ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Πέμπτη 15 Δεκεμβρίου 2016

Διδάσκοντες: Α. Τερτίκας, Σ. Φίλιππας

ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΙΙΙ

Φυλλάδιο 12

Επαναληπτικές ασκήσεις

1). Αν

$$\int\int_R f(x,y)\,dA = \int\int f(x,y)\,dxdy = \int\int f(x,y)\,dydx \ ,$$

συμπληρώστε τα άκρα των διαδοχικών ολοκληρωμάτων στην παραπάνω σχέση όπου R είναι το φραγμένο χωρίο μεταξύ των καμπυλών:

(α) $\quad y=\sqrt{x}, \qquad$ και $\qquad y=x/3 \ ,$

(β) $\quad y=\sqrt{x}, \qquad$ και $\qquad y=x^2/3 \ .$

(γ) $\quad y=e^x, \qquad$ και $\qquad y=3e^{\frac{x}{2}}-2 \ ,$

2). Να υπολογίσετε το

$$\int_0^{\sqrt{2}}\int_y^{\sqrt{4-y^2}} \frac{dxdy}{\sqrt{1+x^2+y^2}} \ .$$

3). Να υπολογίσετε το

$$\int\int_R xydA \ ,$$

όπου

$$R=\{(x,y) : x\geq 0,\ y\geq 0,\ x^2+y^2\leq 1\} \ .$$

4). Να υπολογίσετε το

$$\int\int_T 2xy\,dxdy \ ,$$

όπου T το εσωτερικό τριγώνου με κορυφές $(0,0)$, $(3,0)$ και $(1,2)$.

5). Να υπολογίσετε το

$$\int\int_D e^{\frac{x+y}{x-y}}\,dxdy \ ,$$

όπου D το εσωτερικό τετραπλεύρου με κορυφές $(1,0)$, $(2,0)$, $(0,-2)$ και $(0,-1)$.

6). Να υπολογίσετε το τριπλό ολοκλήρωμα

$$\int\int\int_R \sqrt{x^2+z^2}\, dxdydz \ ,$$

όπου R το φραγμένο στερεό που φράσσεται μεταξύ των επιφανειών

$$y = x^2 + z^2, \qquad y = 4 \ .$$

7). Να υπολογίσετε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} \ ,$$

όπου

$$\mathbf{F} = (-2yze^y, 3xze^y, x + (z+1)e^z) \ ,$$

και C η καμπύλη

$$\vec{\sigma}(t) = (t^3, t^2, t), \qquad 0 \leq t \leq 1 \ .$$

8). Να υπολογίσετε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} \ ,$$

όπου

$$\mathbf{F} = (\cos x + y^2 \sin x + ye^z, \ -2y\cos x + \sin y + xe^z, \ xye^z) \ ,$$

και C η καμπύλη

$$\vec{\sigma}(t) = (\frac{\pi}{4}(t + t^{2015}), \ t - t^{2016}, 1 + t^{2017}), \qquad 0 \leq t \leq 1 \ .$$

9). Να υπολογίσετε το επιφανειακό ολοκλήρωμα

$$\int_S y^2 dS \ ,$$

όπου S το κομμάτι της σφαίρας $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ μέσα στον κύλινδρο $x^2 + y^2 = 1$ και πάνω από το επίπεδο $z = 0$.

10). Να υπολογίσετε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

$$\oint_C y^4 dx + 2xy^3 dy \ ,$$

όπου C η καμπύλη $x^2 + 2y^2 = 2$, με τον θετικό προσανατολισμό.

11). Με χρήση του Θεωρήματος Stokes δείξτε οτι

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S} = \int_S (\nabla \times \mathbf{G}) \cdot d\mathbf{S}$$

όπου
$$\mathbf{F}(x,y,z) = (0, 2xy, x^2+y^2), \qquad \mathbf{G}(x,y,z) = (1-(x^2+y^2)e^{\sin z},\, z, 1) \ ,$$
και S η επιφάνεια που ορίζεται από τις σχέσεις $z = 2xy$ και $x^2+y^2 \leq 1$ με προσανατολισμό του καθέτου προς τα πάνω.

