_0^{\pi} Q(re^{it})\, ire^{it}\,dt$$

$$= -\int_0^{\pi} \frac{e^{2ire^{it}}}{r^2e^{2it}}\, re^{it}\,dt$$



$$e^{2ire^{it}} = e^{2ir(\cos t + i\sin t)}$$
$$= e^{2ir\cos t - 2r\sin t}$$

$$\left|\int_{\gamma_r} Q(\omega)\,d\omega\right| \le \frac{1}{r}\int_0^{\pi} e^{-2r\sin t}\,dt$$

$$= \frac{2}{r}\int_0^{\pi/2} e^{-2r\sin t}\,dt$$

$\sin t \ge ct$

$$\le \frac{2}{r}\int_0^{\pi/2} e^{2rct}\,dt$$

$$= \frac{2}{r}\left(\frac{e^{-2crt}}{-2cr}\right)\Bigg|_0^{\pi/2}$$

$$= -\frac{2}{cr^2}\left(e^{-kr}-1\right)$$

$$= \frac{2}{cr^2}\left(1-e^{-kr}\right)$$

$$f(z) = \frac{e^{2iz}-1-2iz}{z^2}$$

$$\left|\int_{\gamma_r} f(\omega)\,d\omega\right| \le \int_0^{\pi} |f(re^{it})|\, r\,dt \cdot \underset{\substack{\downarrow\, r\to 0 \\ 0}}{Mr\pi}$$ φραγμένη, ολόμορφη

$$\lim_{z\to 0} \frac{\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(2iz)^k}{k!}}{z^2} = \frac{(2i)^2}{2!} = -2$$

$$e^{2iz} = 1 + 2iz + \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(2i)^k \cdot z^k}{k!}$$

$$\frac{e^{2iz} - 1 - 2iz}{z^2} = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(2i)^k \cdot z^{k-2}}{k!}$$ Έτσι έχουμε ολόμορφη συνάρτηση (ενώ αρχικά είχει πόλο)

$$\lim_{r\to 0} \int_{\gamma_r} \frac{e^{2iz} - 1 - 2iz}{z^2} = 0$$ (γιατί είναι ολόμορφη

$$\int_r^R \frac{e^{2ix} - 1 - 2ix}{x^2} dx = \int_r^R \frac{\cos 2x + i\sin 2x - 1 - 2ix}{x^2} dx$$ $\dfrac{\cos 2x - 1 = \cos^2 x - \sin^2 x - 1}{= -(1-\cos^2 x) = -2\sin^2 x}$

0

$$-\frac{\pi}{2} < \arg z < \frac{3\pi}{2}$$

$$\log z = \log|z| + i\arg z$$

$$= \int_r^R -\frac{2\sin^2 x}{x^2} dx + i \int_r^R \frac{\sin 2x - 2x}{x^2} dx$$

$$\int_{-R}^{-r} \frac{e^{2it} - 1 - 2it}{t^2} dt = \int_{-R}^{-r} \frac{\cos 2t - 1 + i(\sin 2t - 2t)}{t^2} dt$$

$$= \int_{-R}^{-r} -\frac{2\sin^2 t}{t^2} dt + i \int_{-R}^{-r} \frac{\sin 2t - 2t}{t^2} dt$$

Θέτω $t = -x$
$dt = -dx$

$$= \int_r^R -\frac{2\sin^2 x}{x^2} dx - \int_R^r \frac{\sin(-2x) + 2x}{(-x)^2} (-dx)$$

$$= \int_r^R -\frac{2\sin^2 x}{x^2} dx - \int_R^r \frac{-\sin 2x + 2x}{x^2} dx$$

$$= \int_r^R -\frac{2\sin^2 x}{x^2} dx + \int_r^R \frac{-\sin 2x + 2x}{x^2} dx$$

$$\int_\gamma f(w)dw = 0 \Longleftrightarrow \int_r^R f(w)dw + \int_{\gamma_R} f(w)dw + \int_{-R}^{-r} f(w)dw + \int_{\gamma_r} f(w)dw = 0$$

$$\Longleftrightarrow -4\int_r^R \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx + \int_{\gamma_r} f(w)dw + \int_{\gamma_R} f(w)dw = 0$$

$\xrightarrow{r\to 0}$ 0 ολόμορφη.

$$\Longleftrightarrow -4\int_0^R \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx + \int_{\gamma_R} f(w)\,dw = 0$$

$\gamma_R = Re^{it},\ t\in[0,\pi]$

$$\int_{\gamma_R} f(w)\,dw = \int_0^\pi \frac{e^{2i(Re^{it})}-1-2iRe^{it}}{R^2e^{2it}}\,iRe^{it}\,dt$$

$$= \frac{i}{R}\int_0^\pi (e^{2iRe^{it}}-1)e^{it}\,dt - 2i^2\int_0^\pi dt$$

$$= -\frac{i}{R}\int_0^\pi e^{it}\,dt + \frac{i}{R}\int_0^\pi e^{2iRe^{it}}\,dt - 2i^2\pi$$

$$\left|\frac{i}{R}\int_0^\pi e^{2iRe^{it}}e^{it}\,dt\right| \le \frac{1}{R}\int_0^\pi e^{-2R\sin t}\,dt = \frac{2}{R}\int_0^{\pi/2} e^{-2R\sin t}\,dt$$

