ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Πέμπτη 8 Δεκεμβρίου 2016

Διδάσκοντες: Α. Τερτίκας, Σ. Φίλιππας

ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΙΙΙ

Φυλλάδιο 11

1).$^{\otimes}$ Να υπολογίσετε το

$$\int\int_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS\ ,$$

όπου

$$\mathbf{F}(x,y,z) = (x^3, y^3, z^3)\ ,$$

S η μοναδιαία σφαίρα και $\mathbf{n}$ το κάθετο μοναδιαίο διάνυσμα με κατεύθυνση προς τα έξω της σφαίρας.

2).$^{\otimes}$ Να υπολογίσετε το

$$\int\int_{\partial\Omega} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS\ ,$$

όπου

$$\mathbf{F}(x,y,z) = (y, z, xz)\ ,$$

και

$$\Omega = \{(x,y,z) : x^2+y^2 \le z \le 1\}\ .$$

Το $\mathbf{n}$ είναι το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα με κατεύθυνση προς τα έξω του Ω.

3).$^{\otimes}$ Να υπολογίσετε με δύο τρόπους το επιφανειακό ολοκλήρωμα

$$\int_S (\nabla\times\mathbf{F})\cdot d\mathbf{S}\ ,$$

όπου

$$\mathbf{F}(x,y,z) = (y, z, x)\ ,$$

και

$$S = \{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 = 1, \quad 0 \le z \le \frac{\sqrt{3}}{2}\ \}\ .$$

4). Εστω $\Omega \subset \mathbf{R}^3$ φραγμένο στερεό και S η επιφάνεια του στερεού με προσανατολισμό του καθέτου διανύσματος προς τα έξω του στερεού. Αποδείξτε οτι

$$\int\int_S (x+y^{2016},\ y+z^{2016},\ -z+x^{2016})\cdot\mathbf{n}\,dS = 3\int\int\int_\Omega\ dxdydz\ .$$

5). Έστω B_R η μπάλα ακτίνας R και S_R το σύνορό της. Με χρήση του Θεωρήματος Gauss δείξτε οτι

$$\int\int_{S_R} dS = \frac{3}{R}\int\int\int_{B_R} dxdydz \ .$$

6)$^{\otimes}$ Έστω $B_1 = \{\ \mathbf{X} = (x,y,z) : x^2+y^2+z^2 \leq 1\}$ η μοναδιαία μπάλα με κέντρο το μηδέν και $f : B_1 \to (0,\infty)$ η ομαλή βαθμωτή συνάρτηση που ικανοποιεί

$$|\nabla f(\mathbf{X})|^2 = 2f(\mathbf{X}), \quad \mathbf{X} \in B_1,$$

$$\nabla \cdot (f(\mathbf{X})\nabla f(\mathbf{X})) = -f(\mathbf{X}), \quad \mathbf{X} \in B_1 \ .$$

Αποδείξτε οτι

$$\int\int_{\partial B_1} \nabla f \cdot \mathbf{n}\, dS \ = -4\pi.$$

όπου $\mathbf{n}$ είναι το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στη μοναδιαία σφαίρα με κατεύθυνση προς τα έξω.

7). Εστω $B_1 \subset \mathbf{R}^3$ η μοναδιαία μπαλα με κέντρο το μηδέν. Αποδείξτε οτι

$$\int\int\int_{B_1} \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}}\ dxdydz = 2\pi \ ,$$

με κατάλληλη χρήση του Θεωρήματος Gauss.

8). Έστω $\mathbf{F} : B_1 \to \mathbf{R}^3$ ομαλό διανυσματικό πεδίο, (όπου B_1 η μοναδιαία μπάλα) τέτοιο ώστε

$$\nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{X}) = 3, \quad \mathbf{X} \in B_1 \ ,$$

$$\nabla \times \mathbf{F}(\mathbf{X}) = \mathbf{0} \quad \mathbf{X} \in B_1 \ ,$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}) \cdot \mathbf{n} = 1, \quad \mathbf{X} \in \partial B_1 \ ,$$

όπου $\mathbf{n}$ είναι το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στη μοναδιαία σφαίρα με κατεύθυνση προς τα έξω. Αποδείξτε οτι

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}) = \mathbf{X}, \qquad \mathbf{X} \in B_1 \ .$$

Οι ασκήσεις για παράδοση σημειώνονται με $\otimes$

Η παράδοση των ασκήσεων θα γίνεται προσωπικά την ώρα των Ασκήσεων (φροντιστήρια)

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!