12). Να υπολογίσετε το επιφανειακό ολοκλήρωμα
$$\int_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} \ ,$$
όπου
$$\mathbf{F}(x,y,z) = (yz^2 - zx^2,\, zy^2 - xz^2,\, xy^2 - yx^2) \ ,$$
και S η επιφάνεια που περικλείει το χωρίο
$$\Omega = \{(x,y,z) : 1 \leq x+2y \leq 3,\, -1 \leq y-x \leq 2,\, 0 \leq z \leq x+2y\} \ .$$

13). Να υπολογίσετε το επιφανειακό ολοκλήρωμα
$$\int_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} \ ,$$
όπου
$$\mathbf{F}(x,y,z) = (z^3 \sin e^y,\, z^3 e^{x^2 \sin z},\, y^2+z) \ ,$$
και S η επιφάνεια που περικλείει το φραγμένο χωρίο που βρίσκεται μεταξύ των επιφανειών
$$z = x^2+y^2, \qquad z \leq 4,$$
και
$$z = 8-(x^2+y^2), \qquad z \geq 4,$$
με προσανατολισμό του καθέτου προς τα έξω του χωρίου.

14). Να υπολογίσετε με δύο τρόπους το επιφανειακό ολοκλήρωμα
$$\int_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} \ ,$$
όπου
$$\mathbf{F}(x,y,z) = (x^3,\, z^2,\, 3x^2 z) \ ,$$
και S η μισή σφαίρα
$$x^2+y^2+z^2 = 4, \qquad z \leq 0,$$
με προσανατολισμό του καθέτου προς τα κάτω.

15). Εστω C το σύνορο του ορθογωνίου $0 \leq x \leq 2$, $0 \leq y \leq 1$ και
$$f(x,y) = e^x + e^y \ ,$$

Υπολογίστε το

$$\int_C \nabla f(x,y) \cdot \mathbf{n} \, ds,$$

όπου $\mathbf{n}$ είναι το μοναδιαίο κάθετο προς τα έξω του ορθογωνίου διάνυσμα.

16). Έστω $\phi : B_1 \to \mathbf{R}$ ομαλή συνάρτηση, (όπου B_1 η μοναδιαία μπάλα) τέτοια ώστε

$$-\Delta\phi(x,y,z) = f(x,y,z), \quad (x,y,z) \in B_1 \ , \qquad \phi(x,y,z) = 0, \quad x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

Εάν $u : B_1 \to \mathbf{R}$ ομαλή συνάρτηση ώστε $u(x,y,z) = 0, \ \ x^2 + y^2 + z^2 = 1$, με χρήση ταυτοτήτων του Green, αποδείξτε την αρχή του Dirichlet, δηλαδή ότι ισχύει

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\int\int\int_{B_1} |\nabla u(x,y,z)|^2 \, dx \, dy \, dz - \int\int\int_{B_1} f(x,y,z)u(x,y,z) \, dx \, dy \, dz \\ &\geq \ \frac{1}{2}\int\int\int_{B_1} |\nabla \phi(x,y,z)|^2 \, dx \, dy \, dz - \int\int\int_{B_1} f(x,y,z)\phi(x,y,z) \, dx \, dy \, dz. \end{aligned}$$

Αποδείξτε επιπρόσθετα ότι η ισότητα υλοποιείται μόνο όταν $u = \phi$.
Υπόδειξη: Κάντε την αντικατάσταση $u = \phi + v$.

<u>ΚΑΛΕΣ ΓΙΟΡΤΕΣ!</u>

<u>ΚΑΛΗ ΜΕΛΕΤΗ και ΔΗΜΙΟΥΡΓΙΚΟ ΝΕΟ ΕΤΟΣ</u>