ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Πέμπτη 1 Δεκεμβρίου 2016

Διδάσκοντες: Α. Τερτίκας, Σ. Φίλιππας

ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΙΙΙ

Φυλλάδιο 10

1).$^{\otimes}$ Να υπολογίσετε το

$$\int\int_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S} \ ,$$

όπου

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (y - z, yz, -xz) \ ,$$

και S η επιφάνεια των πέντε από τις έξη έδρες του κύβου $0 \leq x \leq 2$, $0 \leq y \leq 2$, $0 \leq z \leq 2$ που δεν βρίσκονται πάνω στο $x0y$ επίπεδο.

2).$^{\otimes}$ Με χρήση του Θεωρήματος Stokes υπολογίστε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

$$\int_C (y + z)dx + (z + x)dy + (x + y)dz \ ,$$

όπου C η τομή του κυλίνδρου $x^2 + y^2 = 2y$ με το επίπεδο $y = z$.

3).$^{\otimes}$ Έστω

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (e^x \sin y, e^x \cos y, z^2) \ ,$$

Υπολογίστε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

$$\int_{\vec{\sigma}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} \ ,$$

όπου $\vec{\sigma}(t) = (\sqrt{t}, t^3, e^{\sqrt{t}})$, $0 \leq t \leq 1$.

4) Να υπολογίσετε με δύο τρόπους το επιφανειακό ολοκλήρωμα

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S} \ ,$$

όπου

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (y, z, x) \ ,$$

και S το μέρος του παραβολοειδούς $z = 1 - x^2 - y^2$, για το οποίο $z \geq 0$. Το κάθετο διάνυσμα δείχνει προς τα θετικά z.

5). Αν $\mathbf{r} = (x, y, z)$ και $\mathbf{F} = \mathbf{a} \times \mathbf{r}$, όπου $\mathbf{a}$ σταθερό διάνυσμα, να δείξετε οτι

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = 2 \int \int_S \mathbf{a} \cdot \mathbf{n} dS \ ,$$

όπου C είναι το σύνορο μιας επιφάνειας S και $\mathbf{n}$ κατάλληλη επιλογή του μοναδιαίου κάθετου στην S.

6).$^{\otimes}$ Να υπολογίσετε το επιφανειακό ολοκλήρωμα

$$\int \int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} \ ,$$

όπου

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (1, 1, z(x^2 + y^2)^2) \ ,$$

και S η επιφάνεια του κυλίνδρου

$$x^2 + y^2 \leq 1, \quad 0 \leq z \leq 1 \ ,$$

με προσανατολισμό καθέτου διανύσματος προς τα έξω του κυλίνδρου.

7). Εστω $\Omega \subset \mathbf{R}^3$ φραγμένο στερεό και S η επιφάνεια του στερεού με προσανατολισμό του καθέτου διανύσματος προς τα έξω του στερεού. Αποδείξτε οτι

$$\int \int_S (x, y, z) \cdot d\mathbf{S} = 3 \int \int \int_\Omega \ dxdydz \ .$$

8). Εστω $\Omega \subset \mathbf{R}^3$ φραγμένο στερεό και S η επιφάνεια του στερεού με προσανατολισμό του καθέτου διανύσματος προς τα έξω του στερεού.Υποθέτουμε οτι η αρχή των αξόνων είναι εκτός του στερεού και της επιφάνειάς του. Αποδείξτε οτι

$$\int \int_S \left(\frac{x}{x^2 + y^2 + z^2}, \frac{y}{x^2 + y^2 + z^2}, \frac{z}{x^2 + y^2 + z^2} \right) \cdot d\mathbf{S} = \int \int \int_\Omega \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2} \ dxdydz \ .$$

Οι ασκήσεις για παράδοση σημειώνονται με $\otimes$

Η παράδοση των ασκήσεων θα γίνεται προσωπικά την ώρα των Ασκήσεων (φροντιστήρια)

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!