$\sin t \ge \frac{2}{\pi}t$:

$$\le \frac{2}{R}\int_0^{\pi/2} e^{-\frac{4}{\pi}Rt}\,dt \le \frac{2}{R}\,\frac{\pi}{2} \xrightarrow{R\to\infty} 0$$

Επομένως: $-4\int_0^R \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx + 2\pi + I_R = 0$

με $I_R = -\frac{i}{R}\int_0^\pi e^{it}\,dt + \frac{i}{R}\int_0^\pi e^{2iRe^{it}}e^{it}\,dt$

$$\lim_{R\to+\infty}\left(-4\int_0^R \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx + 2\pi + I_R\right) = 0$$

$$-4\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx + 2\pi + 0 = 0$$

$$\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx = \frac{\pi}{2}$$

Μιγαδική Ανάλυση

21/12/2017

Υπενθύμιση: Αν $f: \Omega \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ ολόμορφη (z_0: πόλος)
z_0 εσωτερικό της γ.

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(w)dw = Res(f, z_0)$$
$$= a_{-1}$$

Σειρά Laurent: $\sum_{k=-m}^{-1} a_k (z-z_0)^k + \sum_{k=0}^{+\infty} a_k (z-z_0)^k$

$\frac{a_{-1}}{z-z_0}$ $\quad$ z_0 πόλος τάξης m

Για $m=1$: $a_{-1} = \lim_{z \to z_0} (z-z_0) f(z)$

Για $m=2$: $(z-z_0)^2 f(z) = (z-z_0)^2 \left(\frac{a_{-2}}{(z-z_0)^2} + \frac{a_{-1}}{z-z_0} + Q(z) \right)$

$$= a_{-2} + a_{-1}(z-z_0) + (z-z_0)^2 Q(z)$$

$$\lim_{z \to z_0} \frac{d}{dz}\left((z-z_0)^2 f(z) \right)$$

$$= \lim_{z \to z_0} \left[a_{-1} + (z-z_0) H(z) \right] = a_{-1}$$

Γενικά αν z_0 πόλος τάξης m

$$\lim_{z \to z_0} \left(\frac{d}{dz} \right)^{m-1} \left((z-z_0)^m f(z) \right) = (m-1)!\, a_{-1}$$

Για να βρω την τάξη ψάχνω εκείνο το m ώστε

$$\lim_{z \to z_0} (z-z_0)^m f(z) \neq 0$$

$$\lim_{z \to z_0} (z-z_0)^m f(z) = a_{-m}$$

$$(z-z_0)^{m-1} \left(f(z) - \frac{a_{-m}}{(z-z_0)^m} \right) = a_{-(m-1)}$$

• f, g ολόμορφες στο Ω (στο εσωτερικό της γ)

$|g(\gamma(t))| < |f(\gamma(t))| \Longrightarrow$ #ριζών της f = #ριζών της $(f-g)$

$|g(\gamma(t))| \le |f(\gamma(t))|, \ t\in[0,1]$

$(f+g)(\gamma(t)) \neq 0 \quad \forall t \in [0,1]$

$\Longrightarrow$ #ριζών της f = #ριζών της $(f+g)$ στο εσωτερικό της γ.

<u>Άσκηση:</u> Έστω f ακέραια ($f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$) και $|f(z)| \le 1$ είτε $|f'(z)| \le 1$

Να δείξετε ότι $f(z) = az+b$

Υπόδειξη $|f(z)| \le a+|z|$

f (ολόμορφη) $\Omega \to \mathbb{C}$ γ στο εσωτερικό του Ω.

$\int_\gamma f'(w)dw = f(\gamma(1)) - f(\gamma(0)) = f(z) - f(c)$

$\gamma(0) = c \in \mathbb{C}$ $\qquad f(z) = f(c) + \int_\gamma f'(w)dw$

$\gamma(1) = z \in \mathbb{C}$

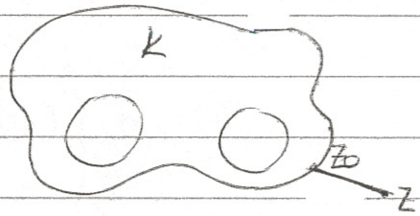
$|f(z)| \le |f(c)| + \left|\int_{z_0}^{z} f'(w)dw\right| \le |f(z_0)| + |z-z_0| \le a+|z|, \ a = |f(z_0)|+|z_0|$

Αν $|f(z)| \le 1$ φραγμένη από το 1

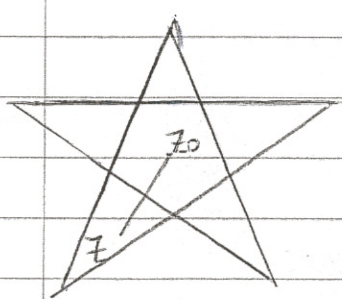
συμπαγές

Liouville: f ακέραια + φραγμένη

$\rightarrow$ σταθερή



$|f(z_0)| \le 1$.



$|f(z)-f(z_0)| \le \sup_{t\in[0,1]} |f'(tz+(1-t)z_0)|\,|z-z_0|$

Καλό Διάβασμα

και καλή Επιτυχία!